



APLICAÇÃO DO DESIGN CONSTRUTAL E EVOLUÇÃO DIFERENCIAL PARA A OTIMIZAÇÃO DE UMA CAVIDADE CONVECTIVA EM FORMA DE DUPLO Y

Yjanayna B. N. Pereira¹; Liércio A. Isoldi², Luiz A. O. Rocha³, Rafael A. A. C. Gonçalves⁴, Gill V. Gonzales⁵; Elizaldo D. dos Santos⁶

Resumo: Este estudo investiga o uso do algoritmo de evolução diferencial associado ao design construtual para otimizar a geometria de uma cavidade em forma de duplo Y inserida em um sólido com geração interna de calor, visando avaliar a influência de diferentes coeficientes convectivos (λ) sobre a máxima temperatura em excesso adimensional (θ_{max}) e a correspondente geometria ótima. A modelagem física consiste na solução da equação da difusão do calor através do método dos elementos finitos (MEF). Foram avaliados os efeitos de diferentes parâmetros convectivos na faixa entre $0,1 \leq \lambda \leq 100$ sobre a geometria ótima e o desempenho térmico. Neste estudo, apenas os ângulos dos ramos bifurcados inferior (α) e superior (β) foram investigados, considerando $\alpha = \beta$. Para $\lambda = 100$, que representa idealmente um caso de superfície isotérmica, foi obtida uma magnitude de $\theta_{max} = 0,0514$, que representa uma diferença de apenas 0,01% em comparação com um caso de cavidade duplo Y isotérmica estudada anteriormente na literatura. Os resultados mostraram que a configuração geométrica ideal variou com λ , apresentando ângulos ótimos dos ramos bifurcados variando entre 15° e 23° . Os resultados também indicaram que parâmetros como o tamanho da população e o número de gerações foram determinantes na busca pela geometria ótima global. Além disso, para cavidades convectivas com menores valores de $\lambda = 0,1$, houve maior dificuldade na obtenção da geometria ótima global para os graus de liberdade α e β investigados.

Palavras-chave: Cavidades Convectivas, Design Construtural, Evolução Diferencial, Otimização Geométrica, Transferência de Calor.

¹ Mestranda, Universidade Federal do Rio Grande - PPG em Modelagem Computacional, Rio Grande, RS, Brasil, yjanayna@furg.br.

² Doutor, Universidade Federal do Rio Grande - PPG em Modelagem Computacional, Rio Grande, RS, Brasil, liercioisoldi@furg.br.

³ Doutor, Universidade Federal do Rio Grande - PPG em Modelagem Computacional, Rio Grande, RS, Brasil, luizrocha@mecanica.ufgrgs.br.

⁴ Doutor, Universidade Federal do Rio Grande - Escola de Engenharia, Rio Grande, RS, Brasil, rafaelcamagon@gmail.com.

⁵ Doutor, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-Rio-Grandense, Pelotas, RS, Brasil, gillgonzales@ifrsul.edu.br.

⁶ Doutor, Universidade Federal do Rio Grande - PPG em Modelagem Computacional, Rio Grande, RS, Brasil, elizaldosantos@furg.br.

1 INTRODUÇÃO

As tecnologias de resfriamento desempenham um papel crucial na operação eficiente de dispositivos eletrônicos. Devido à contínua miniaturização dos equipamentos, a demanda por soluções avançadas de troca de calor está crescendo, incentivando o uso de dutos ou cavidades para o escoamento de fluidos refrigerantes, facilitando o resfriamento da região com geração de calor (Bejan, 2023). De acordo com Gonzales *et al.* (2023), a aplicação da Teoria Construtal e da Inteligência Computacional oferece uma estratégia válida para otimizar a geometria dessas estruturas e melhorar a eficiência dos sistemas térmicos.

A teoria construtal propõe que a forma e a estrutura do design dos sistemas de fluxo/escoamento de dimensões finitas seguem um princípio físico. Esse princípio é a lei construtal, que afirma que, para um sistema de fluxo/escoamento de tamanho finito sobreviver ao longo do tempo, seu design deve evoluir livremente de forma a facilitar suas correntes internas (Bejan e Lorente, 2008). Essas configurações geométricas são evidentes na natureza, como em árvores, leitos de rios e diversos sistemas de engenharia. O método de aplicação da lei construtal é denominado design construtal e consiste na definição de indicadores de performance, restrições (geométricas e físicas) e graus de liberdade para a variação da geometria. Bejan e Lorente (2008) afirmaram que o design construtal é uma abordagem que define as restrições, o espaço de busca e os indicadores de performance para a avaliação geométrica do problema. Contudo, o design construtal não é um método de otimização. Assim, para a otimização geométrica, é necessário associar uma técnica específica. A maioria dos estudos na literatura adota a busca exaustiva, que serve como referência ao ilustrar o impacto dos graus de liberdade no desempenho. No entanto, seu uso em geometrias complexas exige um alto número de simulações, tornando-se inviável (Gonzales *et al.*, 2023). Consequentemente, métodos meta-heurísticos, como algoritmos genéticos, recocimento simulado e Luus-Jaakola, têm sido explorados em conjunto com o design construtal (Lorenzini *et al.*, 2014; Gonzales *et al.*, 2018; 2021).

A computação evolutiva utiliza princípios da biologia evolutiva para abordar desafios complexos. Estabelecida por Storn e Price (1997), a evolução diferencial é uma técnica de otimização que se baseia na seleção natural e na mutação diferencial para comparar e melhorar soluções em uma população. Essa metodologia tem sido bem-sucedida em áreas de engenharia, como a otimização de trocas térmicas, conforme relatado por Gonzales *et al.* (2023). No estudo de Gonzales *et al.* (2023), foi aplicada a evolução diferencial para otimizar a geometria de uma nova cavidade isotérmica em formato de duplo Y, que representa uma evolução da cavidade em forma de duplo T estudada em Gonzales *et al.* (2021).

O presente trabalho aborda a influência do parâmetro adimensional de transferência de calor por convecção (λ) nas superfícies de uma cavidade térmica convectiva na forma de duplo Y. A condição de contorno convectiva nas paredes dessa geometria não foi estudada anteriormente na literatura. O intuito aqui é explorar a aplicação da associação dos

métodos design construtual e evolução diferencial para diferentes valores de λ , identificando se a mudança na magnitude de λ causa alterações significativas nas geometrias ótimas, bem como se há dificuldades adicionais em encontrar a geometria ótima para diferentes valores de λ . Neste primeiro estudo, é considerada a variação dos ângulos dos ramos bifurcados inferior e superior, mantendo valores iguais para os dois ângulos, ou seja, $\alpha = \beta$. Portanto, pode-se considerar este estudo como a otimização de um grau de liberdade, visto que os ângulos são variados igualmente durante o processo.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA E NUMÉRICA

O domínio a ser analisado e suas dimensões são representados pela Figura 1. A configuração é bidimensional, com a terceira dimensão W perpendicular ao plano da figura. O sólido gerador de calor é isotrópico, com condutividade térmica constante k , e suas superfícies externas são perfeitamente isoladas. Ele gera calor uniformemente à taxa volumétrica $q'''(W/m^3)$. A taxa de calor gerada é removida por transferência de calor por convecção através das paredes da cavidade inserida no domínio sólido. Para isso, assume-se como condição de contorno uma temperatura ambiente (T_∞) e um coeficiente de transferência de calor h constantes em todas as superfícies da cavidade.

