XXXI ENCONTRO SOBRAC
SOCIEDADE BRASILEIRA DE ACÚSTICA
Ouro Preto - MG 2026

Aplicação de metamateriais mecânicos para o controle de vibrações em uma viga engastada livre, empregando técnicas de otimização em seu projeto numérico

Silva, M. C.[1]**; Fagundes Neto, M. G.**[1]

[1] Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação (EMC), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Goiás, Brasil, mauro_silva@discente.ufg.br, marlipe@ufg.br

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo focado na aplicação de metamateriais mecânicos para o controle de vibrações, empregando técnicas de otimização em seu projeto numérico. O objetivo principal é a atenuação de vibrações em uma viga de aço engastada com massa concentrada na extremidade livre, por meio da introdução de estruturas periódicas e ressonadores. Para validar os modelos numéricos desenvolvidos e comprovar a eficácia dos metamateriais nesse controle e na criação de bandgaps, que são faixas de frequência onde a propagação de ondas é inibida, aplica-se a Análise Modal Experimental (EMA). O procedimento experimental envolve a excitação da estrutura e a aquisição dos sinais de resposta para a extração de parâmetros modais cruciais, como frequências naturais, taxas de amortecimento e formas modais. A comparação direta entre os dados numéricos e os resultados experimentais permite não apenas ajustar e validar rigorosamente o modelo matemático, mas também demonstrar, na prática, a redução significativa dos níveis de vibração proporcionada pela otimização do posicionamento dos ressonadores. Conclui-se que a integração das técnicas de simulação computacional com a validação experimental é essencial para o design eficiente de metamateriais aplicados à dinâmica estrutural.

Palavras-chave: metamaterial, controle de vibração, viga engastada livre, análise modal experimental.

Application of mechanical metamaterials for vibration control in a cantilever beam, employing optimization techniques in its numerical design

Abstract

This work presents a study focused on the application of mechanical metamaterials for vibration control, employing optimization techniques in its numerical design. The main objective is the vibration attenuation in a steel cantilever beam with a lumped mass at the free end, through the introduction of periodic structures and resonators. To validate the developed numerical models and prove the effectiveness of the metamaterials in this control and in the creation of bandgaps, which are frequency ranges where wave propagation is inhibited, Experimental Modal Analysis (EMA) is applied. The experimental procedure involves exciting the structure and acquiring response signals to extract crucial modal parameters, such as natural frequencies, damping ratios, and mode shapes. The direct comparison between numerical data and experimental results allows not only to rigorously adjust and validate the mathematical model but also to practically demonstrate the significant reduction of vibration levels provided by optimizing the positioning of the resonators. It is concluded that the integration of computational simulation techniques with experimental validation is essential for the efficient design of metamaterials applied to structural dynamics.

Keywords: *metamaterial, vibration control, cantilever beam, experimental modal analysis.*

1. Introdução

O estudo do comportamento dinâmico de estruturas contínuas esbeltas é um dos pilares da engenharia e da dinâmica estrutural [1]. Tendo isso em vista, a adoção de modelos físicos e matemáticos simplificados é uma prática que é realizada na literatura científica para viabilizar a investigação de fenômenos dinâmicos complexos. Na análise estrutural, por exemplo, sistemas reais são frequentemente representados por modelos equivalentes de vigas com diferentes condições de contorno e massas acopladas, permitindo isolar e compreender os mecanismos fundamentais que regem o comportamento vibratório dessas estruturas [2, 3]. A importância de se estudar esses arranjos reside em sua robustez metodológica. O isolamento de variáveis e a redução das complexidades geométricas permitem concentrar a análise nas interações físicas fundamentais. Essa simplificação viabiliza o desenvolvimento e a validação de estratégias de controle avançadas que, posteriormente, são extrapoladas para sistemas reais de alta complexidade, como torres de aerogeradores offshore [4]. Nesse cenário de múltiplas excitações dinâmicas, o controle de vibrações se mantém como um desafio contínuo e crucial para a engenharia.

Historicamente, o uso de absorvedores dinâmicos de vibração, como o Tuned Mass Damper (TMD), consolidou-se como uma técnica eficaz para mitigar oscilações em frequências específicas. Contudo, a busca por uma atenuação mais global direcionou a fronteira da pesquisa para os metamateriais e metaestruturas [5]. Diferentemente dos materiais convencionais, os metamateriais mecânicos são arranjos artificiais projetados com ressonadores locais periódicos. Em determinadas faixas de frequência, esses ressonadores podem produzir regiões de forte atenuação da resposta vibratória. Apesar do crescente interesse científico por metamateriais ressonantes na última década, uma análise da literatura revela lacunas práticas e metodológicas. A implementação de metamateriais em estruturas que já possuem assimetrias inerciais inerentes, como o arranjo de viga com massa na ponta, ainda carece de metodologias de projeto que integrem rotinas numéricas de otimização a uma validação experimental robusta. O preenchimento dessa lacuna é fundamental, uma vez que o posicionamento ótimo e a sintonia fina de massa e rigidez dos ressonadores são determinantes para a eficiência do controle.

Diante deste contexto, este artigo tem como objetivo apresentar o projeto, a otimização numérica e a validação experimental de metamateriais mecânicos aplicados ao controle de vibrações em uma viga de aço engastada com massa na extremidade livre. A metodologia proposta utiliza um algoritmo de otimização multiobjetivo para definir as propriedades e o posicionamento dos ressonadores. Posteriormente, os resultados numéricos são comparados com ensaios de Análise Modal Experimental (EMA), realizados na viga com e sem os ressonadores. Por meio da excitação controlada e da análise das Funções de Resposta em Frequência (FRF) processadas em ambiente Python, busca-se comprovar, na prática, a eficácia da metaestrutura na redução dos níveis de vibração da viga.

