



# Aplicação de Transformações Difeomorfas Para a Solução Numérica das Equações de Navier-Stokes em Geometrias Complexas

Joel Junqueira de Moraes<sup>1\*</sup>; André Meneghetti<sup>1</sup>

**Resumo:** A simulação numérica de escoamentos de fluidos newtonianos em domínios com geometrias complexas é um desafio significativo na mecânica dos fluidos computacional. As equações de Navier-Stokes, que governam o movimento desses fluidos, apresentam maior complexidade quando aplicadas em domínios com contornos irregulares. Neste trabalho, propomos uma metodologia que utiliza transformações difeomorfas para modificar a geometria do domínio físico original. Essa técnica permite mapear o domínio com geometria arbitrária para um domínio retangular, o que facilita a aplicação de métodos numéricos tradicionais, amplamente otimizados para geometrias retilíneas. A transformação preserva as propriedades diferenciáveis do sistema, permitindo a resolução eficiente das equações diferenciais em geometrias curvilíneas. A metodologia foi aplicada em casos teste, no qual foram realizadas simulações numéricas para validar a sua eficácia. Os resultados mostraram que a transformação difeomorfa proposta facilita a resolução das equações de Navier-Stokes, mantendo a precisão dos métodos numéricos e simplificando o tratamento de domínios complexos. Com isso, foi possível observar uma redução significativa na dificuldade de implementação dos métodos numéricos para esse tipo de geometria. A pesquisa demonstra o potencial dessa abordagem para aplicações em diversas áreas da engenharia, como aerodinâmica e hidráulica, abrindo novas possibilidades para a modelagem de escoamentos em geometrias arbitrárias e a consequente melhoria na compreensão dos fenômenos físicos envolvidos.

**Palavras-chave:** Navier-Stokes; transformações difeomorfas; métodos numéricos; coordenadas curvilínea.

---

\*moraesjoel14@gmail.com

<sup>1</sup>Universidade Federal do Rio Grande - FURG.

# 1 INTRODUÇÃO

A simulação numérica de escoamentos de fluidos, governada pelas equações de Navier-Stokes, é um pilar fundamental na engenharia e nas ciências aplicadas. A capacidade de prever e analisar o comportamento de fluidos em diversas condições é crucial para o desenvolvimento de tecnologias inovadoras e a otimização de processos. No entanto, a resolução numérica dessas equações em domínios complexos, como aqueles encontrados em turbinas, canais naturais ou sistemas biológicos, representa um desafio significativo devido às suas características não lineares e à complexidade geométrica, conforme detalhado por Meneghetti (2018).

A presente pesquisa visa superar essas limitações, propondo uma metodologia para a resolução numérica das equações de Navier-Stokes em geometrias arbitrárias. A abordagem proposta baseia-se na aplicação de transformações difeomorfas, que mapeiam o domínio físico original, com geometria complexa, para um domínio retangular. Essa transformação permite que as equações de Navier-Stokes sejam reescritas em um novo sistema de coordenadas. A geometria simplificada facilita a aplicação de métodos numéricos convencionais, como a metodologia numérica descrita em Hoffman (2001) e Ruggiero e Rocha Lopes (1996).

Para avaliar a aplicabilidade da metodologia, foram realizadas três simulações numéricas em domínios com geometrias variadas. Apesar das diferentes geometrias, as condições de contorno e iniciais permaneceram as mesmas em todos os casos, permitindo uma análise comparativa dos resultados.

Este trabalho contribui para expandir as fronteiras da mecânica dos fluidos computacional, eliminando a necessidade de simplificações que comprometem a fidelidade dos resultados e permitindo a simulação precisa de fenômenos em geometrias complexas.

## 2 MODELO PROPOSTO

Considerando um fluido incompressível em escoamento laminar e negligenciando os efeitos gravitacionais, as equações (1) e (2) descrevem a conservação da quantidade de movimento nas direções horizontal e vertical.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right); \quad (2)$$

onde  $\rho$  é a densidade do fluido,  $u$  e  $w$  são as componentes do vetor velocidade,  $P$  é a pressão e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica.

Conforme Maliska (2004), em fluidos newtonianos, o gradiente de pressão é a força motriz que impulsiona o escoamento.