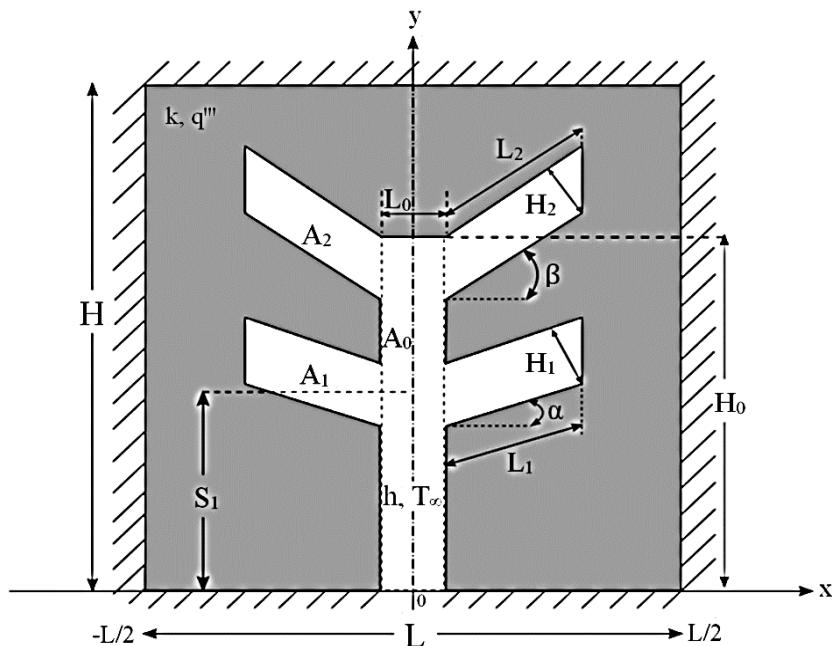


Figura 1 - Domínio computacional da cavidade convectiva em forma de duplo Y.

O objetivo da análise é determinar a configuração geométrica ideal (H_0/L_0 , S_1/H_0 , H_1/L_1 , H_2/L_2 , α e β) que minimize a temperatura máxima em excesso adimensional (θ_{max}). No presente estudo, investiga-se a geometria ótima dos ângulos α e β , assumindo que $\alpha = \beta$. Para a aplicação do método de design construtual, a geometria do sistema apresentada na Figura 1 deve respeitar as restrições de área total do domínio e da cavidade, representadas, respectivamente, por:

$$A = HL \quad (1)$$

$$A_c = H_0 L_0 + 2H_1 L_1 + 2H_2 L_2 \quad (2)$$

A fração da área da cavidade em relação a área total é dada por:

$$\varphi_c = A_c / A \quad (3)$$

É essencial resolver a equação da condução de calor para obter o campo de temperaturas dentro do material sólido. A equação é representada em sua forma adimensional da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{y}^2} + 1 = 0 \quad (4)$$

As variáveis adimensionais são especificadas da seguinte forma:

$$\theta = \frac{T - T_{min}}{q''' \cdot \frac{A}{k}} \quad (5)$$

$$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{H}_0, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{L}_0, \tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \tilde{H}, \tilde{L}, \tilde{S}_1 = \frac{x, y, H_0, H_1, H_2, L_0, L_1, L_2, H, L, S_1}{A^{1/2}} \quad (6)$$

As superfícies externas são isoladas e possuem condições de contorno específicas.

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}} = 0 \text{ em } \tilde{x} = -\frac{\tilde{L}}{2} \text{ ou } \tilde{x} = \frac{\tilde{L}}{2} \text{ e } 0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{H} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}} = 0 \text{ em } \tilde{y} = 0 \text{ e } -\frac{\tilde{L}}{2} \leq \tilde{x} \leq -\frac{\tilde{L}}{2} \text{ ou } \frac{\tilde{L}}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{\tilde{L}}{2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}} = 0 \text{ em } \tilde{y} = \tilde{H} \text{ e } -\frac{\tilde{L}}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{\tilde{L}}{2} \quad (9)$$

As condições de contorno nas superfícies da cavidade resultam do balanço de energia entre as taxas de transferência de calor por condução e convecção, e os valores adimensionais resultantes são expressos por:

$$-\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\lambda^2}{2} \theta \text{ em } 0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{S}_1 - \frac{\tilde{H}_1}{2 \sin(90^\circ - \alpha)} \text{ e } \tilde{x} = -\frac{\tilde{L}_0}{2} \text{ ou } \tilde{x} = \frac{\tilde{L}_0}{2} \quad (10)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\lambda^2}{2} \theta \text{ em } \tilde{S}_1 - \frac{\tilde{H}_1}{2 \sin(90^\circ - \alpha)} \leq \tilde{y} \leq \tilde{L}_1 \sin \alpha + \tilde{S}_1 - \frac{\tilde{H}_1}{2 \sin(90^\circ - \alpha)}$$

$$\text{e } -\frac{\tilde{L}_0}{2} - \tilde{L}_1 \cos \alpha \leq \tilde{x} \leq -\frac{\tilde{L}_0}{2} \text{ ou } \frac{\tilde{L}_0}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{\tilde{L}_0}{2} + \tilde{L}_1 \cos \alpha \quad (11)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\lambda^2}{2} \theta \text{ em } \tilde{x} = -\frac{\tilde{L}_0}{2} - \tilde{L}_1 \cos \alpha \text{ ou } \tilde{x} = \frac{\tilde{L}_0}{2} + \tilde{L}_1 \cos \alpha$$

$$e \tilde{L}_1 \sin \alpha + \tilde{S}_1 - \frac{\tilde{H}_1}{2 \sin(90^\circ - \alpha)} \leq \tilde{y} \leq \tilde{L}_1 \sin \alpha + \tilde{S}_1 + \frac{\tilde{H}_1}{2 \sin(90^\circ - \alpha)} \quad (12)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\lambda^2}{2} \theta \text{ em } -\frac{\tilde{L}_0}{2} - \tilde{L}_1 \cos \alpha \leq \tilde{x} \leq -\frac{\tilde{L}_0}{2} \text{ ou } \frac{\tilde{L}_0}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{\tilde{L}_0}{2} + \tilde{L}_1 \cos \alpha$$