2. Fundamentação teórica

2.1 Modelagem dinâmica e ressonância local em estruturas finitas

A análise dinâmica de elementos estruturais contínuos, como vigas esbeltas, baseia-se na distribuição espacial de suas propriedades de inércia e rigidez. O comportamento flexional dessas estruturas é classicamente governado pela teoria de vigas, cujas ressonâncias naturais podem levar ao colapso por fadiga. Para o controle passivo dessas vibrações, a estrutura hospedeira pode ser modificada através da inserção de metamateriais mecânicos baseados no princípio da ressonância local [6].

Diferentemente dos cristais fonônicos clássicos, que dependem do espalhamento de Bragg e de estrita periodicidade espacial, os metamateriais de ressonância local operam em escalas de subcomprimento de onda. Essa característica evita a necessidade de comprimentos estruturais inviáveis para o controle em baixas frequências. Quando a frequência de excitação se aproxima da frequência natural interna do ressonador, sua massa passa a oscilar de forma defasada em relação à estrutura hospedeira. Essa oposição de movimento gera uma força de inércia contrária, resultando em um comportamento de massa efetiva dinâmica negativa. Esse fenômeno inibe a propagação da energia elástica e cria as zonas de atenuação

conhecidas como *bandgaps* [7].

Grande parte da literatura modela esse fenômeno assumindo redes infinitamente periódicas. No entanto, estruturas reais na engenharia, como torres, pontes e edifícios, são domínios físicos finitos e delimitados por condições de contorno reais [8]. Nesses cenários, a interação ocorre entre os modos globais limitados da estrutura e as ressonâncias pontuais adicionadas. Portanto, para projetar *bandgaps* eficientes em estruturas finitas, metodologias baseadas na Análise Modal e na discretização via Método dos Elementos Finitos (MEF) tornam-se indispensáveis para alinhar espacialmente as massas com a deflexão operativa contínua da estrutura [9, 10].

2.2 Otimização multiobjetivo e o algoritmo NSGA-II

O dimensionamento de metamateriais envolve a mitigação de uma fronteira de conflito clássica, atenuar ao máximo as oscilações transversais enquanto, simultaneamente, se minimiza a massa adicionada ao projeto. Tais problemas recaem no campo da otimização multiobjetivo, cujo resultado não é uma única solução, mas um conjunto de soluções ótimas de compromisso, as chamadas soluções de *trade-off*, regidas pelo conceito de dominância de Pareto [11]. A natureza das variáveis rege a escolha do buscador computacional, em que a distribuição topológica de uma quantidade inteira de ressonadores em posições discretas ao longo de uma viga torna a função objetivo não linear e multimodal, demandando algoritmos metaheurísticos globais que sejam imunes à retenção em ótimos locais [12].

Para mapear a Fronteira de Pareto e garantir a diversidade das soluções, adota-se o *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II* (NSGA-II) [13]. O algoritmo destaca-se pela ordenação rápida por não-dominância, pelo elitismo sistematizado e pelo uso da distância de aglomeração (*crowding distance*). Validando essa via metodológica em metaestruturas, a delegação do posicionamento espacial individual e da sintonia de massa aos operadores genéticos do NSGA-II permite a obtenção de perfis de atenuação flexional máxima sem a necessidade de modelagens matemáticas proibitivas, entregando topologias prontas para a validação empírica [14].

2.3 Análise modal experimental (EMA)

Para validar a integridade dos modelos numéricos acoplados e a eficácia real das metaestruturas, a validação experimental torna-se essencial. Em ambientes controlados, a Análise Modal Experimental (EMA) atua como o principal método de diagnóstico [15].

O pilar da EMA é a Função de Resposta em Frequência (FRF), uma representação no domínio da frequência que relaciona a resposta estrutural (aceleração) à força de excitação controlada transiente. Na prática experimental, devido a ruídos inerentes de instrumentação elétrica e mecânica, o cálculo direto da FRF é estabilizado pelo estimador estatístico $H_1(\omega)$, definido pela razão entre a densidade espectral cruzada entre a força e a resposta, e a densidade espectral de potência da força de entrada [15].

A partir das FRFs validadas, algoritmos de identificação no domínio da frequência, como o estimador LSCF (*Least-Squares Complex Frequency-domain*)[16], são empregados para a extração refinada dos polos estruturais. Em metamateriais, essa etapa é crucial para verificar fisicamente as raízes duplas desdobradas formadas pela inserção da ressonância local. A conformidade analítica e espacial dos modos identificados é, por fim, testada perante o modelo numérico através da matriz de ortogonalidade do Critério de Garantia Modal (MAC), confirmando a correspondência espacial das formas modais.

3. Desenvolvimento

A metodologia deste trabalho abrange o projeto paramétrico, a otimização multiobjetivo e a validação experimental de metamateriais ressonantes aplicados em uma estrutura esbelta. Todo o escopo de modelagem numérica, controle e instrumentação foi direcionado para a extração, análise e mitigação dos modos de flexão transversal no eixo de menor inércia da estrutura, ao longo da espessura de uma viga retangular.

3.1 Estrutura principal e modelagem numérica

A estrutura principal consiste em uma viga de aço reta, de seção transversal retangular constante de 19×5 mm, com comprimento útil de 312 mm sob condição de contorno engastada-livre. Na extremidade livre, acoplou-se rigidamente uma massa concentrada de 100 g. A adição dessa massa simula o componente de topo de estruturas civis ou eólicas, cujo deslocamento busca-se minimizar, além de reduzir as frequências naturais globais, facilitando a excitação e a sintonia. A estrutura física pode ser observada na Figura 1.