Para quantificar este gradiente, adotaremos a equação (3), proposta por Fedkiw, Stam e Jensen (2001), adequada para modelar a distribuição de pressão nesse tipo de escoamento.

$$\Delta P = \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right). \quad (3)$$

O parâmetro  $\varepsilon$ , que controla a intensidade dos efeitos da pressão, é determinado pela expressão  $\varepsilon = 340^2 \times \Delta t$ , sendo  $\Delta t = 0,001$ .

### 3 ADIMENSIONALIZAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

De acordo com Ribeiro e Yanagihara (1995), a adimensionalização consiste em reformular as equações que descrevem um fenômeno físico, expressando as variáveis em termos de grandezas adimensionais. Esse procedimento simplifica a análise, permitindo a identificação de parâmetros adimensionais característicos e a generalização dos resultados, tornando-os aplicáveis a diferentes sistemas físicos. As equações (4), (5) e (6) representam a forma adimensionalizada das equações (1), (2) e (3), respectivamente.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right); \quad (4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right); \quad (5)$$

$$\left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) = \varepsilon \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right); \quad (6)$$

sendo  $Re$  o conjunto de valores adimensionais de Reynolds, os quais caracterizam o regime de escoamento. As condições de contorno e iniciais do problema estão detalhadas nas equações (7), (8) e (9), abrangendo as velocidades e a pressão.

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, g(x), t) = 0, \\ u(x, 2, 5, t) = 0, \\ u(0, z, t) = 1, 5, \\ u_x(10, z, t) = 0, \\ u(x, z, 0) = 0. \end{array} \right. \quad (7) \quad \left\{ \begin{array}{l} w(x, g(x), t) = 0, \\ w(x, 2, 5, t) = 0, \\ w(0, z, t) = 0, \\ w_x(10, z, t) = 0, \\ w(x, z, 0) = 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_y(x, g(x), t) = 0, \\ P_y(x, 2, 5, t) = 0, \\ P_x(0, z, t) = 0, \\ P(10, z, t) = 1, \\ P(x, z, 0) = 1. \end{array} \right. \quad (9)$$

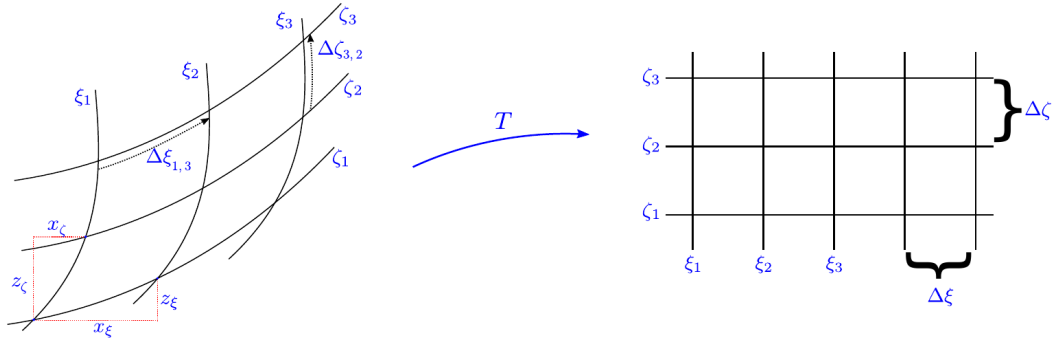
Onde a função  $g(x)$  representa a curva que delimita o contorno inferior do domínio.

## 4 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

A equação (10) define a transformação difeomorfa  $T$  que mapeia o domínio curvilíneo original, em coordenadas cartesianas  $(x \times z)$  para um domínio retangular no novo sistema  $(\xi \times \zeta)$ , conforme descrito por Meneghetti (2018).

$$T(x, z) = (\xi(x, z), \zeta(x, z)). \quad (10)$$

A figura 1 mostra a relação de dependência entre as variações do domínio original e o domínio correspondente definido no novo sistema de coordenadas.



**Figura 1:** Dependência entre os domínios.

Fonte: Meneghetti (2018).

