



# Modelagem da dinâmica de um sistema hospedeiro-parasitoide da mosca-da-fruta

Matheus Moro Moutinho<sup>1\*</sup>; Leonardo Vieira Gonçalves<sup>2†</sup>  
Alexandre Molter<sup>3‡</sup>; Dori Edson Nava<sup>4§</sup>

**Resumo:** A relação entre a mosca-das-frutas sul-americana (*Anastrepha fraterculus*) e seu parasitoide (*Doryctobracon brasiliensis*) representa um importante caso de interação ecológica. Trata-se de uma praga agrícola importante, responsável por perdas econômicas e que demanda estratégias de controle. Com a restrição ao uso de pesticidas químicos, a busca por alternativas sustentáveis, como o controle biológico, se intensifica. O parasitoide *D. brasiliensis* age como um controlador natural ao utilizar as larvas da mosca como hospedeiro, diminuindo a população da praga. Do ponto de vista matemático, sistemas de equações diferenciais não lineares são empregados para modelar a dinâmica populacional da interação dessas duas espécies. Esses modelos permitem simular cenários variados e analisar como diferentes parâmetros, como taxas de reprodução e mortalidade, influenciam a coexistência das espécies. Através dessas simulações, é possível avaliar o impacto de relações ambientais e propor estratégias mais eficazes de controle biológico. O objetivo deste trabalho é propor um modelo matemático para descrever a interação entre *A. fraterculus* e *D. brasiliensis*, realizando uma análise dos parâmetros que influenciam a dinâmica, cujos valores correspondem à dados experimentais. As simulações numéricas apresentadas representam o comportamento qualitativo da mosca-da-fruta e seu parasitoide em laboratório.

**Palavras-chave:** Modelo Hospedeiro-Parasitoide; Mosca-da-Fruta; Parasitoide; Dinâmica.

\*matheus.thiago.moro@gmail.com

†lvgoncalves@inf.ufpel.edu.br

‡alexandre.molter@ufpel.edu.br

§dori.edson-nava@embrapa.br

<sup>1</sup>Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática (PPGMMat/UFPEL).

<sup>2</sup>Centro de Desenvolvimento Tecnológico (CDTec/UFPEL).

<sup>3</sup>Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática (PPGMMat/UFPEL).

<sup>4</sup>EMBRAPA Clima Temperado – Pelotas, RS.

# 1 INTRODUÇÃO

A modelagem matemática é uma importante ferramenta para o estudo das interações ecológicas, uma vez que pode fornecer uma base quantitativa para entender a dinâmica do ambiente e prever o comportamento de diferentes espécies ao longo do tempo. Um exemplo de interação entre populações é o da mosca-das-frutas sul-americana, *Anastrepha fraterculus* (Wiedemann, 1830) (Diptera, Tephritidae), e seu parasitoide, *Doryctobracon brasiliensis* (Szepligeti, 1911) (Hymenoptera, Braconidae). Este parasitoide se reproduz a partir da população da mosca, usando suas larvas como hospedeiras.

Alguns estudos realizados em municípios do estado de Santa Catarina demonstram que *A. fraterculus* foi a espécie constante, mais frequente, muito abundante e dominante (Garcia, Campos, e Corseuil, 2003). Ela está entre as espécies que mais atenção tem recebido pelo impacto negativo que causam na produção e comercialização de frutos (Aluja, 1994, Zucchi, 2000). O controle destas pragas vem sendo realizado de diferentes maneiras. No Brasil, com a retirada dos inseticidas organofosforados da grade de agrotóxicos registrados no Ministério da Agricultura e Pecuária (MAPA), o controle de moscas-das-frutas fica restrito ao uso de inseticidas químicos (Poncio, 2015). Há necessidade de buscar novas alternativas de manejo de moscas-das-frutas. A utilização de técnicas de supressão ou não impactantes para o ambiente, no manejo das moscas-das-frutas é fundamental para a implantação de sistemas produtivos equilibrados e sustentáveis. O controle biológico por meio da liberação de inimigos naturais representa uma alternativa ao controle químico destas pragas (Altafini, 2012).