Figura 1: Modelo físico de viga engastada livre.

O modelo numérico parametrizado foi desenvolvido através do Método dos Elementos Finitos (MEF) no ambiente ANSYS APDL. O domínio contínuo da viga foi discretizado com elementos estruturais do tipo `BEAM188`, baseados na teoria de Timoshenko, que incorporam os efeitos de deformação por cisalhamento e inércia rotacional. Para garantir a fidelidade dinâmica do modelo numérico em relação ao aparato físico, procedeu-se a uma calibração fundamentada nas frequências identificadas nos testes experimentais preliminares, que optou-se por ajustar o módulo de elasticidade do aço para $E = 185,65$ GPa. Esse ajuste foi realizado para compensar as incertezas inerentes às propriedades mecânicas do perfil comercial utilizado, mitigando variações reais decorrentes do processo de fabricação e da composição da liga. Dessa forma, assegurou-se que as propriedades constitutivas do material refletissem o comportamento físico da viga, garantindo a melhor precisão do modo fundamental sem interferir nas formulações de contorno do modelo.

3.2 Sintonia paramétrica e otimização multiobjetivo

O projeto da rede de metamateriais foi formulado como um problema de otimização multiobjetivo utilizando o algoritmo NSGA-II (*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II*) suportado pela biblioteca `pymoo` em linguagem Python. O objetivo primário estabelecido foi a minimização da resposta global da estrutura, avaliada pelo valor RMS (*Root Mean Square*) do deslocamento na extremidade livre da viga, onde está a massa concentrada, computado pela integração da Função de Resposta em Frequência (FRF) na banda de excitação delimitada entre 16 Hz e 36 Hz, faixa que compreende a primeira frequência natural da estrutura, que foi escolhida por ser a que tem maior deslocamento. Simultaneamente, como objetivo secundário conflitante, buscou-se a minimização da razão de massa adicionada (μ), com o intuito de acoplar pouca massa na estrutura.

O vetor de decisão paramétrico do algoritmo definiu quatro variáveis: a razão de massa alvo (μ), o número de células unitárias a serem acopladas (n_{res}), a coordenada longitudinal de início da rede (x_{start}) e o espaçamento uniforme entre os ressonadores subsequentes (Δx). Utilizando a teoria proposta por Sugino

[9], a cada iteração, o *Python* computa a massa de cada célula (m_{res}) e a frequência de sintonia (f_{res}). Para garantir a máxima eficiência na atenuação, esta sintonia foi ancorada na primeira frequência natural de flexão da estrutura original, cujo valor de $24,18$ Hz, que foi estabelecido a partir do resultado numérico extraído no ANSYS após a etapa de atualização do modelo. Com base nessa frequência de referência, o algoritmo calcula a rigidez analítica requerida (k_{res}) e o amortecimento viscoso correspondente (c_{res}). Para esse cálculo do amortecimento viscoso foi fundamentado na taxa de amortecimento experimental aferida previamente em bancada para a célula do metamaterial utilizado na etapa experimental, que apresentou o valor de ζ_{res} igual a 4,54%, ao final todo o conjunto de parâmetros é então transferido via *batch* para o solucionador numérico.

No ambiente de simulação do ANSYS, as inércias dos metamateriais locais são introduzidas lateralmente através de elementos pontuais de massa (`MASS21`), restritos puramente à translação unidimensional e acoplados aos respectivos nós espaciais na viga através de elementos de mola-amortecedor (`COMBIN14`). O solucionador numérico calcula as tensões estáticas, procede com a extração modal pré-tensionada e executa a Análise Harmônica sob uma excitação de força unitária na ponta da viga, retornando a FRF extraída e avaliando os indivíduos da fronteira de Pareto ótima [13]. A disposição geométrica dos elementos pode ser observada no modelo computacional apresentado na Figura 2. Além disso, definiu-se preliminarmente que a configuração ótima adotada para o projeto físico seria aquela que, dentre as soluções da região de compromisso, entregasse o menor valor absoluto de RMS.

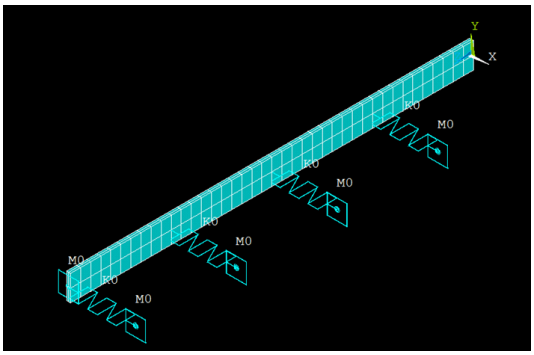


Figura 2: Exemplo da viga com 4 metamateriais.

Por fim, para a execução da otimização multiobjetivo, os parâmetros do algoritmo genético foram definidos visando equilibrar o custo computacional e a exploração global do espaço de busca. Estabeleceu-se uma população de 50 indivíduos por geração, submetida a um limite máximo de processamento de 200 gerações. Adicionalmente, implementou-se um critério de parada baseado na convergência da Fronteira de Pareto, em que caso os resultados ótimos não apresentassem melhoria relativa por 10 gerações consecutivas, o laço de otimização era interrompido precocemente.