$$e \tilde{S}_1 + \frac{\tilde{H}_1}{2 \sin(90^\circ - \alpha)} \leq \tilde{y} \leq \tilde{L}_1 \sin \alpha + \tilde{S}_1 + \frac{\tilde{H}_1}{2 \sin(90^\circ - \alpha)} \quad (13)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\lambda^2}{2} \theta \text{ em } \tilde{S}_1 + \frac{\tilde{H}_1}{2 \sin(90^\circ - \alpha)} \leq \tilde{y} \leq \tilde{H}_0 - \frac{\tilde{H}_2}{\sin(90^\circ - \beta)}$$

$$e \tilde{x} = -\frac{\tilde{L}_0}{2} \text{ ou } \tilde{x} = \frac{\tilde{L}_0}{2} \quad (14)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\lambda^2}{2} \theta \text{ em } -\frac{\tilde{L}_0}{2} - \tilde{L}_2 \cos \beta \leq \tilde{x} \leq -\frac{\tilde{L}_0}{2} \text{ ou } \frac{\tilde{L}_0}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{\tilde{L}_0}{2} + \tilde{L}_2 \cos \beta$$

$$e \tilde{H}_0 - \frac{\tilde{H}_2}{\sin(90^\circ - \beta)} \leq \tilde{y} \leq \tilde{H}_0 - \frac{\tilde{H}_2}{\sin(90^\circ - \beta)} + \tilde{L}_2 \sin \beta \quad (15)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\lambda^2}{2} \theta \text{ em } \tilde{x} = -\frac{\tilde{L}_0}{2} - \tilde{L}_2 \cos \beta \text{ ou } \tilde{x} = \frac{\tilde{L}_0}{2} + \tilde{L}_2 \cos \beta$$

$$e \tilde{H}_0 - \frac{\tilde{H}_2}{\sin(90^\circ - \beta)} + \tilde{L}_2 \sin \beta \leq \tilde{y} \leq \tilde{H}_0 + \tilde{L}_2 \sin \beta \quad (16)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\lambda^2}{2} \theta \text{ em } \tilde{H}_0 \leq \tilde{y} \leq \tilde{H}_0 + \tilde{L}_2 \sin \beta \text{ e } -\frac{\tilde{L}_0}{2} - \tilde{L}_2 \cos \beta \leq \tilde{x} \leq -\frac{\tilde{L}_0}{2}$$

$$\text{ou } \frac{\tilde{L}_0}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{\tilde{L}_0}{2} + \tilde{L}_2 \cos \beta \quad (17)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\lambda^2}{2} \theta \text{ em } \tilde{y} = \tilde{H}_0 \text{ e } -\frac{\tilde{L}_0}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{\tilde{L}_0}{2} \quad (18)$$

onde n é a coordenada normal à superfície interna da cavidade e o parâmetro adimensional (λ), usado nas Equações (12) a (18), é relacionado ao coeficiente convectivo (h), a condutividade térmica (k) e a área (A), sendo definido como:

$$\lambda = \left(\frac{2hA^{\frac{1}{2}}}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

O parâmetro (λ), que descreve a relação entre a transferência de calor por convecção e condução no sólido, é, na verdade, a raiz do número de Biot (baseado em uma escala de comprimento que é o dobro da raiz da área, A) (Incropera *et al.*, 2008).

A versão adimensional das Equações (1) e (2) é expressa pelas seguintes equações:

$$1 = \tilde{H}\tilde{L} \quad (20)$$

$$\varphi_c = \tilde{H}_0\tilde{L}_0 + 2\tilde{H}_1\tilde{L}_1 + 2\tilde{H}_2\tilde{L}_2 \quad (21)$$

O objetivo é minimizar o máximo excesso de temperatura adimensional representado pela seguinte equação:

$$\theta_{max} = \frac{T_{max} - T_{min}}{q'''\cdot\frac{A}{k}} \quad (22)$$

Para a avaliação geométrica de um grau de liberdade ($\alpha = \beta$) da cavidade convectiva e a determinação de (θ_{max})_m é essencial definir as restrições de área φ_c , φ_1 e φ_2 , que correspondem, respectivamente, à fração de área da cavidade em relação à área total e à fração de área de cada braço da cavidade duplo Y.

2.1 Modelagem Numérica

Neste estudo, analisamos a distribuição de temperaturas no domínio computacional para várias configurações de (H/L , H_0/L_0 , H_1/L_1 , H_2/L_2 , S_1/H_0 , α e β) usando a equação de difusão do calor, Equação (4), para determinar o campo de temperaturas e obter o indicador de performance estabelecido na Equação (22). O objetivo é calcular e minimizar θ_{max} variando a geometria. O método de elementos finitos (MEF) é utilizado para discretização do domínio computacional, implementado no PDE ToolBox do MATLAB (Devloo *et al.*, 2005). A malha é não estruturada e não uniforme em x e y , com elementos triangulares, ajustando-se ao formato da geometria. O tamanho ideal da malha é definido por refinamentos sucessivos que quadruplicam os elementos até que o critério da Equação (23) seja atendido. A convergência ocorre quando a variação máxima de θ_{max} entre malhas é menor que 0,1%. Os resultados da independência de malha encontram-se na Tabela 1, onde (i) e ($i+1$) denotam os respectivos valores de θ_{max} para a malha atual e a seguinte.

$$\left| \frac{(\tilde{\theta}_{max}^i - \tilde{\theta}_{max}^{i+1})}{\tilde{\theta}_{max}^i} \right| < 1 \times 10^{-4} \quad (23)$$

Os testes indicaram que uma malha de cerca de 27.112 elementos é suficiente, com desvio relativo abaixo de 0,1% em comparação a uma malha mais densa. Os testes de malha foram realizados para a cavidade Duplo-Y com os seguintes parâmetros: $\varphi_c = 0,1$; $\varphi_1 = 0,015$; $\varphi_2 = 0,015$; $H/L = 1$; $H_0/L_0 = 6$; $S_1/H_0 = 0,5$; $H_1/L_1 = 0,4$; $H_2/L_2 = 0,4$; $\alpha = \beta = 54^\circ$; $\lambda = 1.0$. Importante também ressaltar que o modelo numérico foi previamente utilizado e validado por Gonzales *et al.* (2023), sendo aqui repetido o mesmo procedimento.

Tabela 1 - Análise de qualidade de malha para $\varphi_c = 0,1$; $\varphi_1 = 0,015$; $\varphi_2 = 0,015$; $H/L = 1$; $H_0/L_0 = 6$; $S_1/H_0 = 0,5$; $H_1/L_1 = 0,4$; $H_2/L_2 = 0,4$; $\alpha = \beta = 54^\circ$; $\lambda = 1$.

