



Obtenção da função de Green para equações diferenciais ordinárias

Pedro Henrique Cardoso Gomes^{1*}; Eduardo da Silva Schneider¹

Resumo: Neste trabalho, abordamos a solução de problemas que envolvem certas classes específicas de operadores diferenciais lineares aplicados a equações diferenciais ordinárias (EDOs). O objetivo central é determinar um operador integral inverso que possa resolver essas equações de maneira direta. Mais detalhadamente, focamos na resolução de problemas de valor inicial (PVIs) e problemas de valor de contorno (PVCs) por meio da determinação da função de Green correspondente a cada problema. Começamos nossa análise com problemas de valor inicial de segunda ordem, desenvolvendo um método para encontrar a função de Green com base nas soluções da equação homogênea associada e em uma solução particular obtida via o método da variação de parâmetros. Em seguida, estendemos esse procedimento para equações diferenciais de ordens superiores, mantendo a mesma abordagem geral. No caso dos problemas de valor de contorno, também consideramos equações de segunda ordem, propondo uma metodologia que utiliza a expansão da função de Green em uma base de autofunções associadas a um operador diferencial autoadjunto de Sturm-Liouville. Além da formulação teórica, implementamos um código computacional capaz de calcular os termos dessa expansão. Para validar nossa metodologia, realizamos uma comparação gráfica entre a solução analítica exata e a aproximação obtida pela expansão em autofunções, destacando a eficácia do método proposto e a facilidade de obter aproximações numéricas.

Palavras-chave: Função de Green; problema de valor inicial; problema de valor de contorno; expansão em autofunções.

*jklpet.ufpel@gmail.com

¹Universidade Federal de Pelotas/Pelotas, RS, Brasil.

1 INTRODUÇÃO

Ao estudarmos a temática das antenas elétricas, nos deparamos com a necessidade de obtermos os campos elétricos e magnéticos irradiados pelas topologias estudadas por Balanis (2016). Na análise de problemas de radiação, por exemplo, é comum estabelecermos as fontes e logo após determinarmos que os campos sejam radiados pelas fontes. Entretanto, o problema de obter os resultados da radiação dos campos de forma direta é complexo. Uma metodologia que pode ser utilizada na resolução desse problema é fazer uso de funções vetores potenciais das grandezas desejadas de forma a reescrever o problema em termos de equações diferenciais parciais (PDEs). Dessa forma, esperamos aplicar a teoria conhecida para resolução de EDPs, em particular, relacionada a funções de Green, para resolver problemas aplicados à temática de antenas. Neste artigo, não temos a pretensão de fornecermos uma solução completa ao problema de radiação uma vez que envolve conceitos avançados de EDPs e obtenção da função de Green, mas sim apresentarmos e desenvolvermos uma base teórica de forma a, progressivamente, sermos capazes de resolver esse problema futuramente.

Partindo de problemas relativamente mais simples, desenvolveremos uma metodologia geral para obter a função de Green para EDOs. Em problemas de valor inicial para equações lineares de ordem $n \geq 2$, utilizando a solução do problema homogêneo associado e o método de variação de parâmetros para encontrar uma solução particular (O’Neil, 2011) (Kreyszig, 2006), seremos capazes de escrever o operador integral que permite resolver a equação diferencial de forma direta. Em problemas de valor de contorno, mais especificamente os relacionados a problemas de Sturm-Liouville, seremos capazes de escrever a função de Green em termos de uma base gerada para o espaço de soluções da equação diferencial associada. Essa técnica, combinada com o método da separação de variáveis, será de grande utilidade ao tentarmos obter a função de Green para equações diferenciais parciais.

2 METODOLOGIA

Ao tentarmos resolver uma equação diferencial da forma

$$\mathcal{L}[y] = f, \quad (1)$$

onde $\mathcal{L}$ é um operador diferencial linear, o termo fonte $f = f(t)$ é uma função conhecida e $y = y(t)$ é a solução da equação procurada, surge a questão de se poderíamos, assim como ao resolver um sistema linear de equações, encontrar a inversa do operador linear e obter a solução da forma

$$y = \mathcal{L}^{-1}[f], \quad (2)$$

onde $\mathcal{L}^{-1}$ é o operador inverso de $\mathcal{L}$.