3.3 Fabricação dos ressonadores e análise modal experimental (EMA)

Com a geometria e os parâmetros dinâmicos definidos pela extração do vetor ótimo na fronteira de Pareto, as células unitárias foram projetadas e cortadas em chapas de acrílico de 2 mm. O *design* adotado foi o formato de serpentina, uma topologia escolhida especificamente por permitir o alcance de uma rigidez à flexão baixa e controlada em um volume físico altamente reduzido, viabilizando a sintonia do ressonador em baixas frequências. Para garantir a fidelidade dinâmica, procedeu-se ao balanceamento mecânico das extremidades das molas através da fixação de pequenos parafusos e blocos complementares de acrílico, que foram ajustados com uso de uma balança de precisão para medir a massa ressonante isolada requerida pelas premissas do modelo numérico ótimo.

A instalação física dos ressonadores na estrutura, para permitir o livre deslocamento transversal da malha e evitar qualquer atrito da serpentina contra a viga durante as oscilações, inseriu-se um bloco espaçador

maciço de acrílico, com 7 mm de espessura na base de cada célula. O conjunto foi fixado lateralmente à estrutura de aço, nas coordenadas longitudinais exatas definidas pela otimização, utilizando um adesivo estrutural rígido. A adoção de um acoplamento de alta rigidez é essencial para impedir a introdução de uma camada de flexibilidade ou amortecimento parasita, o que poderia descalibrar a frequência de engaste efetiva e desvirtuar o *bandgap* sintonizado. O aparato experimental montado para os testes práticos é detalhado na Figura 3, que mostra a viga com os metamateriais acoplados.

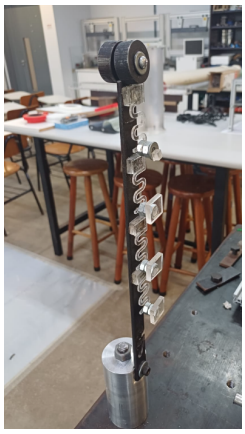


Figura 3: Viga com metamaterial - Experimento.

O desempenho de atenuação da viga foi validado fisicamente em bancada por meio da Análise Modal Experimental (EMA). Para viabilizar a comparação direta e atestar a eficácia do controle, os ensaios foram conduzidos em duas etapas, sendo inicialmente na viga original e, subsequentemente, na viga acoplada aos metamateriais sintonizados via otimização. A instrumentação contemplou a aquisição por quatro acelerômetros piezoelétricos do tipo IEPE (modelo *PCB 352C23*, miniatura de $0,19$ g). Para garantir a coerência espacial das formas modais, os sensores foram mantidos nas mesmas posições longitudinais em ambas as configurações, distribuídos em $74,5$ mm, $149,0$ mm, $223,5$ mm e na massa da extremidade a $310,0$ mm. A Figura 4 ilustra o arranjo experimental e o detalhamento deste posicionamento.

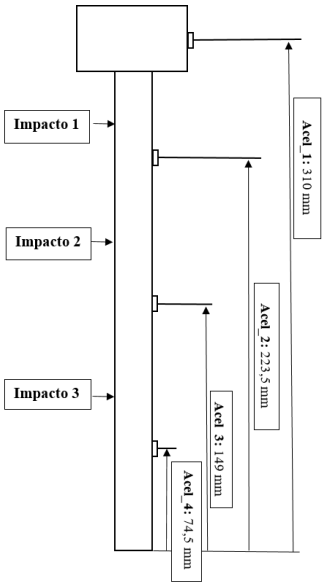


Figura 4: Vista lateral do arranjo experimental ilustrando o posicionamento equidistante dos acelerômetros e das posições de excitação com martelo ao longo da viga.

Os sinais foram condicionados e digitalizados através do *hardware National Instruments cDAQ-9174*

equipado com módulos da série NI 9234, garantindo uma amostragem simultânea em alta resolução sem introdução de erros de fase intercanais. A estrutura foi excitada de maneira transiente por intermédio de um martelo de impacto instrumentado (*PCB 086C03*), utilizando ponteira adequada para injetar energia sobre todo o espectro de interesse. A aquisição de dados foi automatizada através de um código customizado desenvolvido em linguagem Python, empregando a biblioteca `nidaqmx` para a interface direta com o equipamento. Para mitigar ruídos aleatórios inerentes à medição e assegurar a convergência estatística, adotou-se uma malha de excitação distribuída entre os sensores, executando-se 5 réplicas independentes compostas por 10 médias de impacto cada.

O processamento dos sinais transientes foi realizado com uma frequência de amostragem de 2048 Hz e um tempo de aquisição de 2 s por bloco resultando em 4096 pontos. Para refinar a definição espectral (Δf) digitalmente, aplicou-se a técnica de *zero padding*, elevando o vetor para 65536 pontos. Esse procedimento resultou em uma resolução espectral final de aproximadamente $0,031$ Hz e aplicou-se uma janela do tipo exponencial nos sinais de aceleração garantindo o decaimento total da resposta livre e uma janela de Força nos impactos.

Foram validados apenas os impactos que apresentaram função de coerência superior a 90% na faixa de interesse. Essa matriz de resposta validada foi então importada pelo pacote `pyEMA`, que implementa o algoritmo LSCF (*Least-Squares Complex Frequency-domain*). Através da análise do diagrama de estabilização gerado pela ferramenta, foi possível extrair os polos físicos do sistema (frequências naturais e fatores de amortecimento) e as formas modais reais, separando-os de polos puramente numéricos.

Por fim, a eficácia do *design* foi atestada por meio do mapeamento computacional da zona de rejeição ou atenuação das vibrações e do cálculo do percentual de redução relativa do valor RMS (*Root Mean Square*), computado a partir da magnitude das FRFs na comparação entre a viga tratada e a original, na faixa espectral de 16 Hz a 36 Hz.