O entendimento detalhado da interação descrita, entre *A. fraterculus* e seu parasitoide *D. brasiliensis* é fundamental para prever o comportamento populacional e desenvolver estratégias de controle biológico. Os modelos matemáticos simulam cenários e fornecem informações importantes para melhorar o uso de parasitoides neste controle, diminuindo a necessidade de pesticidas químicos e promovendo práticas mais sustentáveis. Assim, é possível melhorar o manejo de previsões e preservar a integridade ecológica dos sistemas agrícolas ao compreender as condições que garantem a coexistência entre as espécies.

A modelagem matemática, usando sistemas de equações diferenciais não lineares, é uma ferramenta para caracterizar as interações entre populações. Ela também permite examinar uma variedade de parâmetros que impactam a evolução no tempo destas populações. Ao capturar a complexidade inerente a essas relações ecológicas, os sistemas de equações diferenciais não lineares podem ser utilizados para descrever as interações entre a mosca-das-frutas sul-americana e seu parasitoide. É possível simular vários cenários ecológicos e avaliar como as disposições ou flutuações no ambiente podem impactar a estabilidade das populações.

O objetivo deste trabalho é propor um modelo matemático que descreva a dinâmica da mosca-das-frutas e seu parasitoide. Os coeficientes do modelo, que acompanham os termos da interação entre as duas populações, são obtidos a partir de dados experimentais.

Simulações computacionais são apresentadas e discutidas, sendo utilizadas para descrever o comportamento qualitativo do parasitismo do ponto de vista laboratorial.

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA DO SISTEMA

O modelo matemático consiste em um sistema hospedeiro-parasitoide, com três equações diferenciais ordinárias, considerando a interação entre a mosca e o seu parasitoide como uma resposta funcional Holling tipo II (Holling, 1959; Royama, 1971; Rogers, 1972; Juliano e Scheiner, 2001).

As populações consideradas no modelo são:  $x_1$ , que representa densidade de larvas da mosca-da-fruta;  $x_2$ , que representa densidade de moscas-da-fruta adultas, e  $x_3$ , que representa a densidade de parasitoides.

Na modelagem é considerado que a população das larvas atingem uma capacidade de suporte, que num pomar pode ser tomada por fruto. No entanto, no nosso caso, estamos levando em conta a dinâmica das populações em laboratório. Assim, podemos estimar o suporte por metro quadrado. Então, a variação da densidade de larvas no instante  $t$ , dada pela primeira equação, considera um termo de Verhulst, a mortalidade das larvas, as larvas que passam para o estágio de moscas e o termo de parasitismo.

Já a variação da densidade de moscas adultas no instante  $t$ , segunda equação, será proporcional à quantidade de larvas que se transformam em moscas, menos a quantidade de moscas mortas. De forma similar, a variação da densidade de parasitoides no instante  $t$ , terceira equação, será proporcional à quantidade de larvas de onde surgem parasitoides, menos a quantidade de parasitoides mortos.

Sendo assim, o modelo que representa a dinâmica dessas populações é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = rx_2 \left(1 - \frac{x_2}{k}\right) - \mu_1 x_1 - \gamma x_1 - \frac{ax_1 x_3}{1 + ahx_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} = \alpha_1 \gamma x_1 - \mu_2 x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = \delta \alpha_2 \frac{ax_1 x_3}{1 + ahx_1} - \mu_3 x_3. \end{cases} \quad (1)$$

No sistema (1) consideramos que toda larva não parasitada é convertida em mosca. A descrição dos parâmetros do sistema (1) são dados na tabela 1.

**Tabela 1:** Descrição dos parâmetros do sistema (1).

Parâmetro	Descrição
$r$	Taxa de reposição de larvas da mosca-da-fruta
$k$	Capacidade de suporte
$\mu_1$	Taxa de mortalidade natural de larvas
$\mu_2$	Taxa de mortalidade natural de moscas adultas
$\mu_3$	Taxa de mortalidade natural de parasitoides
$\gamma$	Conversão da população de larvas para moscas
$a$	Taxa de captura instantânea
$h$	Tempo de manipulação para o parasitismo
$\alpha_1, \alpha_2$	Fração de fêmeas
$\delta$	Conversão do parasitoide por larva

## 2.1 Pontos de equilíbrio do sistema e viabilidade biológica

Os pontos de equilíbrio do sistema (1) são calculados a partir do sistema algébrico:

$$\begin{cases} rx_2 \left(1 - \frac{x_2}{k}\right) - \mu_1 x_1 - \gamma x_1 - \frac{ax_1 x_3}{1 + ahx_1} = 0, \\ \alpha_1 \gamma x_1 - \mu_2 x_2 = 0, \\ \delta \alpha_2 \frac{ax_1 x_3}{1 + ahx_1} - \mu_3 x_3 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

de onde são encontrados três pontos de equilíbrio, dados por:

$$P_1 = (\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3) = (0; 0; 0) \quad (3)$$

$$P_2 = (\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3) = \left( \frac{\mu_2 k (\alpha_1 \gamma r - \mu_1 \mu_2 - \mu_2 \gamma)}{\alpha_1^2 n^2 r}; \frac{k (\alpha_1 \gamma r - \mu_1 \mu_2 - \mu_2 \gamma)}{r \alpha_1 \gamma}; 0 \right) \quad (4)$$

$$P_3 = (\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3) = \left( \frac{\mu_3}{a (\alpha_2 \delta - h \mu_3)}; \frac{\alpha_1 \gamma \mu_3}{a \mu_2 (\alpha_2 \delta - \mu_3 h)}; \frac{k a \alpha_1 \alpha_2 \mu_2 \gamma r \delta - k a \alpha_1 h \mu_2 \mu_3 \gamma r - k a \alpha_2 \mu_1 \mu_2^2 \delta - k a \alpha_2 \mu_2^2 \gamma \delta + k a h \mu_1 \mu_2^2 \mu_3 + k a h \mu_2^2 \mu_3 \gamma - \alpha_1^2 \mu_3 \gamma^2 r}{\mu_2^2 a^2 k (\delta \alpha_2 - \mu_3 h)^2} \right). \quad (5)$$

A viabilidade biológica dos pontos de equilíbrio exige que os valores de  $(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3)$  sejam zero, ou positivos, pois referem-se às populações. Portanto, podemos notar, do ponto de equilíbrio  $P_1$ , que ele é sempre biologicamente viável. Já o ponto de equilíbrio  $P_2$  será biologicamente viável se

$$\alpha_1 \gamma r \geq \mu_1 \mu_2 + \mu_2 \gamma. \quad (6)$$

O ponto de equilíbrio  $P_3$  será biologicamente viável se duas condições ocorrerem:

$$\alpha_2 \delta > \mu_3 h, \quad (7)$$

$$k a \mu_2 (\alpha_1 \alpha_2 \gamma r \delta - \alpha_1 h \mu_3 \gamma r - \alpha_2 \mu_1 \mu_2 \delta) \geq k a (\alpha_2 \mu_2^2 \gamma \delta - h \mu_1 \mu_2^2 \mu_3 - h \mu_2^2 \mu_3 \gamma) + \alpha_1^2 \mu_3 \gamma^2 r. \quad (8)$$

## 2.2 Estabilidade local dos pontos de equilíbrio

A estabilidade local dos pontos de equilíbrio é obtida a partir da matriz jacobiana (denominada de  $J$ ) do sistema (1), dada por:

$$J = \begin{bmatrix} -\mu_1 - \gamma - \frac{ax_3}{ahx_1 + 1} + \frac{a^2 x_1 x_3 h}{(ahx_1 + 1)^2} & r \left(1 - \frac{x_2}{k}\right) - \frac{rx_2}{k} & -\frac{ax_1}{ahx_1 + 1} \\ \alpha_1 \gamma & -\mu_2 & 0 \\ \frac{\delta \alpha_2 a x_3}{ahx_1 + 1} - \frac{\delta \alpha_2 a^2 x_1 x_3 h}{(ahx_1 + 1)^2} & 0 & \frac{\delta \alpha_2 a x_1}{ahx_1 + 1} - \mu_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Pode-se notar que, exceto para o ponto de equilíbrio  $P_1$ , haverá uma dificuldade de encontrar os autovalores da matriz jacobiana (9) em forma analítica, substituindo os

pontos de equilíbrio  $P_2$  e  $P_3$ . Portanto, para a análise requerida neste trabalho, é suficiente que atribuamos os valores dos parâmetros de acordo com a tabela 2 e calculemos os autovalores.

**Tabela 2:** Valores dos parâmetros do sistema (1).

Parâmetro	Valor	Unidade	Fonte
$r$	6,154	$\frac{[x_1]}{[x_2][t]}$	Calculado de Salles, 1995
$k$	1000	$[x_2]$	Estimado
$\mu_1$	0	$[t]^{-1}$	Estimado
$\mu_2$	0,009	$[t]^{-1}$	Calculado de Salles, 1995
$\mu_3$	0,048	$[t]^{-1}$	Calculado de Poncio, 2015
$\gamma$	0,033	$[t]^{-1}$	Calculado de Salles, 1995
$a$	3,026	$[t]^{-1}$	Calculado do experimento
$h$	0,084	$[t][x_1]^{-1}$	Calculado do experimento
$\alpha_1$	0,5	Adimensional	Bisognin <i>et al.</i> , 2013
$\alpha_2$	0,35	Adimensional	Poncio, 2015
$\delta$	0,6	$[x_3][x_1]^{-1}$	Escolhido entre 0,5 e 1,0

A partir dos valores dos parâmetros da tabela 2, os autovalores para a matriz jacobiana (9), para cada ponto de equilíbrio, são dados na tabela 3.

**Tabela 3:** Autovalores da matriz jacobiana (9) para os pontos de equilíbrio  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ .

Ponto de equilíbrio	Autovalor 1	Autovalor 2	Autovalor 3
$P_1$	-0,339	0,298	-0,048
$P_2$	-0,021 -0,317 $I$	-0,021 + 0,317 $I$	2,422
$P_3$	-11,025	-0,012	-0,035

Analizando os autovalores da tabela 3, é possível perceber que o ponto de equilíbrio  $P_3$  é estável, enquanto os pontos de equilíbrio  $P_1$  e  $P_2$  são instáveis. Sendo assim, o equilíbrio de coexistência das populações é estável.

### 3 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

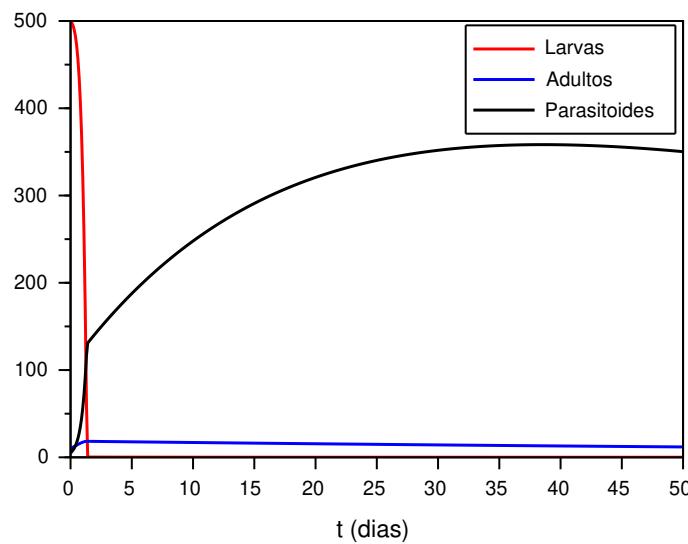
As simulações foram feitas com base nos valores dos parâmetros da tabela 2, os quais se referem à dados laboratoriais.

O ponto de equilíbrio estável,  $P_3$ , foi calculado como:

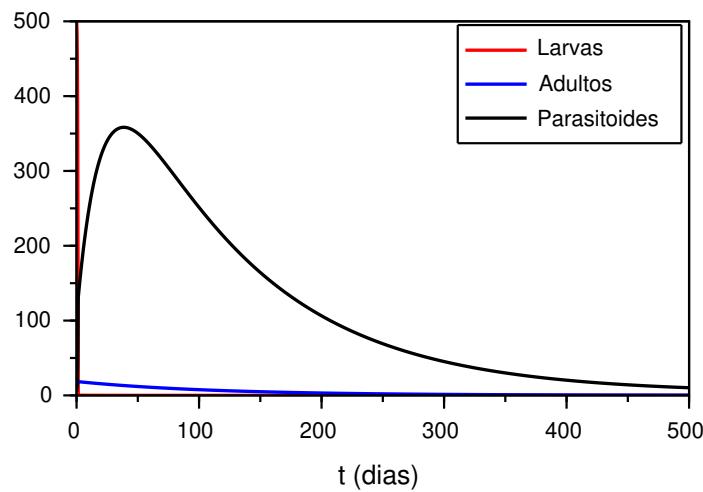
$$(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3) = (0,077; 0,141; 3,789) \quad (10)$$

As condições para a viabilidade biológica, equações (7) e (8), estão satisfeitas para o conjunto de parâmetros da tabela 2.

Nas figuras 1 e 2 são apresentadas as trajetórias temporais para as populações de larvas ( $x_1$ ), moscas adultas ( $x_2$ ) e parasitoides ( $x_3$ ), com as simulações de 50 e 500 dias, respectivamente. A condição inicial é (500, 10, 5). As simulações foram realizadas no *software* Scilab.



**Figura 1:** Trajetórias temporais para uma simulação de 50 dias.



**Figura 2:** Trajetórias temporais para uma simulação de 500 dias.

Para analisarmos os resultados das simulações vamos observar os dados experimentais do parasitismo descritos na tabela 4, cujos valores referem-se às médias dos dados experimentais.

**Tabela 4:** Parasitismo de larvas de *A. fraterculus* por *D. brasiliensis*

Larvas oferecidas	Média de larvas parasitadas	Taxa de larvas parasitadas
5	4,11	0,822
10	7,26	0,726
15	8,26	0,55
20	8,76	0,438
25	10,65	0,426
30	10,49	0,349

Podemos observar da tabela 4, que um parasitoide tem a capacidade de parasitar, em média, aproximadamente 10 larvas por dia. Portanto, observando o comportamento das populações na figura 1, podemos presumir que a queda abrupta da população de larvas se dá devido à alta capacidade de parasitismo deste parasitoide. Sendo assim, a população de larvas atinge o equilíbrio em menos de 5 dias, enquanto que a população de parasitoides vai ao equilíbrio após um longo período de tempo, como mostra a figura 2. Já a população das moscas não chega a aumentar significativamente, uma vez que as larvas são parasitadas em curto período de tempo.

## 4 CONCLUSÕES E DISCUSSÕES

Neste trabalho foi proposto um sistema dinâmico para descrever as interações da mosca-da-fruta (*A. fraterculus*) e seu parasitoide (*D. brasiliensis*). Foi feita a análise de estabilidade do sistema, donde foram encontrados três pontos de equilíbrio, sendo dois deles instáveis.

As simulações realizadas apresentaram resultados qualitativos sobre o comportamento do sistema hospedeiro-parasitoide. Ao comparar as trajetórias temporais do sistema, figuras 1 e 2, com os dados experimentais, tabela 4, observou-se significativa eficiência do parasitoide em controlar a população das moscas; isto porque a modelagem foi considerada para um ambiente controlado, de laboratório.

O modelo proposto neste trabalho foi condicionado à dinâmica populacional em ambiente de laboratório, já projetado para o controle da população das moscas. Num contexto de um pomar, as interações entre as populações têm interferências adversas, o que exige uma modelagem mais detalhada e levar em conta incertezas nos parâmetros.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à UFPel, à Fundação Getúlio Vargas/EMAp e à FAPERGS, pelo apoio financeiro.

## REFERÊNCIAS

- Altafini, D. L. (2012). “Parasitismo de *Diachasmimorpha longicaudata* (Asmead) (Hymenoptera: Braconidae) em *Anastrepha fraterculus* (Wiedemann) e *Ceratitis capitata* (Wiedemann) (Diptera: tephritidae): resposta funcional, superparasitismo e preferência”. Em: *Revista Brasileira de Entomologia* 56.4, pp. 499–506.
- Aluja, M. (1994). “Bionomics and management of *Anastrepha*”. Em: *Annual review of entomology* 39.1, pp. 155–178.

- Bisognin, M., D. E. Nava, H. Lisbôa, A. Z. Bisognin, M. S. Garcia, R. A. Valgas, G. I. Diez-Rodríguez, M. Botton, e L. E. C. Antunes (2013). “Biologia da mosca-das-frutas sul-americana em frutos de mirtilo, amoreira-preta, araçazeiro e pitangueira”. Em: *Pesquisa Agropecuária Brasileira* 48, pp. 141–147.
- Garcia, F. R., J. V. Campos, e E. Corseuil (2003). “Análise faunística de espécies de moscas-das-frutas (Diptera: Tephritidae) na região oeste de Santa Catarina”. Em: *Neotropical Entomology* 32, pp. 421–426.
- Holling, C. S. (1959). “Some characteristics of simple types of predation and parasitism.” Em: *The Canadian Entomologist*, 91, pp. 385–398.
- Juliano, S. A. e J. Scheiner S. M.; