



# Dinâmica Populacional do Pinguim Africano: Modelagem Matemática e Análise de Fatores Extremos

Amanda dos Santos Tavares<sup>1</sup>; Joice Chaves Marques<sup>2</sup>

**Resumo:** Os pinguins africanos *Spheniscus demersus* têm demonstrado um declínio drástico ao longo dos últimos anos, apesar dos esforços de proteção implementados para preservar essa espécie ameaçada. Este estudo examina os modelos propostos por Jackson, Siegfried, e Cooper (1976) e busca aprimorar a função que descreve o fator de declínio populacional dos pinguins africanos. O modelo inicial considerava apenas fatores naturais de mortalidade, como predação e doenças, enquanto o modelo aprimorado incorporava a oferta de peixes como um fator relevante que impacta diretamente na sobrevivência da população. Nossa proposta é integrar eventos diversos, como surtos de doenças e mudanças climáticas, que também alteram significativamente o declínio populacional.

Com base nas simulações realizadas, obtivemos resultados que estão alinhados com a realidade atual, demonstrando que a nova função proposta no modelo aprimorado de Jackson, Siegfried, e Cooper (1976) é eficiente para descrever a dinâmica dessa população. No entanto, é importante ressaltar que as simulações se concentraram apenas na validação da população adulta, o que limita a abrangência dos resultados. Futuros trabalhos devem incluir análises mais detalhadas das diversas fases da vida dos pinguins, a fim de obter uma visão mais completa da dinâmica populacional e das interações entre os diferentes estágios de desenvolvimento.

**Palavras-chave:** modelagem matemática; dinâmica populacional; equações diferenciais; pinguins africanos

---

<sup>1</sup>FURG/abrasil112@gmail.com.

<sup>2</sup>FURG/joicecmarques646@gmail.com.

# 1 INTRODUÇÃO

O Pinguim Africano ou Pinguim-do-Cabo, *Spheniscus demersus*, é da região costeira do sul da África e se reproduz em ilhas ao longo da costa da África do Sul e do sul da Namíbia (Hockey, 2001). Atualmente a espécie está ameaçada de extinção, em 2010 foi classificada como "em perigo" na lista vermelha da IUCN (União Internacional para a Conservação da Natureza). A população dessa ave teve um grande declínio ao longo dos últimos anos, estima-se que no inicio do século XX a população total era entre 1,5 e 3 milhões, em 2020 havia cerca de 41 700 adultos maduros dessa população (SANCCOB, 2022 e IUCN, 2020). Embora haja reforços de proteção no mar e em locais de reprodução desde a década de 1950 a persistência nesse declínio continua.

Há diversos fatores para o declínio dessas aves, como a exploração dos ovos, perturbação das colônias de reprodução, poluição (principalmente o derramamento de óleo no mar), competição de pesca, desenvolvimento de indústrias, predação e doenças (Frost, Siegfried, e Cooper, 1976).

No trabalho de Jackson, Siegfried, e Cooper (1976), os autores apresentaram dois modelos matemáticos para descrever a dinâmica populacional dos pinguins africanos, os modelos se baseiam em um sistema de equações diferenciais onde cada equação representa a evolução da população com o tempo de acordo com a faixa etária, dividida em ovos, filhotes, juvenis e adultos. No modelo básico os autores consideraram a mortalidade apenas por fatores naturais e no modelo aprimorado incluiram a oferta de peixe disponível como um possível fator para o declínio da população.

Nosso objetivo é a partir do modelo aprimorado de Jackson, Siegfried, e Cooper (1976) propor uma função que melhor descreva a dinâmica populacional dessa espécie, considerando eventos diversos, como doenças, eventos climáticos, derramamento de óleo, entre outros possíveis fatores inesperados que contribuem para o declínio.

# 2 METODOLOGIA

A simulação foi realizada no Octave utilizando o método Runge-Kutta de quarta ordem com precisão dupla e passo igual a 0,01.

## 2.1 Dados

Utilizamos dados da população de pinguins africanos da Ilha Dassen localizada na África do Sul. Os dados iniciais são de 1973 conforme tabela 1 de Jackson, Siegfried, e Cooper (1976). A população total foi dividida em quatro fases: ovos ( $P_1$ ), filhotes ( $P_2$ ), juvenis ( $P_3$ ) e adultos ( $P_4$ ).

Segundo os dados do censo de 2021 havia cerca de 1806 pares reprodutores (CapeNature, 2023).

## 2.2 Modelo Matemático

O modelo aprimorado para a dinâmica populacional dos pinguins africanos (*Spheniscus demersus*) proposto por Jackson, Siegfried, e Cooper (1976) é descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = k'_{11}P_4(1 - e^{-d_{11}F})\left(1 - \frac{P_4}{P_{400}}\right) - c_{12}P_1e^{-d_{12}F} - k'_{12}P_1 - k'_{13}P_1 \\ \frac{dP_2}{dt} = k'_{21}P_1 - c_{22}P_2e^{-d_{21}F} - k'_{22}P_2 - k'_{23}P_2 \\ \frac{dP_3}{dt} = k'_{31}P_2 - c_{32}P_3e^{-d_{31}F} - k'_{32}P_3 - k'_{33}P_3 \\ \frac{dP_4}{dt} = k'_{41}P_3 - c_{42}P_4e^{-d_{41}F} - k'_{42}P_4. \end{cases} \quad (1)$$

Sendo  $F = F(t)$  uma função que representa a quantidade de peixes disponíveis,  $c_{ij}$  e  $d_{ij}$  são constantes.

O termo da primeira equação do sistema  $(1 - e^{-d_{11}F})$  refere-se a taxa de natalidade que diminui a medida que  $F$  diminui, o termo  $-c_{12}P_1e^{-d_{12}F}$  indica a perda devido ao abandono de ninhos com a redução de  $F$ .

Os termos  $-c_{ij}P_ie^{-d_{ij}F}$ , ( $i = 2, 3, 4$ ), indicam a taxa de mortalidade por fome. As constantes  $k'_{ij}$  representam a taxa de mortalidade por fatores diferentes da fome.

Os coeficientes  $k'_{ij}$ , exceto  $k'_{11}$ , são constantes.  $k'_{11}$  é uma função periódica que representa a atividade de postura de ovo de acordo com o tempo,  $k'_{ii}$ , ( $i = 2, 3, 4$ ), correspondem a taxa de indivíduos que vieram da fase anterior,  $k'_{ij}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) as taxas de transição entre uma fase e outra.

$$F(t) = 1,1 + 0,9 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \quad (2)$$

Após apresentado o modelo já desenvolvido por esses pesquisadores, nossa proposta, neste trabalho é propor outras funções  $F$  distinta das apresentadas por Jackson, Siegfried, e Cooper (1976). Como foco principal utilizaremos uma função  $F$  que represente as variações climáticas.

Primeiramente utilizaremos a  $F$  como um valor aleatório

$$F(t) = 2\beta \quad (3)$$

sendo  $\beta$ , uma variável que varia no intervalo de 0 à 1.