Seguindo as aproximações propostas por Meneghetti (2018) para os operadores diferenciais e aplicando nas equações (4), (5) e (6), obtemos as equações (11), (12) e (13), respectivamente.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + D_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} + D_3 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + D_4 \frac{\partial u}{\partial \xi} + D_5 \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \xi_x \frac{\partial P}{\partial \xi} + \zeta_x \frac{\partial P}{\partial \zeta}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \zeta} + D_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + D_4 \frac{\partial w}{\partial \xi} + D_5 \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \xi_z \frac{\partial P}{\partial \xi} + \zeta_z \frac{\partial P}{\partial \zeta}; \quad (12)$$

$$A_1 \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + A_2 \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \partial \zeta} + A_3 \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} + A_4 \frac{\partial P}{\partial \xi} + A_5 \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \varepsilon \left[ \left( \xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \zeta_x \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) + \left( \xi_z \frac{\partial w}{\partial \xi} + \zeta_z \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \right]. \quad (13)$$

Os coeficientes  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ ,  $D_4$  e  $D_5$  variam com os termos não lineares das equações, com o número de Reynolds e com as coordenadas espaciais, enquanto os coeficientes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  e  $A_5$  dependem exclusivamente das coordenadas espaciais. Uma descrição completa da obtenção dos coeficientes e do procedimento para os termos não lineares utilizado neste trabalho, pode ser encontrado em Meneghetti (2018).

## 5 MÉTODO NUMÉRICO

Para resolver as equações diferenciais, utilizamos o método numérico de diferenças finitas implícitas. Os detalhes dessa abordagem são amplamente discutidos na literatura, com destaque para as contribuições de Hoffman (2001) e Ruggiero (1996). É importante notar que esse método oferece uma precisão de segunda ordem. Para o tratamento das condições de contorno do domínio, aplicamos o método sugerido por Strikwerda (2007), que também assegura a precisão de segunda ordem.

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Um código computacional em C++ foi desenvolvido para implementar a metodologia proposta anteriormente. A visualização dos resultados foi realizada utilizando o software gnuplot, considerando um número de Reynolds igual a 100 e uma malha de  $252 \times 152$  nós.

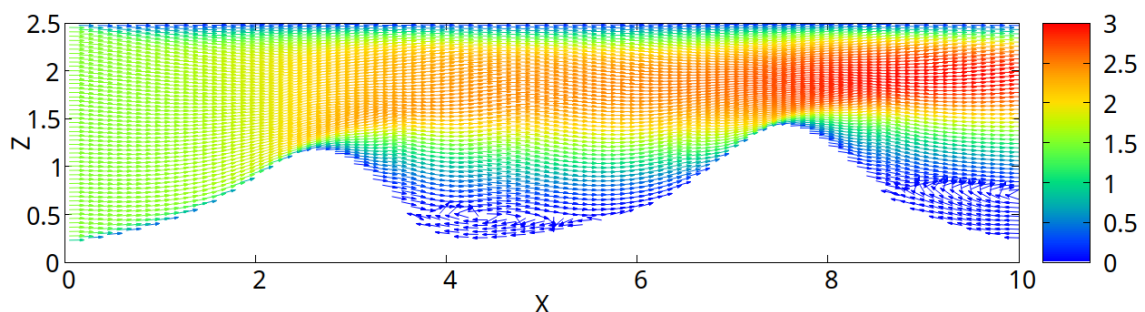
Em cada caso de estudo, o domínio físico  $\Omega$  é definido pelas retas  $x = 0$ ,  $x = 10$ ,  $z = 2,5$ , e pela curva  $g(x)$ , cuja expressão varia em cada caso.

Para facilitar a compreensão do escoamento, as figuras utilizarão vetores normalizados para representar a direção e o sentido do fluido, e uma escala de cores para visualizar a magnitude da velocidade. A distribuição de pressão será igualmente representada por uma escala de cores, permitindo uma análise dos gradientes de pressão.