Malha	Número de Elementos	θ_{max}^i	$ (\theta_{max}^i - \theta_{max}^{i+1})/\theta_{max}^i $
1	1.279	0,935498	$7,3481 \times 10^{-4}$
2	6.208	0,936186	$2,1185 \times 10^{-4}$
3	14.672	0,936384	$1,9031 \times 10^{-4}$
4	27.112(Malha independente)	0,936562	$6,9776 \times 10^{-5}$
5	43.221	0,936628	$3,7938 \times 10^{-5}$
6	62.915	0,936663	-----

Para validar o modelo numérico, os resultados obtidos foram comparados com os resultados numéricos de Estrada (2016), Lorenzini *et al.* (2011) e Biserni *et al.* (2004), vide Tabela 2. Um valor de $\lambda = 100$ foi adotado para obter um comportamento térmico na cavidade semelhante ao alcançado para o caso isotérmico. A geometria utilizada para essa verificação é uma cavidade em forma de T. Assim, a cavidade na forma de duplo Y foi degenerada para esta configuração. O presente trabalho demonstra excelente concordância com estudos anteriores, onde a comparação com Biserni *et al.* (2004) revela uma variação de 1,59%, esta variação é considerada aceitável, reforçando a confiabilidade do método atual.

Tabela 2 - Comparaçao dos resultados obtidos com o presente código para uma cavidade em duplo Y com configurações ($\psi = 0,5$; $\varphi_c = 0,1$; $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = 0,02$; $H/L = 1$; $H_0/L_0 = 6,6$; $S_1/H_0 = 0,5$; $H_1/L_1 = 0$; $H_2/L_2 = 0,18$; $\alpha = \beta = 0$; $\lambda = 100$) com resultados da literatura.

Pesquisa	θ_{max}
Presente Trabalho	0,0767
Estrada (2016)	0,0767
Lorenzini <i>et al.</i> (2014)	0,0762
Lorenzini <i>et al.</i> (2011)	0,0762
Biserni; Rocha; Bejan (2004)	0,0755

3 APLICAÇÃO DO ALGORITMO DE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL NA OTIMIZAÇÃO DE UM GRAU DE LIBERDADE

Com o objetivo de avaliar o desempenho térmico em relação à influência angular dos braços da geometria em forma de duplo Y, foi executada uma análise focada nos ângulos α e β , como um único grau de liberdade, estabelecendo-se valores idênticos para eles, mantendo constantes as proporções geométricas ($H/L = 1$, $H_0/L_0 = 10$, $H_1/L_1 = H_2/L_2 = 0,07$ e $S_1/H_0 = 0,5$). As restrições de área da cavidade foram fixadas em $\varphi_c = 0,1$, $\varphi_1 = 0,015$ e $\varphi_2 = 0,015$, considerando diferentes valores de $\lambda = 0,1$; $1,0$; 10 ; 100 , buscando o máximo excesso de temperatura adimensional mínimo (θ_{max})_m para os valores ótimos de α e β . O parâmetro adimensional λ foi definido com base em trabalhos da literatura como o estudo de (Bejan e Almogbel 2000).

O algoritmo de Evolução Diferencial, proposto por Storn e Price (1997) é eficiente para otimização em espaços contínuos de funções não lineares e não diferenciáveis. Baseado na teoria da evolução das espécies, utiliza uma população que evolui durante as iterações em busca da solução ótima, despertando interesse em diversos domínios de pesquisa. Segundo Fan *et al.* (2023), o método é uma abordagem gulosa e estocástica para resolver problemas de otimização, demonstrando eficácia mesmo com uma população pequena, funções descontínuas, multimodais e não lineares, devido à sua simplicidade, rápida convergência e precisão.

O método requer a definição de parâmetros, incluindo Tamanho da População (NP), Taxa de Cruzamento (CR), Operador de Mutação (M), Fator de Amplificação (F) e Número de Gerações (NG). Durante cada geração, ele utiliza o Tamanho de População de vetores para representar a população. O algoritmo tem diversas variações distintas principalmente nas operações de mutação e cruzamento, classificadas com a nomenclatura $x/y/z$ proposta por Storn e Price (1997). Ele busca otimizar a solução, garantindo a evolução controlada da população para maximizar a probabilidade de encontrar a melhor solução. O procedimento de Evolução Diferencial é apresentado na Quadro 1 em sua forma canônica, detalhando cada etapa do processo.

Quadro 1 - Algoritmo de Evolução Diferencial.

-
- 1 Gerar uma população inicial aleatória com NP indivíduos. Atribuir $G = 1$.
 - 2 Calcular a FO para todos os indivíduos da população.
 - 3 Atribuir $i = 0$.
 - 4 Escolher três indivíduos aleatórios ($x_{r1,G}$; $x_{r2,G}$ e $x_{r3,G}$), sendo $r1$, $r2$ e $r3 \neq i$.
 - 5 Aplicar o operador de mutação utilizando o fator de amplificação F:
$$v_{i,G+1} = x_{r1,G} + F(x_{r2,G} - x_{r3,G}) \quad i = 1, 2, \dots, NP$$
 - 6 Criar o indivíduo candidato ($u_{i,G+1}$) aplicando o operador de cruzamento entre x_i e $v_{i,G+1}$.
 - 7 Avaliar o candidato através da FO. Se $FO(u_{i,G+1}) < FO(x_i)$:
 - 8 **então:** $x_{i+1} = u_{i,G+1}$
 - 9 **senão:** $x_{i+1} = x_i$
 - 10 Fazer $i = i + 1$;
 - 11 Voltar ao passo 4 enquanto $i \leq NP$.
 - 12 Fazer $G = G + 1$;
 - 13 Voltar ao passo 3 enquanto $G <$ número máximo de gerações NG (definido a *priori*). Se maior, interromper o algoritmo*.

(*É possível definir critérios alternativos para interromper o algoritmo antes de atingir o número máximo de gerações, como a convergência da população ou a melhoria mínima na FO)

O algoritmo de Evolução Diferencial foi ajustado para lidar com o problema da cavidade em formato de duplo Y utilizando os parâmetros com melhor desempenho da pesquisa de Gonzales *et al.* (2023): CR = 0,9, F = 1 e M = (rand/1/bin). Foram investigadas sete variações do algoritmo, resultantes das diferentes combinações de Tamanho da População e Número de Gerações. A seleção considerou a complexidade do sistema, representada por λ . As distintas versões do algoritmo estão listadas na Tabela 4.

Tabela 3 - Versões do algoritmo ED e suas respectivas configurações de parâmetros.

Algoritmo	Tamanho da População	Número de Gerações	Total de Interações
ED_P5_G10	5	10	50
ED_P6_G10	6	10	60
ED_P7_G11	7	11	77
ED_P8_G12	8	12	96
ED_P9_G13	9	13	117
ED_P10_G15	10	15	150
ED_P11_G15	11	15	165

4 RESULTADOS

Inicialmente, é analisada a variação do campo de temperatura em função do grau de liberdade α e β com o objetivo de encontrar o valor ótimo para θ_{max} , tratando-os como um único grau de liberdade, ou seja, $\alpha = \beta$, mantendo fixa a restrição de área $\varphi_c = 0,1$ e as demais razões ($H/L = 1$, $H_0/L_0 = 10$, $H_1/L_1 = H_2/L_2 = 0,07$ e $S_1/H_0 = 0,5$). O processo é repetido para cada valor de $\lambda = 0,1; 1; 10; 100$, onde $\lambda = 0,1$ é o menor valor com significado físico indicado na literatura Bejan e Almogbel (2000) e $\lambda = 100$ é uma condição semelhante à encontrada nas cavidades isotérmicas. Foram realizadas trinta execuções de cada versão do algoritmo para encontrar o melhor resultado global, revelando desempenhos diversos de acordo com as diferentes configurações dos parâmetros. A Figura 2 representa a porcentagem de sucesso na obtenção do ótimo global por algoritmo, dessas execuções.

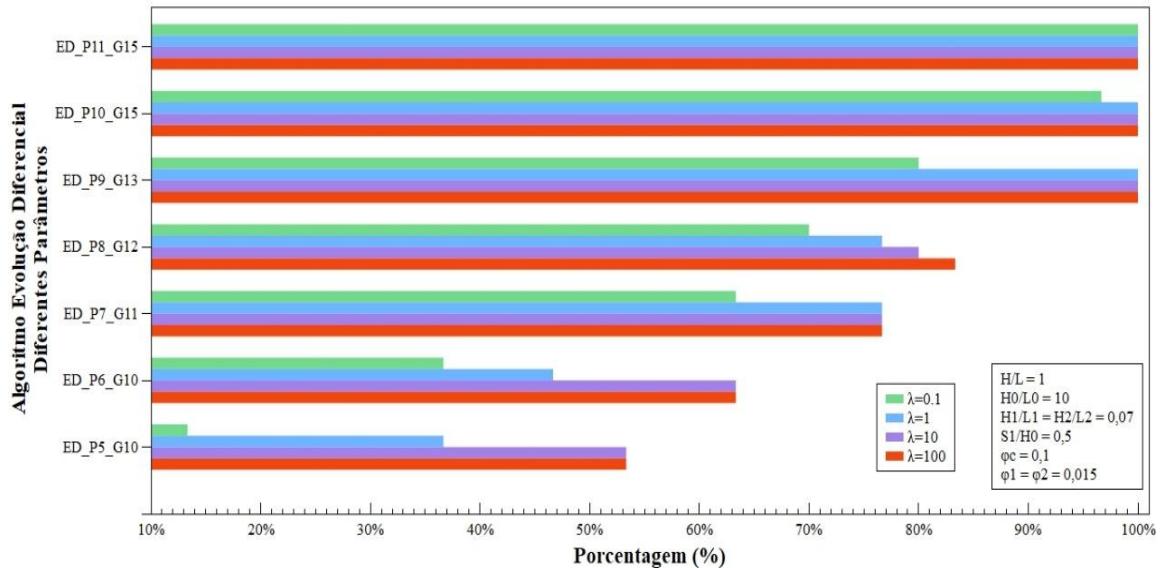


Figura 2 - Porcentagem de sucesso na obtenção do ótimo global por algoritmo.

É possível observar na Figura 2 que o algoritmo ED_P5_G10, considerado eficaz para otimização de um grau de liberdade por Gonzales *et al.* (2023), não se mostrou o mais indicado para o presente trabalho, uma vez que para todos λ obteve-se uma eficiência inferior a 70%. Por outro lado, os algoritmos ED_P10_G15 e ED_P11_G15 demonstraram um desempenho superior para todos λ , alcançando eficiência máxima. O algoritmo

ED_P7_G11 apresentou um desempenho significativo de mais de 50% para todos λ , com menor carga computacional. A principal dificuldade em encontrar o ótimo global nas várias iterações está relacionada ao fato de que a diferença de desempenho térmico entre os diferentes ângulos não é tão significativa. Isso contrasta com situações em que os valores de λ são maiores, onde a variação de desempenho é mais evidente. As métricas estatísticas desses resultados são apresentadas na Tabela 3 **Erro! Fonte de referência não encontrada..**

Tabela 4 - Métricas estatísticas para diferentes versões do Evolução Diferencial.

Algoritmo	λ	Porcentagem em encontrar o ótimo	Média de $(\theta_{max})_m$	Desvio Padrão (σ)	Máximo $(\theta_{max})_m$	Mínimo $(\theta_{max})_{min}$
ED_P5_G10	0,1	13,33%	35,9708	$7,99 \times 10^{-2}$	$3,64 \times 10^1$	$3,59 \times 10^1$
	1	36,66%	0,4830	$2,30 \times 10^{-2}$	$5,85 \times 10^{-1}$	$4,72 \times 10^{-1}$
	10	53,33%	0,0581	$3,38 \times 10^{-3}$	$7,18 \times 10^{-2}$	$5,63 \times 10^{-2}$
	100	53,33%	0,0528	$3,11 \times 10^{-3}$	$6,63 \times 10^{-2}$	$5,14 \times 10^{-2}$
ED_P6_G10	0,1	36,66%	35,9489	$1,22 \times 10^{-2}$	$3,60 \times 10^1$	$3,59 \times 10^1$
	1	46,66%	0,4747	$4,27 \times 10^{-3}$	$4,91 \times 10^{-1}$	$4,72 \times 10^{-1}$
	10	63,33%	0,0573	$1,99 \times 10^{-3}$	$6,47 \times 10^{-2}$	$5,63 \times 10^{-2}$
	100	63,33%	0,0522	$1,89 \times 10^{-3}$	$5,96 \times 10^{-2}$	$5,14 \times 10^{-2}$
ED_P7_G11	0,1	63,33%	35,9443	$7,98 \times 10^{-3}$	$3,60 \times 10^1$	$3,59 \times 10^1$
	1	76,66%	0,4744	$7,19 \times 10^{-3}$	$5,09 \times 10^{-1}$	$4,72 \times 10^{-1}$
	10	76,66%	0,0566	$8,03 \times 10^{-4}$	$6,05 \times 10^{-2}$	$5,63 \times 10^{-2}$
	100	76,66%	0,0517	$7,93 \times 10^{-4}$	$5,56 \times 10^{-2}$	$5,14 \times 10^{-2}$
ED_P8_G12	0,1	70%	35,9411	$3,74 \times 10^{-3}$	$3,60 \times 10^1$	$3,59 \times 10^1$
	1	76,66%	0,4726	$1,91 \times 10^{-3}$	$4,81 \times 10^{-1}$	$4,72 \times 10^{-1}$
	10	80%	0,0567	$8,49 \times 10^{-4}$	$5,99 \times 10^{-2}$	$5,63 \times 10^{-2}$
	100	83,33%	0,0515	$3,79 \times 10^{-4}$	$5,31 \times 10^{-2}$	$5,14 \times 10^{-2}$
ED_P9_G13	0,1	80%	35,9405	$2,44 \times 10^{-3}$	$3,60 \times 10^1$	$3,59 \times 10^1$
	1	100%	0,4718	0,00	$4,72 \times 10^{-1}$	$4,72 \times 10^{-1}$
	10	100%	0,0563	0,00	$5,63 \times 10^{-2}$	$5,63 \times 10^{-2}$
	100	100%	0,0514	0,00	$5,14 \times 10^{-2}$	$5,14 \times 10^{-2}$
ED_P10_G15	0,1	96,66%	35,9398	$2,40 \times 10^{-4}$	$3,59 \times 10^1$	$3,59 \times 10^1$
	1	100%	0,4719	$3,64 \times 10^{-4}$	$4,74 \times 10^{-1}$	$4,72 \times 10^{-1}$
	10	100%	0,0564	$2,50 \times 10^{-4}$	$5,75 \times 10^{-2}$	$5,63 \times 10^{-2}$
	100	100%	0,0514	$3,81 \times 10^{-5}$	$5,16 \times 10^{-2}$	$5,14 \times 10^{-2}$
ED_P11_G15	0,1	100%	35,9398	0,00	$3,59 \times 10^1$	$3,59 \times 10^1$
	1	100%	0,4718	0,00	$4,72 \times 10^{-1}$	$4,72 \times 10^{-1}$
	10	100%	0,0563	0,00	$5,63 \times 10^{-2}$	$5,63 \times 10^{-2}$
	100	100%	0,0514	0,00	$5,14 \times 10^{-2}$	$5,14 \times 10^{-2}$