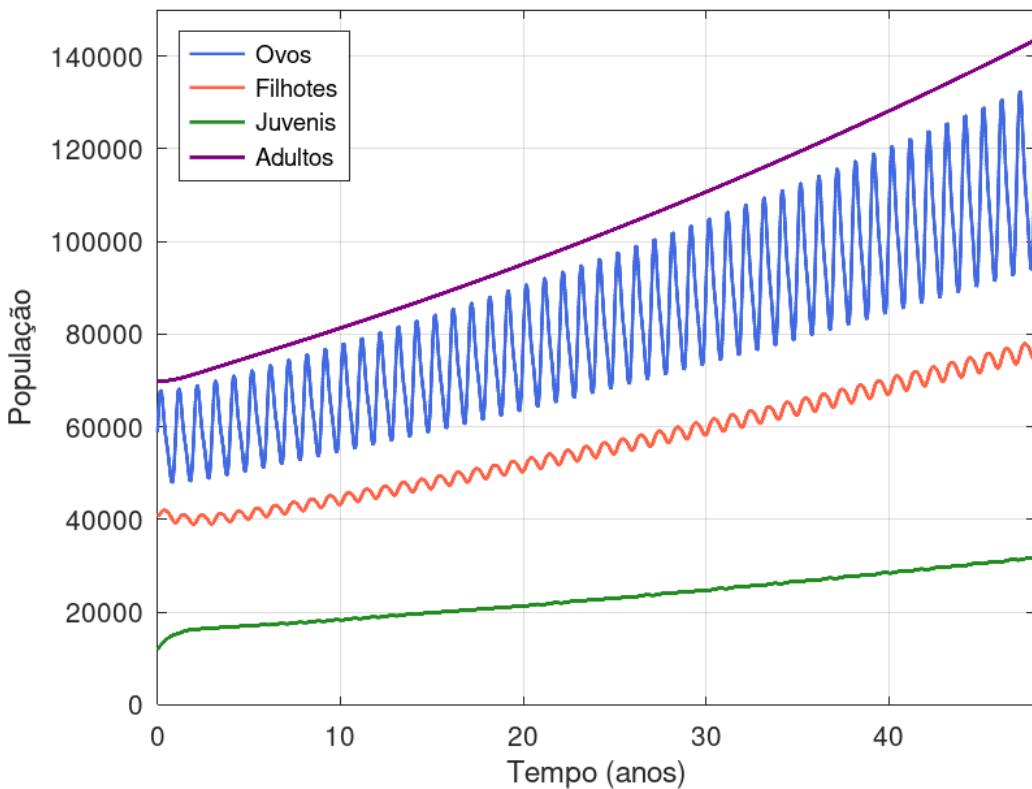
Em seguida, utilizaremos  $F$  mencionada no trabalho de Jackson, Siegfried, e Cooper (1976), somada a um valor aleatório

$$F(t) = 1,1 + 0,9 \cos(\pi t) + 0,2\beta \quad (4)$$

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, apresentaremos os resultados das simulações do modelo 1, começando pela análise das simulações utilizando as funções discutidas anteriormente no artigo (Jackson, Siegfried, e Cooper, 1976). Em seguida, procederemos com a análise das simulações baseadas nas novas funções propostas neste trabalho.

O período de análise é de 48 anos, que corresponde ao intervalo de tempo entre os dados iniciais e os dados mais recentes disponíveis. O modelo aprimorado, com  $F$  constante igual a 2, permite um crescimento populacional em que considera a disponibilidade de peixes constante.



**Figura 1:** Dinâmica temporal do modelo 1 para  $F = 2$ .

Na figura 1 podemos observar um crescimento da população ao longo dos 48 anos, em que há aumento em todos os grupos da população da espécie. Evidencia-se oscilações nas populações dos ovos e filhotes, que representam a variação sazonal característica do ciclo de reprodução da espécie.

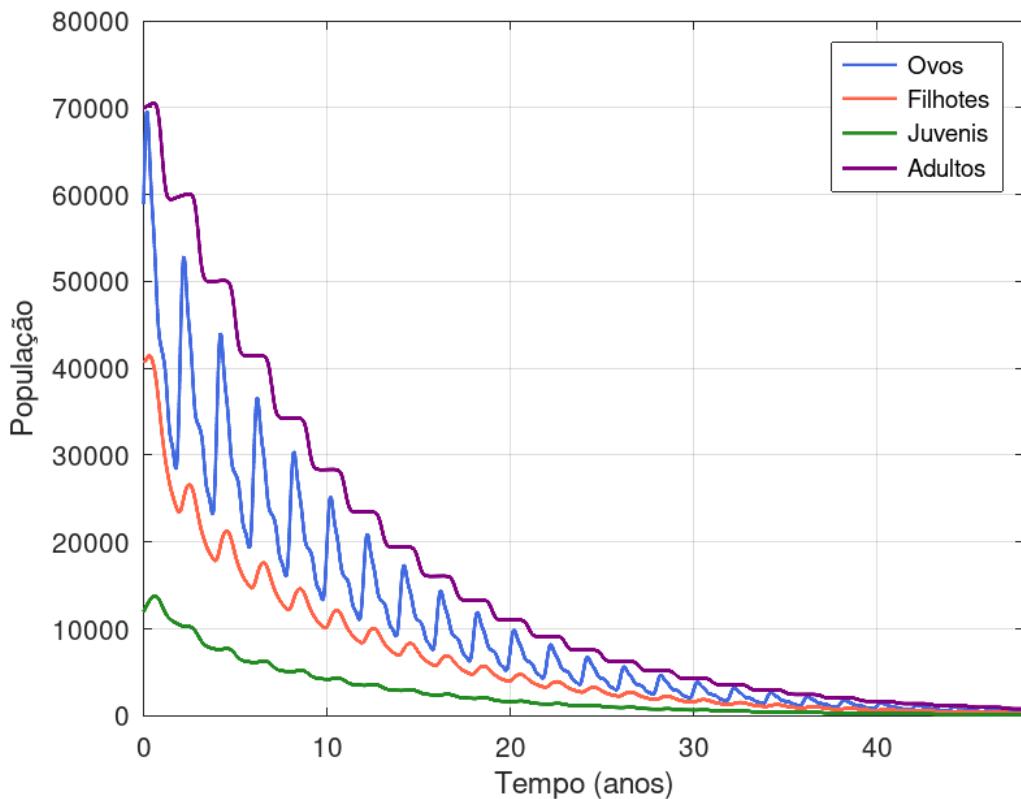
A população dos juvenis apresenta crescimento mais estável, com pequenas oscilações. Já a população adulta apresenta crescimento constante e linear ao longo do período analisado.

**Tabela 1:** Valores utilizados na simulação para cada grupo da população

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
	116 438	74 671	31 683	143 503

Na tabela 1 mostramos os valores utilizados na simulação após os 48 anos, para cada grupo da população, notamos que nesse cenário a espécie está em situação de expansão populacional.

O modelo aprimorado, com  $F$  representada por uma função periódica (2), permite que a dinâmica populacional com a disponibilidade de peixes tenha um ciclo de oferta de dois anos.



**Figura 2:** Dinâmica temporal do modelo 1 ao longo de quarenta e oito anos com  $F$  representado pela função periódica (referenciar a função aqui).

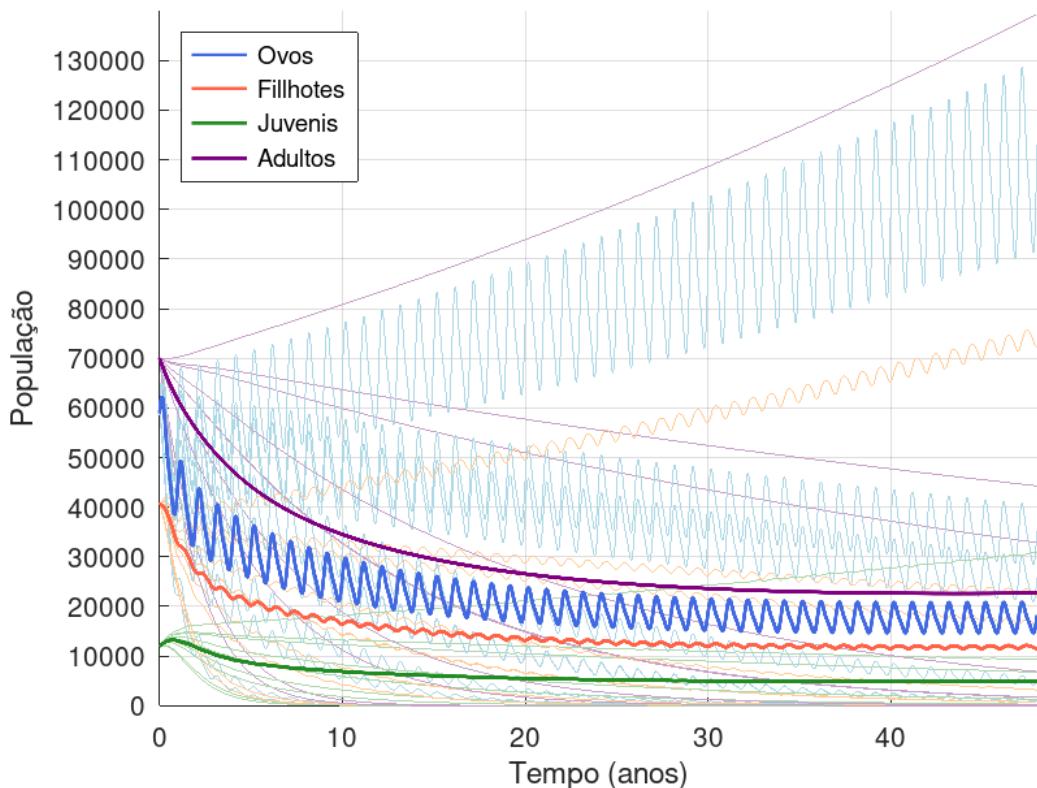
Na figura 2 podemos observar um declínio da população. em todas as faixas etárias ao longo do tempo. Todos os grupos exibem oscilações, indicando que apesar do declínio, a população tem flutuações periódicas. Observa-se que a amplitude dos ciclos diminuem ao longo do tempo.