4. Resultados e discussões

4.1 Otimização multiobjetivo e seleção do metamaterial

Após a caracterização dinâmica da viga original, que estabeleceu a primeira frequência natural de flexão em $24,18$ Hz no modelo numérico ajustado, realizou-se a otimização multiobjetivo acoplada ao *solver* de Elementos Finitos. O processo evolutivo guiado pelo NSGA-II gerou uma Fronteira de Pareto que demonstrou a natureza do conflito do projeto, sendo a minimização da resposta vibratória (RMS) em oposição à minimização do peso estrutural adicionado, a razão de massa μ.

O algoritmo operou ininterruptamente até o final, atingindo o limite máximo projetado de 200 gerações, sem que o critério de parada por estagnação precoce fosse acionado, a conclusão deste ciclo evolutivo resultou na convergência e consolidação da fronteira ilustrada na Figura 5.

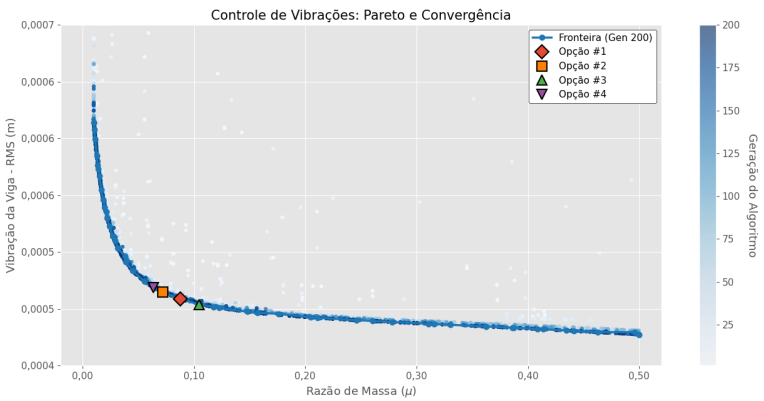


Figura 5: Histórico de convergência do espaço de busca e Fronteira de Pareto obtida na Geração 200.

Dentre as soluções da região de compromisso, o "cotovelo" da curva, onde as melhores opções são os pontos indicados na Figura 5, em que, considerando que o objetivo é estabelecer a menor vibração na estrutura, selecionou-se a configuração ótima correspondente à opção 3 no gráfico, com uma razão de massa global de $\mu = 0,1047$, que entregou o menor nível absoluto de vibração numérica dentre os melhores resultados na faixa de análise, com $RMS = 0,454$ mm. A distribuição topológica deste indivíduo estabeleceu a alocação de quatro ressonadores, com $n_{res} = 4$, concentrados no terço final da viga, região de máxima densidade de energia modal e o arranjo definiu a posição inicial de fixação em $x_{\text{start}} = 149,5$ mm com um espaçamento uniforme entre as células adjacentes de $\Delta x = 53,8$ mm, estendendo-se até a coordenada de $311,0$ mm. Em relação às propriedades dinâmicas unitárias, a inércia exigida para cada célula foi calculada em $m_j(res) = 8,51$ g, demandando uma rigidez transversal de $k_{res} = 186,62$ N/m para sintonizar com precisão a frequência alvo do *bandgap* em $f_res = 23,57$ Hz.

4.2 Análise modal numérica e validação EMA

Para validar a integridade dos modelos e a eficácia da metaestrutura, os parâmetros modais da viga, com e sem o metamaterial, foram extraídos tanto via simulação (ANSYS) quanto em bancada (EMA). A fim de atestar a robustez do ensaio físico, os resultados experimentais foram consolidados a partir da média das cinco réplicas independentes, acompanhados de suas respectivas incertezas expandidas. A Tabela 1 sintetiza a comparação direta entre os domínios para o primeiro modo da viga original com e sem os metamateriais.

Tabela 1: Comparação das frequências naturais numéricas e experimentais (EMA) e taxas de amortecimento para o primeiro modo de flexão (incertezas com 95% de confiança).

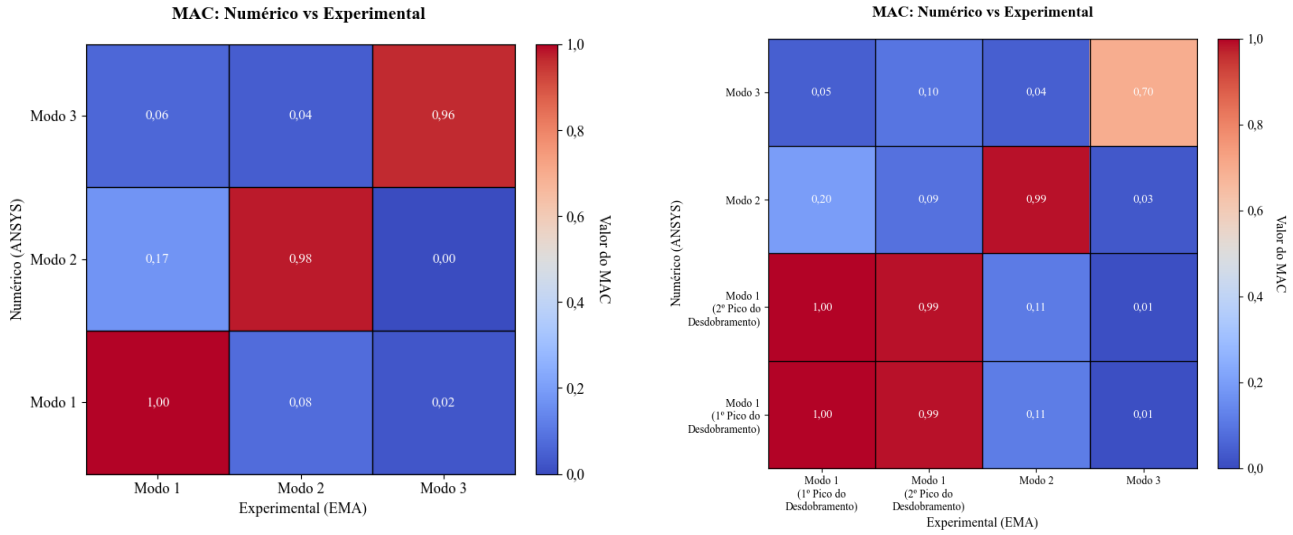
Configuração da Estrutura	Numérico (Hz)	EMA (Hz)	Amort. EMA (%)	Desvio Relativo da Freq.
Viga Original				
1º Modo de Flexão	24,18	$24,12 \pm 0,37$	$0,14 \pm 0,0089$	0,24%
Viga com Metamaterial				
1º Modo (Pico 1 do Desdobramento)	20,35	$21,85 \pm 0,32$	$1,50 \pm 0,0473$	6,44%
1º Modo (Pico 2 do Desdobramento)	28,00	$27,53 \pm 0,42$	$4,46 \pm 0,7450$	2,21%