A Tabela 5 apresenta uma análise comparativa das diferentes versões do algoritmo para diferentes parâmetros convectivos. Foi observado que, para o algoritmo ED_P5_G10, ao definir $\lambda=0,1$, a taxa de sucesso na identificação da solução é de 13,33%. Para λ igual a 100, essa taxa atinge 53,33%. Já para os algoritmos ED_N9_G13 e ED_N11_G15, valores menores de λ resultam em 100% de eficácia, evidenciando que valores reduzidos de λ aumentam a dificuldade em se encontrar a configuração ótima

global, impactando a capacidade do algoritmo de explorar soluções de maneira eficaz, independentemente do incremento das gerações ou da população. Contrariamente, para valores maiores de λ , o algoritmo demonstra uma convergência mais rápida, mesmo com configurações menores nos parâmetros Número de População e Número de Geração. Essa investigação é bastante importante no âmbito do design construtal, pois um dos propósitos do método é compreender a influência dos graus de liberdade sobre o comportamento do sistema de fluxo/escoamento. Para problemas com muitos graus de liberdade é necessário lançar mão do uso de técnicas de otimização que sejam confiáveis na busca do ótimo global, evitando a representação não física dos efeitos dos graus de liberdade sobre o indicador de performance.

A Figura 3 **Erro! Fonte de referência não encontrada.** ilustra a influência dos ângulos α e β na geometria da cavidade convectiva duplo Y para o parâmetro $\lambda = 0,1$. Os resultados obtidos nas trinta execuções do algoritmo ED_P7_G11 revelam diversas geometrias. Figura 3 (a) apresenta a geometria válida correspondente ao menor valor de $\alpha = \beta = -39^\circ$, enquanto a Figura 3 **Erro! Fonte de referência não encontrada.**(c) mostra a geometria válida do maior valor, com $\alpha = \beta = 52^\circ$. A geometria ótima é evidenciada na Figura 3 (b), onde $(\alpha)_o = (\beta)_o = 22^\circ$, resultando em uma máxima temperatura em excesso

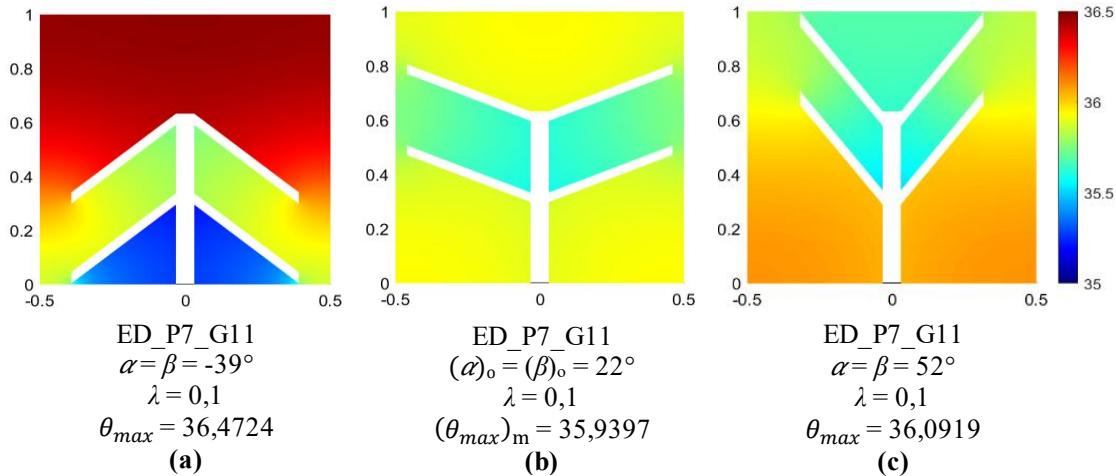


Figura 3 - Comparação entre geometrias não otimizadas e uma vez otimizada para $\lambda = 0,1$

adimensional minimizada, $(\theta_{max})_m = 35,9397$.

As Figura 4 a 6 ilustram as geometrias correspondentes aos diferentes valores do parâmetro λ (1; 10 e 100) analisados nesta pesquisa. Para $\lambda=1$, A Figura 4(a), é exibida uma geometria válida que representa o menor valor, com α e β iguais a -39° no espaço de busca. A Figura 4(c) mostra a geometria válida do maior valor, onde α e β é igual a 52° . Por fim, a Figura 4(b) revela a geometria ótima obtida, com $(\alpha)_o = (\beta)_o = 23^\circ$, resultando em uma máxima temperatura em excesso adimensional minimizada, $(\theta_{max})_m = 0,4718$. Para $\lambda = 10$, a Figura 5(a) apresenta a geometria válida do menor valor, com α e β iguais a -39° no espaço de busca. A Figura 5(c) exibe a geometria válida do maior valor, com α e β iguais a 52° . A Figura 5(b) mostra a geometria ótima obtida, com $(\alpha)_o = (\beta)_o = 15^\circ$, e a máxima temperatura em excesso adimensional minimizada, $(\theta_{max})_m = 0,05632$. Por fim,

para $\lambda = 100$, a Figura 6(a) mostra a geometria válida do menor valor, com α e β iguais a -39° no espaço de busca. A Figura 6(c) apresenta a geometria válida do maior valor, onde α e β são iguais a 52° . A Figura 6(b) revela a geometria ótima obtida, com $(\alpha)_o = (\beta)_o =$

15° , resultando em uma máxima temperatura em excesso adimensional minimizada, $(\theta_{max})_m = 0,05142$.