Considerando que temos um operador diferencial $\mathcal{L}$, podemos esperar que seu operador

inverso seja um operador integral. Nesse caso, podemos supor que a equação (2) pode ser escrita como

$$y(t) = \int G(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (3)$$

onde $G(t, \tau)$ é chamada de função de Green. Geralmente, encontrar tal operador inverso, quando ele existe, é uma tarefa árdua e até mesmo resolver, diretamente, o problema integral pode ser desafiador.

Para ilustrar e desenvolver a metodologia aplicada nesse trabalho, vamos iniciar com o caso particular de encontrar a solução e a função de Green para um problema de valor inicial para EDO de segunda ordem e então generalizar esse método para problemas de valor inicial de ordem n , para $n \geq 2$. Para PVCs, vamos considerar equações de segunda ordem associadas a um operador linear autoadjunto de Sturm-Liouville e, então, utilizar as propriedades desse operador diferencial autoadjunto para escrever a função de Green como uma expansão em série de autofunções associadas ao operador de Sturm-Liouville (Herman, 2023).

2.1 Problemas de Valor Inicial

Considere o problema de valor inicial para uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem não-homogênea com coeficientes variáveis dado por

$$\begin{aligned} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) &= f(t), \\ y(0) &= y_0, \quad y'(0) = v_0, \end{aligned} \quad (4)$$

onde $a(t)$ não se anula no domínio de interesse da equação. Neste problema podemos obter a função de Green, primeiramente, considerando o problema homogêneo e sua solução e então, utilizando o método da variação de parâmetros para escrever a solução particular para o problema não-homogêneo.

Supondo que uma solução particular para o problema não-homogêneo é obtido pelo método da variação, ou seja, a solução particular $y_p(t)$ é escrita da forma

$$y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t), \quad (5)$$

onde $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções do problema homogêneo associado a equação diferencial, na equação (4), e $c_1(t)$ e $c_2(t)$ são funções de t a serem determinadas. Aplicando as condições iniciais, conforme descritas na equação (4), encontramos duas novas equações que nos permitem escrever o sistema linear abaixo:

$$\begin{aligned} c'_1(t)y_1(t) + c'_2(t)y_2(t) &= 0, \\ c'_1(t)y'_1(t) + c'_2(t)y'_2(t) &= \frac{f(t)}{a(t)}, \end{aligned} \quad (6)$$

nas variáveis $c'_1(t)$ e $c'_2(t)$. Esse sistema pode ser resolvido por substituição simples de

onde obtemos que

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= -\frac{f(t)y_2(t)}{a(t)[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)]}, \\ c_2'(t) &= \frac{f(t)y_1(t)}{a(t)[y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)]}, \end{aligned} \quad (7)$$

e daí $c_1(t)$ e $c_2(t)$ podem ser obtidos por integração. Note que o denominador nas expressões de $c_1'(t)$ e $c_2'(t)$, na equação (7), é o determinante Wronskiano $W(y_1(t), y_2(t))$ associado às soluções do problema homogêneo, ou seja,

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}, \quad (8)$$

de onde o denominador não se anula no domínio da equação diferencial ordinária, uma vez que y_1 e y_2 são soluções fundamentais linearmente independentes da equação diferencial. Dessa forma, as expressões de $c_1'(t)$ e $c_2'(t)$ ficam bem definidas e, utilizando integração, obtemos que

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\int_{t_1}^t \frac{f(\tau)y_2(\tau)}{a(\tau)W(\tau)} d\tau, \\ c_2(t) &= \int_{t_2}^t \frac{f(\tau)y_1(\tau)}{a(\tau)W(\tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (9)$$

onde t_1 e t_2 são constantes que podem ser determinadas aplicando as condições iniciais do problema de valor inicial, como descritas na equação (4).

Como $\mathcal{L} = \mathcal{L}[y] = a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y$, na equação (4), é um operador diferencial linear, a solução geral da equação diferencial $y(t)$ é dada pela soma da solução associada ao problema homogêneo $y_h(t)$ mais uma solução particular associada ao problema não-homogêneo $y_p(t)$. Assim, substituindo $c_1(t)$ e $c_2(t)$ na equação (5), a solução geral $y(t)$ da equação diferencial é dada por

$$y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) + y_2(t) \int_{t_2}^t \frac{f(\tau)y_1(\tau)}{a(\tau)W(\tau)} d\tau - y_1(t) \int_{t_1}^t \frac{f(\tau)y_2(\tau)}{a(\tau)W(\tau)} d\tau, \quad (10)$$

onde k_1 e k_2 são constantes reais.