Na estrutura original, a primeira ressonância experimental foi identifiedada em $24,12$ Hz, apresentando um desvio relativo de apenas $0,24\%$ frente ao modelo de elementos finitos atualizado, $24,18$ Hz. Essa concordância inicial, aliada à baixa incerteza de medição, de $\pm 0,37$ Hz, corrobora a confiabilidade do valor da frequência base estabelecida para o projeto de otimização.

Com a introdução da rede periódica de metamateriais colada lateralmente à viga, a análise numérica previu o desdobramento deste modo fundamental de flexão, bifurcando a resposta em dois novos picos, onde o comportamento foi validado na bancada pela EMA, que identificou a bifurcação em $21,85$ Hz e $27,53$ Hz, circundando a frequência sintonizada. Embora o primeiro pico apresente um desvio levemente maior ($6,44\%$), reflexo direto do acoplamento complexo das massas de acrílico e da rigidez residual do adesivo, características difíceis de mapear com exatidão no modelo ideal.

A coerência espacial global entre as predições numéricas e a dinâmica real foi atestada por meio do

Critério de Garantia Modal (MAC), computado para os três primeiros modos de flexão transversal da estrutura. A Figura 6 apresenta o cruzamento entre os autovetores do MEF e da EMA para a viga com e sem controle.



(a) Viga Original. **(b)** Viga acoplada ao metamaterial.

Figura 6: Matrizes MAC comparativas (Numérico vs. EMA): (a) Viga sem metamaterial e (b) Viga com metamaterial.

Para a viga sem metamaterial, Figura 6(a), observa-se a dominância da diagonal principal, demonstrando a correlação geométrica do modelo numérico de referência. Já na viga com metamaterial, Figura 6(b), além de se manter a coerência espacial nos modos de flexão de ordem superior (Modos 2 e 3), a assinatura do desdobramento em frequência é comprovada pela colinearidade cruzada do bloco inicial 2×2. O algoritmo MAC demonstra que as duas primeiras frequências naturais do sistema acoplado compartilham macroscopicamente a mesma deformada transversal da viga. Esse resultado evidencia que a interação dinâmica ocorre estritamente pela defasagem das massas internas dos ressonadores, confirmando fisicamente o acoplamento ressonante no modo fundamental.

Cabe ressaltar que, em estruturas finitas, o desdobramento de ressonância é o mecanismo que torna a atenuação vibratória compatível com a teoria de ressonadores locais. Contudo, o critério MAC atesta puramente a correlação espacial das formas modais sob acoplamento, e não a existência de um *bandgap* em si. A comprovação definitiva e formal da zona de rejeição como um *bandgap* exigiria uma análise específica de propagação e dispersão de ondas no domínio do número de onda da célula unitária, escopo que será abordado em etapas futuras da pesquisa.

4.3 Eficácia de atenuação vibratória (FRF)

A métrica para medir o desempenho do controle passivo consiste na supressão da amplitude vibratória estrutural sob excitação. Inicialmente, o comportamento dinâmico global do sistema otimizado foi avaliado computacionalmente. A Figura 7 contrapõe a Função de Resposta em Frequência (FRF) de receptância (deslocamento) da viga original à resposta do sistema acoplado ao metamaterial extraída da análise harmônica numérica.

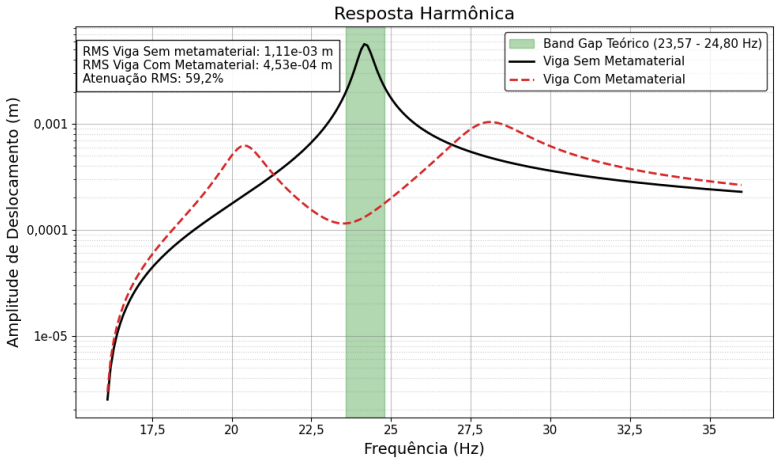


Figura 7: Comparação numérica da Função de Resposta em Frequência (Receptância): viga sem metamaterial versus viga com metamaterial.