Observa-se que a distribuição eficiente da geometria aloca as imperfeições do sistema

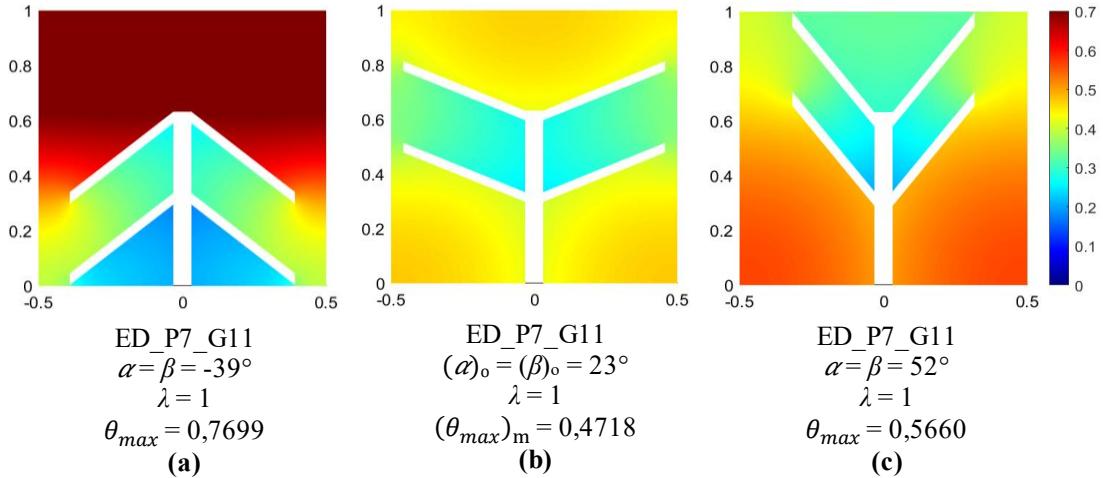


Figura 6 - Comparação entre geometrias não otimizadas e uma vez otimizada para $\lambda = 1$.

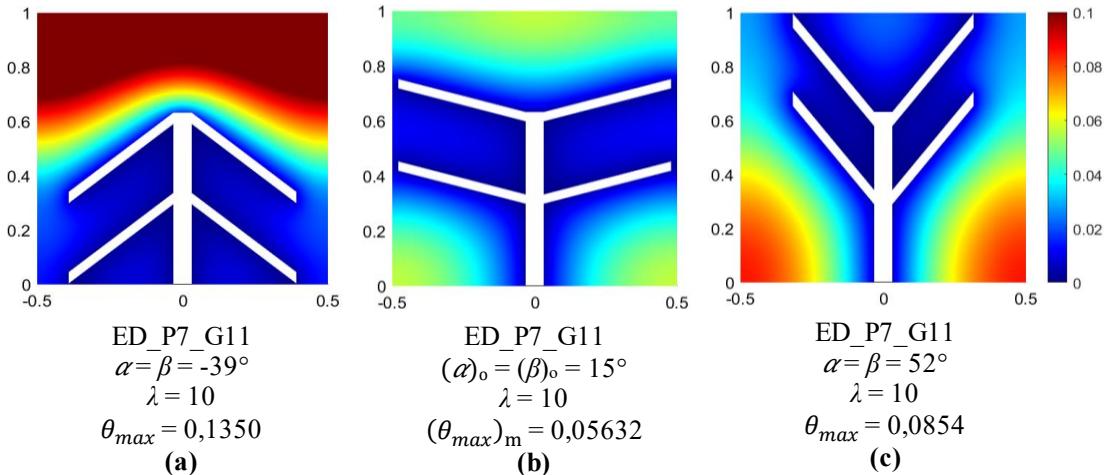


Figura 5- Comparação entre geometrias não otimizadas e uma vez otimizada para $\lambda = 10$.

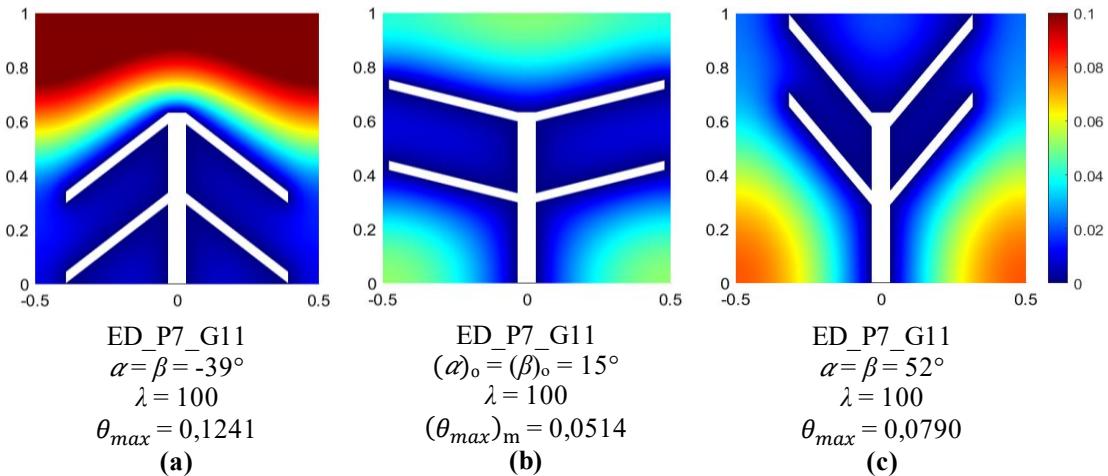


Figura 4 - Comparação entre geometrias não otimizadas e uma vez otimizada para $\lambda = 100$ seguindo o princípio da ótima distribuição das imperfeições (Bejan e Lorente, 2018). As

temperaturas máximas se concentram em três regiões distintas para as configurações ótimas, independentemente do valor de λ investigado, conforme observado nas Figuras. 3(b) – 6(b). Para o extremo inferior de $\alpha = \beta$, Figuras. 3(a) – 6(a), os pontos quentes são limitados a região superior do domínio sólido. Para a razão extrema superior de $\alpha = \beta$, Figuras. 3(c) – 6(c), percebe-se dois pontos de maior magnitude do campo de temperaturas localizado nos cantos inferiores do sólido. Os resultados demonstraram também que os ângulos ótimos variaram de $\alpha = \beta = 22^\circ$ para $\lambda = 0,1$, para $\alpha = \beta = 15^\circ$ quando $\lambda = 0,1$, demonstrando que a magnitude de λ possui influência sobre o design das cavidades, mesmo sendo avaliado apenas um grau de liberdade.

5 CONCLUSÕES

Esta pesquisa teve como foco a otimização da cavidade convectiva na forma de duplo Y empregando uma associação entre o design construtal e o algoritmo de evolução diferencial para diferentes parâmetros de convecção (λ). Mais precisamente, são investigadas as geometrias ótimas da cavidade considerando a variação dos ângulos $\alpha = \beta$ e testando diferentes parâmetros do algoritmo de evolução diferencial, especialmente o tamanho da população e o número de gerações, sobre o sucesso na obtenção das configurações ótimas globais.

Os resultados destacaram o papel crítico da escolha de ângulos α e β apropriados, bem como a influência do parâmetro convectivo λ , na obtenção da máxima eficiência na distribuição de temperatura. A avaliação do algoritmo evolutivo mostrou que configurações específicas, como ED_P10_G15 e ED_P11_NG15, demonstraram desempenho superior, enquanto ED_P7_G11 equilibrou um desempenho significativo com menor carga computacional. A análise estatística revelou uma dificuldade maior na otimização global para menores magnitudes de λ , provavelmente devido a menor sensibilidade que o grau de liberdade investigado possui sobre o desempenho térmico do sistema. Os resultados também demonstraram que, com o uso adequado dos parâmetros, o algoritmo de evolução diferencial pode ser usado para buscar as geometrias globais ótimas, podendo ser extrapolado para a análise de níveis mais elevados de graus de liberdade com esforço computacional sensivelmente inferior ao requerido com o uso exclusivo do mecanismo de busca exaustiva.

Para futuros trabalhos, o design construtal associado ao algoritmo de evolução diferencial será empregado na otimização da cavidade duplo Y com dois a cinco graus de liberdade para os diferentes parâmetros convectivos, investigando a influência da convecção na cavidade sobre o design da cavidade estudada.

AGRADECIMENTOS

Yjanayna B. N. Pereira agradece à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) pela bolsa de mestrado (Código de Financiamento 001).

Os autores Liércio A. Isoldi, Luiz A. O. Rocha, e Elizaldo D. dos Santos agradecem ao CNPq pela bolsa de produtividade em pesquisa (Processos: 309648/2021-1, 307791/2019-0, 308396/2021-9).

REFERÊNCIAS

- Bejan, A. (2023). “Constructal design evolution versus topology optimization”. EM: International Communications in Heat and Mass Transfer. v. 141, n. 106567, p. 10.1016. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2022.106567>.
- Bejan, A.; Almogbel, M (2000). Constructal T-shaped fins. International Journal of Heat and Mass Transfer, v. 43, n. 12, p. 2101–2115. [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(99\)00283-5](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(99)00283-5)
- Bejan, A.; Lorente, S. (2008). “Design with constructal theory”. John Wiley & Sons.
- Biserni, C.; Rocha, L. A. O.; Bejan, A. (2004). “Inverted fins: geometric optimization of the intrusion into a conducting wall”. Em: *International Journal of Heat and Mass Transfer*. v. 47, n. 12–13, p. 2577–2586. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2003.12.018>.
- Devloo, P. R. B.; Forti, T.; Gomes, S. M. (2005). “Métodos de Elementos Finitos Contínuo e Descontínuo Combinados Aplicado a Problemas de Convecção-Difusão”. Em: *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. v. XX, n. YY, p. ZZ-ZZ.
- Estrada, E. S. D. (2016). “Otimização geométrica de cavidades e caminhos de alta condutividade empregando Design Construtal e algoritmos genéticos”. *Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica*, Escola de Engenharia UFRGS.
- Fan, M.; Chen, J.; Xie, Z.; Ouyang, H.; Li, S.; Gao, L. (2022). “Improved multi-objective differential evolution algorithm based on a decomposition strategy for multi-objective optimization problems”. Em: *Scientific Reports*. v. 12, n. 1, p. 21176-21176. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-25440-7>
- Gonzales, G.V.; Biserni, C.; da Silva Diaz Estrada, E.; Platt, G.M.; Isoldi, L.A.; Rocha, L.A.O.; da Silva Neto, A.J.; dos Santos, E.D (2023). “Investigation on the association of differential evolution and constructal design for geometric optimization of double Y-shaped cooling cavities inserted into walls with heat generation”. Em: *Applied Sciences*, v. 13, n. 3, p. 1998, 2023, <https://doi.org/10.3390/app13031998>.
- Gonzales, G. V.; dos Santos, E. D.; Neto, A. J. S. (2018). “Uma comparação entre os algoritmos de evolução diferencial e recozimento simulado associados ao design construtal para a otimização geométrica de uma cavidade em forma de duplo-t”. Em: *Revista Mundial Engenharia, Tecnologia e Gestão*. ISSN: 2525-4782, v. 3, n. 2, <https://doi.org/10.21575/25254782rmetg2018vol3n2573>.
- Gonzales, G. V.; dos Santos, E. D.; Isoldi, L. A.; Rocha, L. A. O.; da Silva Neto, A. J.; Telles, W. R. (2016). “Constructal Design of Double-T Shaped Cavity with Stochastic Methods Luus-Jaakola and Simulated Annealing”. Em: *Transfer Phenomena in Fluid and Heat Flows*. v. 370, p. 152. DOI:10.4028/www.scientific.net/DDF.370.152.

Gonzales, G. V.; Lorenzini, G.; Isoldi, L. A.; Rocha, L. A. O.; dos Santos, E. D.; Neto, A. J. S.(2021). “Constructal Design and Simulated Annealing applied to the geometric optimization of an isothermal Double T-shaped cavity”. Em: *International Journal of Heat and Mass Transfer*. vol. 174, Art. no. 121268, 2021. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.121268>.

Incropera, F. P.; Dewitt, D. P., Bergman, T. L., Lavine, A. S. (2008). “Fundamentos de Transferência de Calor e Massa”, 6^a Ed., Editora LTC, 2008.

Lorenzini, G.; Biserni, C.; Estrada, E. D.; Isoldi, L. A.; Dos Santos, E. D.; Rocha, L. A. O. (2014). “Constructal design of convective Y-shaped cavities by means of genetic algorithm”. Em: *Journal of Heat Transfer*. v. 136, n. 7, p. 071702 <https://doi.org/10.1115/1.4027195>.

Lorenzini, G.; Biserni, C.; Isoldi, L. A.; dos Santos, E. D.; Rocha, L. A. O. (2011). “Constructal Design Applied to the Geometric Optimization of Y-shaped Cavities Embedded in a Conducting Medium”. Em: *Journal of Electronic Packaging*. v. 133, p. 041008/1-041008/8, 2011. <https://doi.org/10.1115/1.4005296>.

Storn, R.; Price, K. (1997). “Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous Spaces”. Em: *Journal of global optimization*. v. 11, p. 341-359, DOI:10.1023/A:1008202821328.