A fim de escrever a solução do problema de valor inicial, descrito na equação (4), como na forma da equação (3), podemos utilizar as condições iniciais e o fato que $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ para escrever dois problemas auxiliares, segundo Lathi (2006): Um problema de resposta de entrada nula satisfeito pela solução homogênea e um problema de estado nulo satisfeito pela solução particular, mais especificamente,

$$a(t)y_h''(t) + b(t)y_h'(t) + c(t)y_h(t) = 0, \quad y_h(0) = y_0, \quad y_h'(0) = v_0, \quad (11)$$

$$a(t)y_p''(t) + b(t)y_p'(t) + c(t)y_p(t) = f(t), \quad y_p(0) = 0, \quad y_p'(0) = 0, \quad (12)$$

de onde obtemos que $y_h(0) = y_0$ e $y'_h(0) = v_0$.

Utilizando o fato que $y_p(0) = 0$ podemos escrever que

$$y_p(0) = y_2(0) \int_{t_2}^0 \frac{f(\tau)y_1(\tau)}{a(\tau)W(\tau)} d\tau - y_1(0) \int_{t_1}^0 \frac{f(\tau)y_2(\tau)}{a(\tau)W(\tau)} d\tau = 0. \quad (13)$$

Sem perda de generalidade, assumindo que $y_1(0) = 0$, podemos escrever a equação (13) como

$$y_p(0) = y_2(0) \int_{t_2}^0 \frac{f(\tau)y_1(\tau)}{a(\tau)W(\tau)} d\tau = 0. \quad (14)$$

Note que não podemos assumir que ambas funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sejam nulos em $t = 0$, tampouco ambas suas derivadas sejam ambas nulas em $t = 0$, pois assim teríamos o determinante Wronskiano da equação (8) igual a zero. Dessa forma, o termo integral na equação (14) deve ser nulo e, então, $t_2 = 0$.

Tomando a derivada da solução particular $y_p(t)$, avaliando em $t = 0$ e utilizando o fato que $y'_p(0) = 0$ obtemos que

$$y'_p(0) = -y'_1(0) \int_{t_1}^0 \frac{f(\tau)y_2(\tau)}{a(\tau)W(\tau)} d\tau = 0. \quad (15)$$

Usando um argumento similar ao caso anterior, podemos assumir que $y'_1(0) \neq 0$ e daí podemos concluir que $t_1 = 0$.

Finalmente, a solução particular toma a forma

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_2(t) \int_0^t \frac{f(\tau)y_1(\tau)}{a(\tau)W(\tau)} d\tau - y_1(t) \int_0^t \frac{f(\tau)y_2(\tau)}{a(\tau)W(\tau)} d\tau \\ &= \int_0^t \left[\frac{y_1(\tau)y_2(t) - y_1(t)y_2(\tau)}{a(\tau)W(\tau)} \right] f(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

ou seja, a solução particular já aparece com o formato desejado, ou seja,

$$y_p(t) = \int_0^t G(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (17)$$

na qual a função de Green do problema de valor inicial pode ser identificada como

$$G(t, \tau) = \frac{y_1(\tau)y_2(t) - y_1(t)y_2(\tau)}{a(\tau)W(\tau)}, \quad (18)$$

onde podemos notar que o denominador nunca se anula.

2.1.1 Generalização para PVI de Ordem n

Podemos generalizar esse procedimento para problemas de valor inicial lineares não homogêneos de ordem $n \geq 2$ de forma muito semelhante, ao que foi realizado anteriormente para problema de segunda ordem. Começamos supondo que a solução particular para o problema não-homogêneo é obtida pelo método da variação de parâmetros, ao resolver um sistema análogo ao da equação (6) para a n -ésima ordem. Podemos obter na literatura

a generalização dos coeficientes para ordem n . Segundo Teschl (2024), os coeficientes são dados por

$$c_j(t) = \int_{t_j}^t (-1)^{n-j} \frac{f(\tau)W_j(\tau)}{a(\tau)W(\tau)} d\tau, \quad 1 \leq j \leq n \quad (19)$$

onde $W_j(\tau)$ é o determinante Wronskiano excluindo-se a última linha e a j -ésima coluna e $a(\tau)$, agora é o coeficiente da derivada de n -ésima ordem.