**Tabela 2:** Valores da simulação para cada grupo da população.

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
568	291	119	791

Na tabela 2 apresentamos os valores da simulação após os 48 anos para cada grupo da população. Notamos que todas as faixas etárias diminuem drasticamente o que sugere que a população esteja caminhando para uma extinção nesse cenário.

O modelo aprimorado com  $F$  igual a uma valor aleatório, permite analisarmos a dinâmica populacional com eventos extremos.



**Figura 3:** Dinâmica temporal do modelo 1 ao longo de quarenta e oito anos para  $F$  igual a um valor aleatório.

Na figura 3 apresentamos 10 simulações, em que, em cada uma delas,  $F$  é um valor entre 0 e 2. As linhas mais espessas de cada faixa etária representam a média das simulações.

Alguns resultados mostram o crescimento de todas as populações, enquanto outras apresentam declínio. Há oscilações presentes, que variam a amplitude entre as simulações.

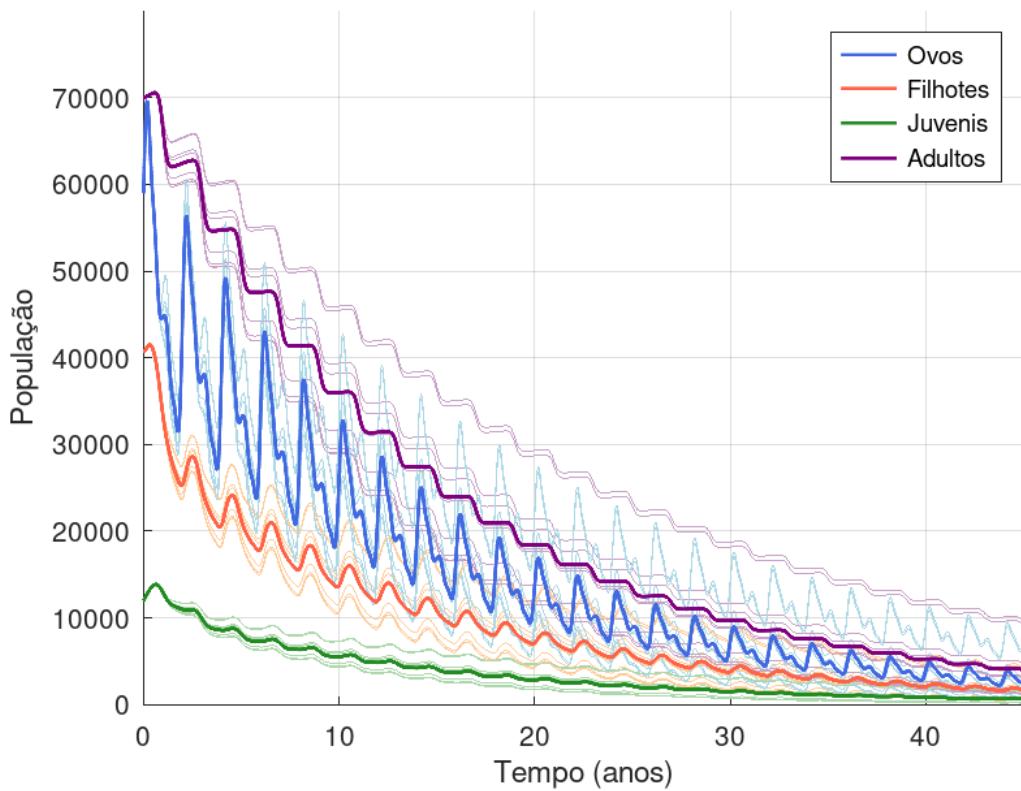
A média das simulações para cada faixa etária apresenta declínio suave após os anos iniciais.

**Tabela 3:** Valores das simulações e da média para cada grupo da população

simulação	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
1	25 879	16 255	6776	32 861
2	1199	751	312	1708
3	1159	726	302	1652
4	35 223	22 177	9264	44 296
5	0	0	0	0
6	69	44	19	110
7	113 102	72 481	30 736	139 380
8	0	0	0	0
9	5	3	1	9
10	5107	3193	1325	6882
média	18 174	11 563	4874	22 690

Na tabela 3 apresentamos os valores de cada simulação e da média após os 48 anos para cada faixa etária da poulação. A grande variação nos resultados das simulações, onde observamos a extinção da espécie em alguns cenários, declínio gradual da população em alguns cenários e crescimento populacional em outros cenários. As médias mostram que os grupos da população está em declínio.

O modelo aprimorado, com  $F$  igual a uma função periódica correspondente a um valor aleatório na equação, permite estudarmos a dinâmica populacional com eventos extremos, que contém ciclos.



**Figura 4:** Dinâmica temporal ao longo de quarenta e oito anos para  $F$  correspondente a um valor aleatório.

Na figura 4 é apresentado 10 resultados de simulações distintas (correspondentes a valores aleatórios diferentes) e a média destas para cada faixa etária da população. Embora haja variação, os resultados apresentam comportamentos parecidos. Todas mostram um declínio populacional ao longo do tempo, com oscilações mais acentuadas no início e uma estabilização após aproximadamente 30 a 40 anos.

**Tabela 4:** Valores das simulações e da média para cada grupo da população.

simulação	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
1	3199	2030	767	4740
2	735	485	183	1171
3	2764	1760	667	4126
4	6784	4225	1607	9666
5	2112	1355	513	3196
6	1113	726	275	1738
7	2034	1306	494	3083
8	729	482	182	1163
9	805	530	200	1278
10	6452	4023	1530	9218
média	2673	1692	642	3938

Na tabela 4 mostramos os valores de cada simulação e da média após os 48 anos para cada faixa etária da poulação. Embora exista uma tendência geral de declínio na população, há uma variabilidade nos valores das simulações.

Os resultados fornecem uma estimativa muito próxima da realidade atual, considerando que os pinguins africanos adultos formam pares, mas não necessariamente todos devem ter par por questões de morte de companheiros, competição por parceiro e idade, com base no censo de 2021 temos aproximadamente 3973 pinguins. Dessa forma, o valor médio final para  $P_4$  (Adultos) está próximo à população real.

## 4 CONCLUSÃO

Os resultados mostram que o modelo proposto por Jackson, Siegfried, e Cooper (1976) é eficaz. Ao incluir um elemento estocástico na função  $F$ , que leva em conta os diversos fatores que afetam os pinguins, é possível representar o declínio da população em diferentes cenários. Tornando os resultados mais próximos dos dados reais.

Com base nas simulações realizadas, obtivemos sucesso em atingir o objetivo, as simulações fornecem uma estimativa muito próxima da realidade atual, indicando que o modelo proposto é eficaz na descrição da dinâmica populacional.

O estudo foi limitado pela validação dos dados com base apenas no valor aproximado da população adulta. Para futuras pesquisas, sugere-se uma análise mais detalhada dos dados ao longo dos anos, abrangendo todas as fases da população, a fim de comparar as curvas reais com as geradas pelo modelo.

## REFERÊNCIAS

- CapeNature (2023). *Penguins International*. URL: <https://www.penguinsinternational.org/dassen-island-colony/>.
- Frost, P., W. Siegfried, e J Cooper (1976). “Conservation of the jackass penguin (*Spheniscus demersus* (L.))” Em: *Biological Conservation* 9.2, pp. 79–99.
- Hockey, P. A. (2001). *The African Penguin: a natural history*. Struik Publishers.
- IUCN (2020). *African Penguin Red List*. URL: <https://www.iucnredlist.org/species/22697810/157423361>.
- Jackson, F., W. Siegfried, e J Cooper (1976). “A simulation model for the population dynamics of the Jackass Penguin”. Em: *Transactions of the Royal Society of South Africa* 42.1, pp. 11–21.
- SANCCOB (2022). *Population Trends*. URL: <https://sanccob.co.za/population-trends/>.