Na estrutura original simulada, a resposta é dominada pelo pico ressonante em $24,18$ Hz. Contudo, com a introdução da rede periódica, observa-se a supressão desta ressonância central e o clássico desdobramento em dois picos de menor amplitude, evidenciando a formação teórica do *bandgap*. Quantitativamente, o desempenho do controle foi avaliado pelo cálculo do valor RMS (*Root Mean Square*), definido como a raiz quadrada da média dos quadrados da magnitude da FRF na banda de projeto (16 Hz a 36 Hz). Essa métrica demonstrou que o RMS numérico global decaiu de $1,113$ mm/N para $0,454$ mm/N, o que representa uma atenuação expressiva de $59,00\%$.

Para validar fisicamente essa eficiência predita e atestar o comportamento dinâmico real do sistema, a Figura 8 sobrepõe a FRF coletada experimentalmente no primeiro modo ($x = 310,0$ mm) para ambas as configurações, utilizando o acelerômetro do topo da viga.

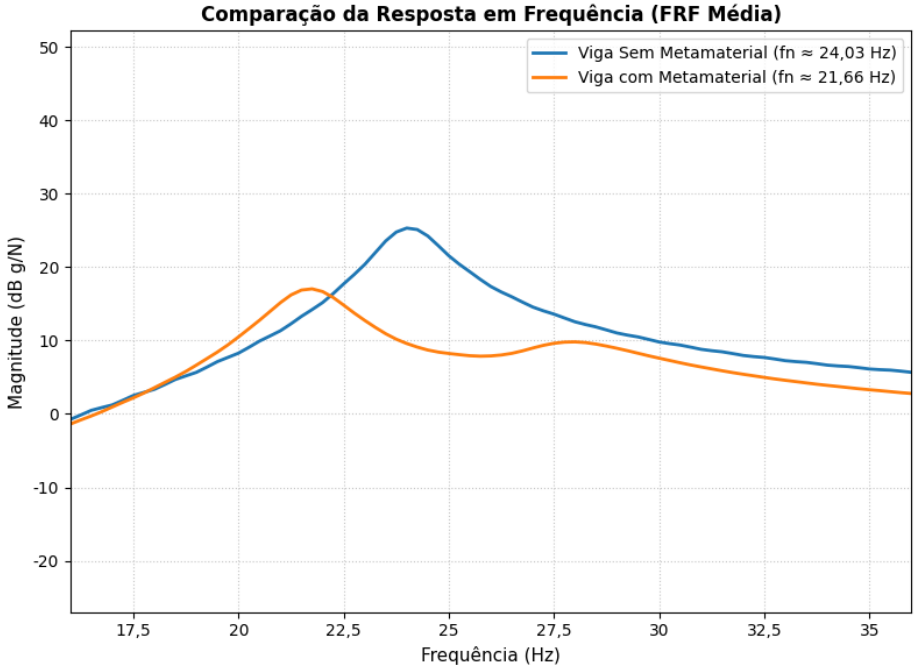


Figura 8: Comparação experimental da Função de Resposta em Frequência (Acelerância): viga sem metamaterial versus viga com metamaterial.

No ensaio da viga sem metamaterial, a resposta empírica é dominada pelo pico em $24,02$ Hz. Assim como previsto na análise numérica, a introdução dos ressonadores em acrílico resultou na supressão desta ressonância central e no surgimento prático do *bandgap*. O segundo pico do desdobramento (≈ 27 Hz) apresenta-se experimentalmente como uma inflexão suave, comportamento atrelado ao elevado amortecimento local inserido pelo elemento em serpentina e evidenciado pelas taxas de amortecimento da EMA ($\zeta \approx 3,44\%$).

No domínio empírico, o cálculo do valor RMS sobre a magnitude da FRF de acelerância, na mesma faixa espectral de 16 Hz a 36 Hz, indicou um decaimento de $15,72$ g/N na viga original para $8,88$ g/N na viga controlada, consolidando uma atenuação de $43,50\%$ na resposta dinâmica da estrutura. A divergência percentual em relação à simulação numérica ($59,00\%$) é justificada pela complexidade de representar computacionalmente o amortecimento real do material, perdas parasitas e rigidezes residuais de fixação. Contudo, a mitigação obtida atesta o sucesso prático da metodologia.

Por fim, cabe esclarecer que os valores absolutos de RMS extraídos em cada domínio não são diretamente equivalentes, uma vez que o modelo numérico avaliou a FRF de receptância (deslocamento), enquanto o experimento mediu a FRF de acelerância (aceleração). A eficácia da metodologia de projeto, no entanto, é validada não pela equivalência das grandezas brutas, mas pela correlação da métrica de atenuação percentual relativa, que atua como um indicador adimensional confiável da redução da energia vibratória média na banda sintonizada em ambos os domínios.

5. Conclusões

Este trabalho apresentou uma metodologia integrada para o projeto, a otimização e a validação experimental de metamateriais mecânicos aplicados ao controle passivo de vibrações. Por meio do acoplamento do algoritmo multiobjetivo NSGA-II a modelos de elementos finitos, foi possível projetar ressonadores locais para atuar de forma ótima na mitigação do primeiro modo de flexão de uma viga engastada-livre, equilibrando o compromisso inerente entre o acréscimo de massa e o desempenho dinâmico.

A validação física, conduzida via Análise Modal Experimental (EMA), confirmou a precisão do modelo numérico e a eficácia da metaestrutura projetada. A introdução da rede periódica com razão de massa otimizada ($\mu = 10,67\%$) resultou no desdobramento esperado da frequência fundamental e na formação do *bandgap* localmente ressonante. O desempenho dessa topologia foi quantificado por uma atenuação de $43,50\%$ no valor RMS da resposta dinâmica na extremidade da estrutura. Além disso, a aplicação do critério MAC atestou a consistência das formas modais experimentais, garantindo que o fenômeno de atenuação ocorreu de forma controlada e previsível.

Conclui-se que a integração da otimização multiobjetivo com as técnicas de análise modal constitui uma ferramenta robusta para viabilizar a aplicação física de metamateriais mecânicos. Os resultados comprovam o potencial desses dispositivos na proteção de estruturas contínuas esbeltas sujeitas a carregamentos dinâmicos, demonstrando sua viabilidade para futuras implementações em sistemas de engenharia de maior complexidade e escala, a exemplo de torres de aerogeradores.

Destaca-se que a configuração topológica final, obtida pela otimização, atua de forma análoga a um conjunto de Absorvedores Dinâmicos de Vibração (TMDs) sintonizados para uma mesma frequência. O grande diferencial da abordagem por metamateriais reside na distribuição espacial estratégica desses ressonadores ao longo da estrutura contínua, permitindo um acoplamento direto e mais eficiente com a deflexão modal da viga.

6. Agradecimentos

Os autores agradecem à Universidade Federal de Goiás (UFG) pela infraestrutura e apoio institucional. O presente trabalho foi realizado com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG), através da concessão de bolsa de mestrado, suporte fundamental para o desenvolvimento desta investigação

Referências

1. RAO, Singiresu S. *Vibrações Mecânicas*. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

2. DU, Xing; ZHANG, Jialing; ZHAO, Xingyu; LU, Keqiu. Dynamics analysis of rotating cantilever beams with free end mass. *Applied Sciences*, MDPI, v. 12, n. 3, p. 1118, 2022. doi: 10.3390/app12157553.

3. LV, Bao; LI, Shirong; ZHU, X. Q. Moving force-induced vibration of a rotating beam with elastic boundary conditions. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, World Scientific, v. 15, n. 06, p. 1450091, 2015. doi: doi.org/10.1142/s0219455414500357.

4. MACHADO, M. R.; DUTKIEWICZ, M.; COLHERINHAS, G. B. Metamaterial-based vibration control for offshore wind turbines operating under multiple hazard excitation forces. *Renewable Energy*, v. 223, n. C, 2024. doi: 10.1016/j.renene.2024.120056.

5. HUSSEIN, Mahmoud I.; LEAMY, Michael J.; RUZZENE, Massimo. Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook. *Applied Mechanics Reviews*, 2014.

6. LIU, Z.; ZHANG, X.; MAO, Y.; ZHU, Y. Y.; YANG, Z.; CHAN, C. T.; SHENG, P. Locally resonant sonic materials. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 289, n. 5485, p. 1734–1736, 2000.

7. HUANG, H. H.; SUN, C. T.; HUANG, G. L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials. *International Journal of Engineering Science*, Elsevier, v. 47, n. 4, p. 610–617, 2009. doi: 10.1016/j.ijengsci.2008.12.007.

8. LV, Hangyuan et al. Band-gap properties of finite locally resonant beam suspended periodically with two-degree-of-freedom force type resonators. *Crystals*, v. 11, n. 6, p. 716, 2021.

9. SUGINO, Christopher; LEADENHAM, Stephen; RUZZENE, Massimo; ERTURK, Alper. On the mechanism of bandgap formation in locally resonant finite elastic metamaterials. *Journal of Applied Physics*, AIP Publishing, v. 120, n. 13, p. 134501, 2016. doi: 10.1063/1.4963648.

10. EL-BORGI, S.; FERNANDES, R.; RAJENDRAN, P.; YAZBECK, R.; BOYD, J. G.; LAGOUDAS, D. C. Multiple bandgap formation in a locally resonant linear metamaterial beam: Theory and experiments. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 488, p. 115647, 2020.

11. DEB, Kalyanmoy. *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001.

12. YAN, Gengwang; LI, Yingli; HUANG, Xiaodong; YAO, Song; ZHOU, Wenxi. Multi-objective optimization of elastic metaplates for lightweight and ultrawide bandgaps. *International Journal of Mechanical Sciences*, Elsevier, v. 259, p. 108603, 2023.

13. DEB, Kalyanmoy; PRATAP, Amrit; AGARWAL, Sameer; MEYARIVAN, T. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, IEEE, v. 6, n. 2, p. 182–197, 2002.

14. FAN, Lei; HE, Ye; CHEN, Xiao an; ZHAO, Xue. A frequency response function-based optimization for metamaterial beams considering both location and mass distributions of local resonators. *Journal of Applied Physics*, AIP Publishing, v. 130, p. 115101, 2021.

15. EWINS, David John. *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. 2. ed. Baldock, Hertfordshire, England: Research Studies Press Ltd., 2000. ISBN 0863802184.

16. GUILLAUME, Patrick; VERBOVEN, Peter; VANLANDUIT, Steve; AUWERAER, Herman Van der; PEETERS, Bart. A poly-reference implementation of the least-squares complex frequency-domain estimator. In: SOCIETY FOR EXPERIMENTAL MECHANICS. *Proceedings of IMAC-XXI: A Conference on Structural Dynamics*. [S.l.], 2003.