Para facilitar o cálculo do Wronskiano podemos adotar essa expansão em cofatores da última linha

$$W = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} y_j^{(n-1)} W_j. \quad (20)$$

Com isso em mente, aplicando os n coeficientes calculados em uma versão da equação (5) para n -ésima ordem e aplicando uma lógica similar a equação (13), equação (14) e equação (15) até a $(n-1)$ -ésima derivada da solução particular com condições iniciais nulas, podemos agrupar todos os n termos numa única integral de forma equivalente a equação (16). Dessa forma, concluímos que para um problema de valor inial de n -ésima ordem teremos

$$y_p(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \frac{W_j(\tau)y_j(t)}{a(\tau)W(\tau)} f(\tau) d\tau \quad (21)$$

em que $y_j(t)$, é a j -ésima solução homogênea da equação diferencial de n -ésima ordem.

Assim, podemos observar que a solução particular já se encontra no formato adequado para identificarmos a função de Green como dada por

$$G(t, \tau) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \frac{W_j(\tau)y_j(t)}{a(\tau)W(\tau)}. \quad (22)$$

2.2 Problema de Valor de Contorno para EDO

Uma motivação para estudarmos problemas de valor de contorno de segunda ordem, em particular, problemas de Sturm-Liouville, é o fato de que esse operador linear é autoadjunto, ou seja, possui boas propriedades relacionadas ao seu conjunto de autovalores e autofunções: Todos os seus autovalores são reais e distintos e suas autofunções correspondentes são ortogonais. Dessa forma, conseguimos construir uma base para o espaço de soluções da equação diferencial e, assim, podemos obter aproximações sucessivas em termos dos elementos dessa base a fim de resolver a equação diferencial. Esse operador também aparece com frequência na resolução de EDPs, de forma mais específica, ao aplicarmos o método da separação de variáveis (Keener, 2018) (Kreyszig, 2006) (O'Neil, 2011).

Primeiramente, vamos considerar o problema de valor de contorno de uma equação linear de segunda ordem. Mais especificamente, podemos iniciar com um problema de valor de contorno do tipo Sturm-Liouville, ou seja, quando a EDO é escrita da forma

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy(x)}{dx} \right) + q(x)y(x) = f(x), \quad a < x < b, \quad (23)$$

para dadas funções $p(x)$, $q(x)$ e $f(x)$ bem comportadas, $y(x)$ a ser determinada, mas com valores de $y(x)$ fixados na fronteira como sendo zero, ou seja, $y(a) = 0$ e $y(b) = 0$. No entanto, veremos mais à frente que a teoria ainda é robusta para outros valores de condições de contorno, ou seja, para condições de contorno não-homogêneas.

Resolvendo o problema homogêneo e obtendo duas soluções linearmente independentes $y_1(x)$ e $y_2(x)$, podemos, novamente, utilizando variação de parâmetros, solucionar o problema particular dado pela equação (5), que resulta

$$y(x) = y_2(x) \int_{x_2}^x \frac{f(\xi)y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} d\xi - y_1(x) \int_{x_1}^x \frac{f(\xi)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} d\xi, \quad (24)$$

onde x_1 e x_2 precisam ser determinados. Podemos utilizar as condições de contorno a fim de obter os valores de x_1 e x_2 .

Primeiro, usamos as soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da equação diferencial homogênea que satisfazem $y_1(a) = 0$, $y_2(b) = 0$ e $y_1(b) \neq 0$, $y_2(a) \neq 0$, para não anularmos o Wronskiano das soluções.

Usando uma metodologia análoga a aplicada na equação (13) e equação (15), obtemos

$$y(x) = y_2(x) \int_a^x \frac{f(\xi)y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} d\xi - y_1(x) \int_b^x \frac{f(\xi)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} d\xi, \quad (25)$$

que, ao inverter os limites de integração, nos permite escrever $y(x)$ como

$$y(x) = \int_a^x \frac{f(\xi)y_1(\xi)y_2(x)}{p(\xi)W(\xi)} d\xi + \int_x^b \frac{f(\xi)y_1(x)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)} d\xi, \quad (26)$$

e, assim, podemos observar que $y(x)$ está no formato desejado

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (27)$$

com $G(x, \xi)$, a função de Green, sendo dada por

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{p(\xi)W(\xi)}, & a \leq \xi \leq x \\ \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}, & x \leq \xi \leq b \end{cases}. \quad (28)$$

Neste caso, é importante observarmos que utilizamos, exatamente, a mesma metodologia aplicada a problemas de valor inicial para obter a função de Green para PVC homogêneos.

2.2.1 Função Delta de Dirac e a Função de Green para Problemas Não-homogêneos

Como podemos observar, na equação (28), a função de Green é proporcional a solução homogênea $y_1(x)$ no intervalo $x < \xi$ e é proporcional a solução homogênea $y_2(x)$ no intervalo $x > \xi$. Já que ambas são soluções homogêneas da equação (23), conseguimos perceber que a função de Green também é solução homogênea do problema de valor de contorno, para $x \neq \xi$. Para $x = \xi$, percebemos que há uma descontinuidade no valor da derivada, um

comportamento muito similar a função de Heaviside, ou função degrau, dada por

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (29)$$

Podemos notar que a função de Heaviside, possui derivada nula em todo domínio, exeto em sua descontinuidade em $x = 0$. Com isso em mente, primeiramente, de maneira intuitiva, podemos introduzir a função delta de Dirac, definida como

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} [H(x)], \quad (30)$$

utilizando a derivada no sentido de distribuições (Keener, 2018).

Umas das propriedades dessa função delta de Dirac que utilizaremos a seguir no desenvolvimento da teoria, é chamada de propriedade de peneiramento, ou seja, dada uma função $f(x)$ integrável temos que vale a equação

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - \xi) dx = f(\xi), \quad (31)$$

onde a integração é feita em todo o domínio dos números reais. Para fornecer uma justificativa dessa propriedade, definimos uma nova função auxiliar $\delta_{\epsilon}(x - \xi)$ dada por

$$\delta_{\epsilon}(x - \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}, & |x - \xi| < \epsilon \\ 0, & |x - \xi| > \epsilon \end{cases}, \quad (32)$$

dessa forma podemos definir $\delta(x - \xi)$ como

$$\delta(x - \xi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(x - \xi), \quad (33)$$

e, assim, multiplicando equação (32) pela função $f(x)$, integrando em todo o domínio real e aplicando as propriedades de limites obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - \xi) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_{\epsilon}(x - \xi) dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon + \xi}^{\epsilon + \xi} f(x) \frac{1}{2\epsilon} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon + \xi}^{\epsilon + \xi} f(x) dx. \end{aligned} \quad (34)$$

Agora, utitizando o do teorema do valor médio para integrais, resulta que existe um

$c^* \in (\epsilon + \xi, -\epsilon + \xi)$ tal que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon+\xi}^{\epsilon+\xi} f(x) dx &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} f(c^*) [\epsilon + \xi - (-\epsilon + \xi)], \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(c^*) \\ &= f(\xi), \end{aligned} \quad (35)$$

de onde, finalmente, podemos concluir que a equação (31) é válida .

A propriedade do peneiramento pode ser utilizada para mostrar que a função de Green $G(x, \xi)$ é uma solução da equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right) + q(x) G(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad (36)$$

com condições homogêneas (Herman, 2023). Esse fato nos permite utilizar a função de Green para resolver o problema não-homogêneo descrito pela equação (23). Podemos considerar o operador diferencial

$$\mathcal{L}[y] = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right) + q(x)y, \quad (37)$$

de onde podemos escrever as equações (23) e (36) de uma forma mais compacta como

$$\mathcal{L}[y] = f(x) \quad (38)$$

e

$$\mathcal{L}[G(x, \xi)] = \delta(x - \xi), \quad (39)$$

e daí, usando essas últimas equações, podemos determinar $y(x)$ em termos da função de Green $G(x, \xi)$. Para isso, podemos multiplicar a primeira equação pela função $G(x, \xi)$ e a segunda equação pela função $y(x)$. Subtraindo essas novas equações temos que

$$G(x, \xi) \mathcal{L}[y] - y(x) \mathcal{L}[G] = f(x) G(x, \xi) - \delta(x - \xi) y(x), \quad (40)$$

que, após integração em ambos os lados em todo o domínio, nos fornece a equação

$$\int_a^b (G(x, \xi) \mathcal{L}[y] - y \mathcal{L}[G(x, \xi)]) dx = \int_a^b [f(x) G(x, \xi) - \delta(x - \xi) y(x)] dx. \quad (41)$$

Note que, do lado esquerdo da equação (41), obtemos que

$$\int_a^b (G(x, \xi) \mathcal{L}[y] - y \mathcal{L}[G(x, \xi)]) dx = \left[p(x) \left(G(x, \xi) y'(x) - y(x) \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi) \right) \right]_{x=a}^{x=b}, \quad (42)$$

aplicando a segunda identidade de Green (Herman, 2023). O lado direito da equação (41) torna-se

$$\int_a^b [f(x) G(x, \xi) - \delta(x - \xi) y(x)] dx = \int_a^b f(x) G(x, \xi) dx - y(\xi), \quad (43)$$

de onde concluímos que

$$y(\xi) = \int_a^b f(x)G(x, \xi)dx - \left[p(x) \left(y(x) \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi) - G(x, \xi)y'(x) \right) \right]_{x=a}^{x=b}, \quad (44)$$

ou ainda, aplicando os limites de integração e as condições de contorno nulas na equação (44), temos que

$$\begin{aligned} y(\xi) &= \int_a^b f(x)G(x, \xi)dx - \left[p(b) \left(y(b) \frac{\partial G}{\partial x}(b, \xi) - G(b, \xi)y'(b) \right) \right] \\ &\quad + \left[p(a) \left(y(a) \frac{\partial G}{\partial x}(a, \xi) - G(a, \xi)y'(a) \right) \right] \\ &= \int_a^b f(x)G(x, \xi)dx + p(b)G(b, \xi)y'(b) - p(a)G(a, \xi)y'(a). \end{aligned} \quad (45)$$

Levando em consideração que possuímos condições de contorno homogêneas $y(a) = 0$ e $y(b) = 0$, podemos perceber que $G(a, \xi) = 0$ e $G(b, \xi) = 0$. Assim, ao permutar x por ξ , através da propriedade da simetria, enfim obtemos

$$y(x) = \int_a^b f(\xi)G(\xi, x)d\xi. \quad (46)$$

Com base no resultado apresentado em equação (44), podemos perceber que a teoria também comporta condições de contorno não homogêneas. Considerando $y(a) = \alpha$ e $y'(b) = \beta$, por exemplo, podemos assumir que $G(x, \xi)$ satisfaz condições de contorno homogêneas

$$G(a, \xi) = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \xi}(b, \xi) = 0, \quad (47)$$

assim, obtemos a solução da equação diferencial que satisfaz condições de contorno não homogêneas

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)f(\xi)d\xi + \beta p(b)G(x, b) + \alpha p(a) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, a). \quad (48)$$

2.3 Representação da Função de Green em Séries

Muitas vezes não é fácil determinar as funções de Green no seu formato fechado como na equação (18) ou equação (28). Entretanto, vamos apresentar uma metodologia que nos permite representar a função de Green como uma expansão em autofunções de um operador autoadjunto.

Dado um operador linear autoadjunto $\mathcal{L}$, usaremos um conjunto de autofunções gerado por esse operador diferencial, satisfazendo condições de contorno homogêneas. Dessa forma, cada autofunção $\phi_n(x)$ satisfaz a equação

$$\mathcal{L}[\phi_n(x)] = \lambda_n \phi_n(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (49)$$

onde λ_n é o autovalor correspondente a autofunção $\phi_n(x)$.

Desejamos encontrar a solução $y(t)$ da equação diferencial

$$\mathcal{L}[y] = f(x), \quad (50)$$

com condições de contorno homogêneas, onde $f(x)$ é dada. Assim assumimos que

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x), \quad (51)$$

onde a_n são os coeficientes da expansão em autofunções. Substituindo a solução proposta na equação diferencial e utilizando a linearidade do operador diferencial temos que

$$\mathcal{L}[y] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathcal{L}[\phi_n(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \phi_n(x) = f(x), \quad (52)$$

o que resulta na expansão generalizada de Fourier de $f(x)$, ou ainda,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \phi_n(x), \quad (53)$$

onde fica claro como escrever a função $f(x)$ em termos das autofunções ϕ_n , para $n = 1, 2, \dots$