O primeiro caso de estudo aborda um domínio  $\Omega$  cuja fronteira inferior é descrita pela seguinte expressão:

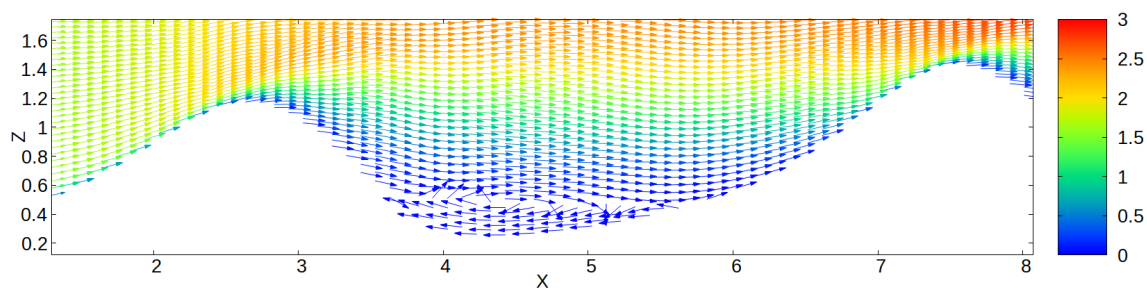
$$g(x) = 1,5 [\arctan(3 - 0,9x) + \arctan(0,9x - 2) + \arctan(x - 7) + \arctan(8 - x)] - 1,2 [\arctan(x - 3,5) + \arctan(4 - x)] \quad (14)$$

As figuras 2 e 5 apresentam a solução numérica das equações (11), (12) e (13), evidenciando a geração de vórtices nas regiões indicadas nas figuras 3 e 4



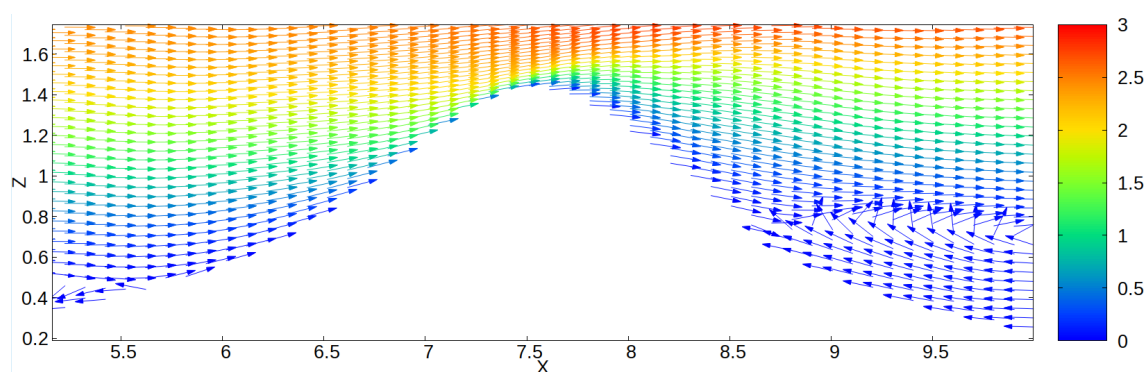
**Figura 2:** Perfil de velocidade  $U = \sqrt{u^2 + w^2}$  para o domínio  $\Omega$ .

Fonte: Do autor.



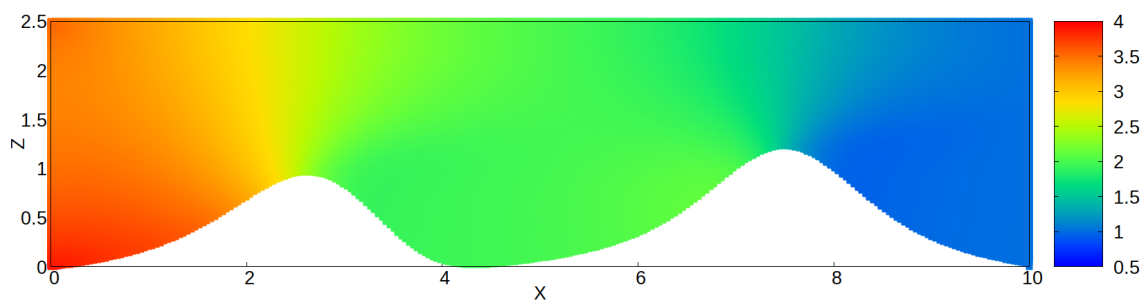
**Figura 3:** Vórtice gerado na região côncava do domínio  $\Omega$

Fonte: Do autor.



**Figura 4:** Vórtice gerado na região côncava do domínio  $\Omega$ .

Fonte: Do autor.



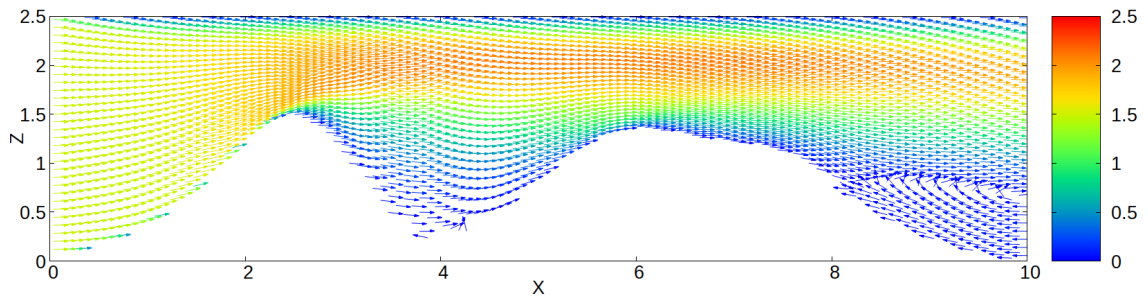
**Figura 5:** Distribuição de pressão no domínio  $\Omega$ .

Fonte: Do autor.

Ao modificar a geometria do domínio  $\Omega$ , alterando a expressão da curva que define seu contorno inferior, obtemos um novo domínio, denominado  $\Omega'$ . Este novo domínio será utilizado no segundo caso de estudo para avaliar a aplicabilidade da transformada difeomorfa. A função  $g(x)$  que define este novo contorno é dada por:

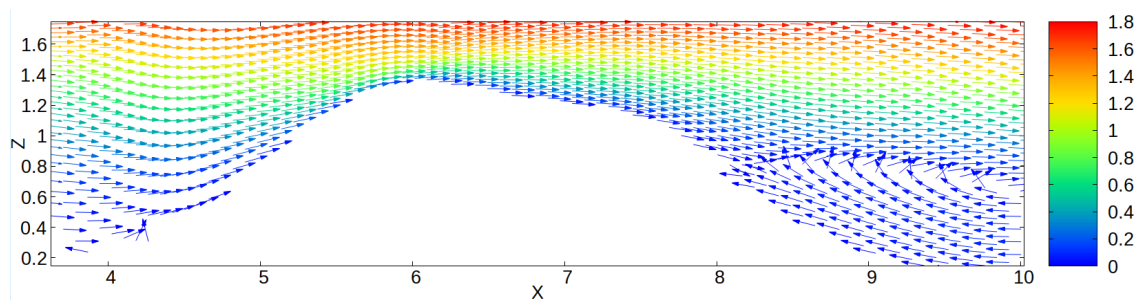
$$\begin{aligned} g(x) = & -0,25 + 2 [\arctan(3 - x) + \arctan(x - 2)] \\ & + \arctan(x - 7) + \arctan(6,5 - x) + \arctan(x - 5) + \arctan(8 - x) \\ & - 1,5 [\arctan(x - 3,5) + \arctan(4 - x)] . \end{aligned} \quad (15)$$

A solução numérica das equações (11), (12) e (13), apresentada nas figuras 6, 7 e 8, foi calculada no domínio  $\Omega'$ .



**Figura 6:** Perfil de velocidade  $U = \sqrt{u^2 + w^2}$  para o domínio  $\Omega'$ .

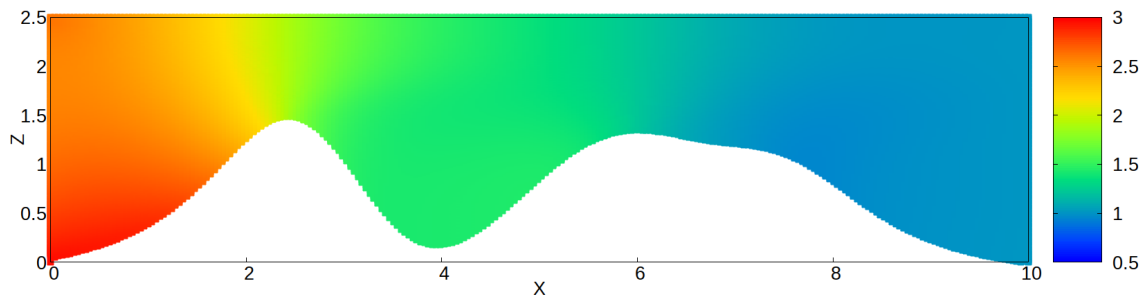
Fonte: Do autor.



**Figura 7:** Vórtice gerado na região côncava do domínio  $\Omega'$ .

Fonte: Do autor.





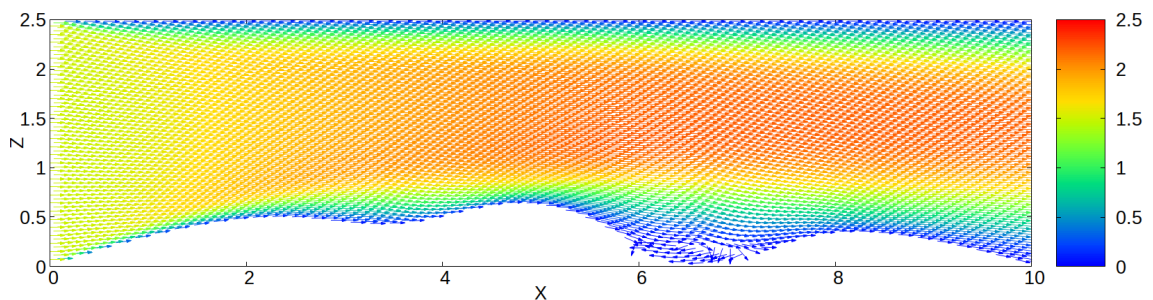
**Figura 8:** Distribuição de pressão no domínio  $\Omega'$ .

Fonte: Do autor.

Para o último teste, definimos um novo domínio  $\Omega''$  através da seguinte expressão para  $g(x)$ :

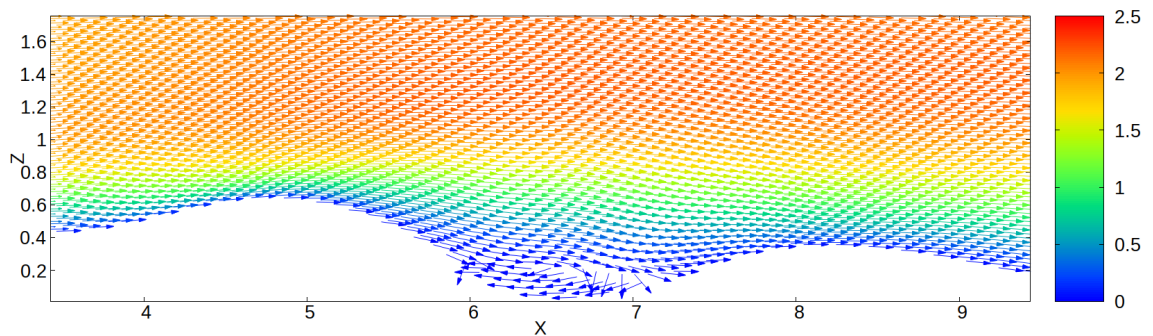
$$g(x) = 0,1 + \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) - \left(\frac{\arctan(2x-3)}{2} + \frac{\arctan(4-2x)}{2} + \arctan(x-6) + \arctan(7-x)\right). \quad (16)$$

Os resultados numéricos das equações (11), (12) e (13), apresentados graficamente nas figuras 9, 10 e 11, foram obtidos a partir de simulações realizadas no domínio  $\Omega''$ .



**Figura 9:** Perfil de velocidade  $U = \sqrt{u^2 + w^2}$  para o domínio  $\Omega''$ .

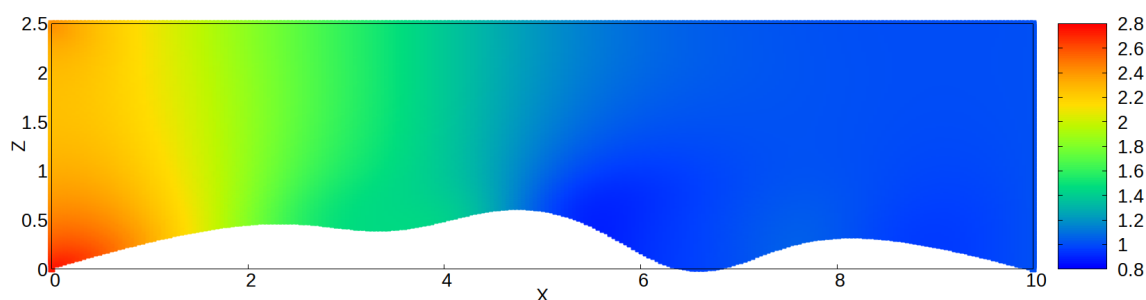
Fonte: Do autor.



**Figura 10:** Vórtice gerado na região côncava do domínio  $\Omega''$ .

Fonte: Do autor.





**Figura 11:** Distribuição de pressão no domínio  $\Omega''$ .

Fonte: Do autor.

A análise numérica do escoamento permitiu uma compreensão detalhada da complexidade do fluxo. As figuras 2, 6 e 9, apresentam o perfil de velocidade do fluido, destacando suas interações com a geometria do domínio e a formação de vórtices nas regiões côncavas, conforme evidenciado pela disposição dos vetores de velocidade nas figuras 3, 4, 7, 10. Além disso, as figuras 5, 8 e 11 complementam a análise ao representar a distribuição de pressão, expondo os gradientes que atuam na geração dos vórtices. A análise conjunta dessas figuras permite uma identificação precisa das regiões de alta vorticidade e de variações significativas de pressão. Oferecendo uma visão clara da complexidade do escoamento, conforme evidenciado pelos resultados numéricos apresentados.

A tabela 1 exibe os maiores valores do residual obtidos para cada uma das variáveis durante o processo de simulação. O residual é calculado isolando os termos das equações governantes (equações (11), (12) e (13)) e igualando-os a zero. Esse procedimento, detalhado por Meneghetti (2018), é importante para verificar a conservação das equações, onde o valor ideal para o residual seria nulo. Contudo, devido a erros numéricos inevitáveis associados ao método empregado, é esperado que os valores dos resíduos sejam não nulos, mas pequenos, refletindo a precisão do modelo utilizado.

**Tabela 1:** Valores máximos do operador residual para cada variável em cada caso teste.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
u	$9,4462 \times 10^{-7}$	$8.1923 \times 10^{-6}$	$1.0052 \times 10^{-6}$
w	$4,6738 \times 10^{-8}$	$1.0653 \times 10^{-6}$	$7.5578 \times 10^{-8}$
P	$2,3579 \times 10^{-6}$	$1.4573 \times 10^{-5}$	$1.4656 \times 10^{-6}$

Os resultados numéricos obtidos demonstraram a precisão do modelo em capturar a complexa interação entre o fluido e a geometria curvilínea. A interação complexa entre o contorno geométrico e o fluido resultou em padrões exclusivos de velocidade e pressão, ressaltando a necessidade de uma análise minuciosa do domínio para uma compreensão mais precisa dos fenômenos envolvidos. A aplicação da transformação difeomorfa provou ser uma abordagem eficaz para o estudo de escoamentos em geometrias complexas. Ao transformar diferentes domínios curvilíneos em geometrias retangulares, essa metodologia possibilitou a utilização de métodos numéricos convencionais de forma eficiente e precisa, simplificando significativamente o processo de simulação.

## REFERÊNCIAS

- Fedkiw, R., J. Stam, e H. W. Jensen (2001). “Visual Simulation of Smoke”. Em: *SIGGRAPH conference proceedings*. ACM.
- Hoffman, J. D (2001). *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. 2ª ed. New York: Marcel Dekker, p. 838.
- Maliska, C. R. (2004). *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. 2ª ed. rev. e ampliada. Rio de Janeiro: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.
- Meneghetti, A. (2018). “Soluções para problemas de dispersão e escoamento com condições de contornos curvilíneos por transformações difeomorfas conformes”. Tese de dout. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
- Ribeiro, R. e J. I. Yanagihara (1995). “Modelagem Hidráulica para Análise da Estabilidade de Camada de Água Quente em Reator de Piscina”. Em: *Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP* BT/PIVJC/66.
- Ruggiero, M. A. G. e V. L. da Rocha Lopes (1996). *Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais*. 2ª ed. São Paulo: Pearson, p. 424.
- Strikwerda, J (2007). *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. 2ª ed. Philadelphia: SIAM, p. 184.