Podemos calcular os coeficientes a_n que aparecem na equação (51) aplicando o produto interno e suas propriedades para funções $f(x)$, $\phi_n(x)$ e $\phi_m(x)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{L} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) \right], \phi_m(x) \right\rangle &= \langle f(x), \phi_m(x) \rangle \\ \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathcal{L}[\phi_n(x)], \phi_m(x) \right\rangle &= \langle f(x), \phi_m(x) \rangle \\ \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \phi_n(x), \phi_m(x) \right\rangle &= \langle f(x), \phi_m(x) \rangle \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \langle \phi_n(x), \phi_m(x) \rangle &= \langle f(x), \phi_m(x) \rangle, \end{aligned} \quad (54)$$

para cada $n, m = 1, 2, \dots$ e, neste ponto, resulta da ortogonalidade das autofunções que

$$\langle \phi_n(x), \phi_m(x) \rangle = \|\phi_n\|^2 \delta_{n,m}, \quad m, n = 1, 2, \dots, \quad (55)$$

sendo $\delta_{n,m}$, a função delta de Kronecker. Assim, temos os coeficientes a_n da expansão, com $\lambda_n \neq 0$, dados por

$$a_n = \frac{\langle f, \phi_n(x) \rangle}{\|\phi_n(x)\|^2 \lambda_n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (56)$$

Assim, podemos finalmente definir $y(x)$ como uma expansão em autofunções da forma

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \phi_n(x) \rangle}{\|\phi_n(x)\|^2 \lambda_n} \phi_n(x), \quad (57)$$

ou ainda, reorganizando o produto interno da equação temos que

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \frac{\phi_n(\xi) f(\xi)}{\|\phi_n(\xi)\|^2 \lambda_n} d\xi \phi_n(x) = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x) \phi_n(\xi)}{\|\phi_n(\xi)\|^2 \lambda_n} f(\xi) d\xi. \quad (58)$$

Dessa maneira, explicitamos a forma da função de Green para problemas de valor de contorno, com $G(x, \xi)$ sendo dado por

$$G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x) \phi_n(\xi)}{\|\phi_n(\xi)\|^2 \lambda_n}. \quad (59)$$

3 RESULTADOS

Para exemplificar a aplicação da metodologia desenvolvida na seção anterior, escrevemos e implementamos um código computacional que permite obter as aproximações sucessivas da função de Green para um problema de valor de contorno com condições de fronteira nula, cuja solução conhecemos *a priori*, e que nos permite comparar os resultados numéricos obtidos com os resultados analíticos exatos.

Exemplo: Considere o problema de valor de contorno com condições de fronteira nula dado por

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= x^2, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= y(1) = 0, \end{aligned} \quad (60)$$

onde $y = y(x)$ é a solução do problema que desejamos expressar em termos de uma função de Green. Esse exemplo foi escolhido de forma a ilustrar a metodologia desenvolvida e poder comparar a solução obtida como expansão em série de autofunções do operador de Sturm-Liouville associado ao problema com a solução de Green conhecida e dada por

$$y(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\sin(x) \cos(1-x)}{4 \sin(1)}. \quad (61)$$

Para isso, escrevemos um código que calcula os valores numéricos dos autovalores λ_n , das autofunções $\phi_n(x)$ e das normas $\|\phi_n\|$, para $n = 1, 2, \dots, n$, onde n é o número de termos na expansão em autofunções. Ainda, definimos a solução analítica exata e comparamos, graficamente, as duas soluções do problema de valor de contorno. Na figura 1, apresentamos o código computacional com as principais linhas de comando necessárias para gerar a solução do problema. Na figura 2, plotamos a solução obtida a partir da aproximação da função de Green e a solução analítica exata.

Finalmente, ao compilar o código, obtemos os resultados do método em séries da função de Green e da solução exata do problema de valor de contorno.

Ao observamos os resultados podemos constatar que a solução por séries da função de Green se aproxima da solução fechada a partir de cinco termos do somatório da função de Green.

```

syms x csi n

% Cálculo dos autovalores
lamda(n) = -(n^2)*(pi^2)+4;

% Cálculo das autofunções
phi(x,n) = sin(n*pi*x);

% Cálculo da norma das autofunções
norm_phi = int(phi(x,1)^2,x,[0 1]);

% Número de termos da expansão função de Green
num_terms = 5;

% Aproximação pela expansão em função de Green
G(x,csi) = symsum((phi(x,n)*phi(csi,n))/(norm_phi*lamda(n)),n,1,num_terms)

% Termo não homogêneo
f(csi) = csi^2;

% Solução aproximada pelo método de expansão em autofunções
y_G(x) = int(G(x,csi)*f(csi),csi,[0 1])

% Solução analítica exata dada pela função de Green
y(x) = x^2/4 - (sin(x)*cos(1-x))/(4*sin(1))

% Plotagem das soluções
fplot(y_G(x),'b--o',[0 1]) %Plotagem das soluções
grid on
hold on
fplot(y(x),'r',[0 1])
legend('y_G(x)','y(x)','Location','southwest')
legend('boxoff')
hold off

```

Figura 1: Código computacional.

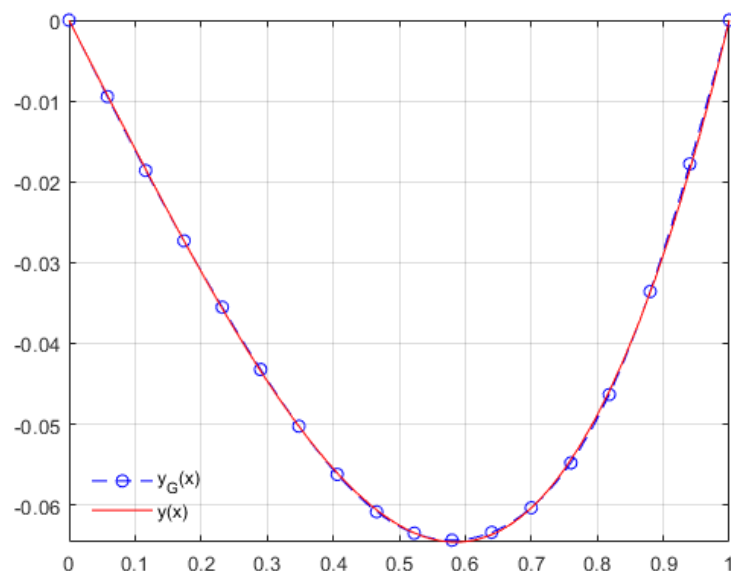


Figura 2: Gráficos da solução obtida aproximando a função de Green por uma série de autofunções $y_G(x)$ e da sua solução analítica exata $y(x)$.

4 CONCLUSÃO

Nesse trabalho, como uma introdução ao método da função de Green para EDOs, apresentamos uma metodologia para obtenção de soluções de PVIs e, em seguida, para PVCs dentro do mesmo contexto. Apresentamos, como exemplo, a aplicabilidade da função delta de Dirac e como essa função pode nos auxiliar a encontrar soluções mais gerais para PVCs não-homogêneos. Aprofundamos o estudo e análise das soluções dos PVIs e PVCs, obtendo soluções de tais problemas e a representação da função de Green em termos de autofunções para um problema de valor de contorno associado a um operador auto-adjunto de Sturm-Liouville. Nesse artigo, nos limitamos a metodologias e análises para EDO's sendo que o caso envolvendo EDPs ainda carece atenção. No entanto, em trabalhos futuros, pretendemos expandir a aplicação dos métodos desenvolvidos e analisados para a resolução de EDPs, haja vista que a função de Green colabora com o entendimento do problema e da própria solução obtida por outros métodos já conhecidos.

REFERÊNCIAS

- Balanis, C. A. (2016). Antenna Theory: Analysis and Design. 4th. Hoboken, NJ: Wiley.
- Herman, R. (2023). Introduction to Partial Differential Equations. URL: <https://math.libretexts.org/Bookshelves/>.
- Keener, J. P. (2018). Principles of applied mathematics: transformation and approximation. Boca Raton, FL: CRC Press.
- Kreyszig, E. (2006). Advanced Engineering Mathematics. 9th. Hoboken, NJ: Wiley.
- Lathi, B. P. (2006). Sinais e Sistemas Lineares. 2ª. Porto Alegre, RS: Bookman.
- O'Neil, P. V. (2011). Advanced Engineering Mathematics. 7th. Boston, MA: Cengage Learning.
- Teschl, G. (2024). Ordinary differential equations and dynamical systems. Vol. 140. Providence, RI: American Mathematical Society.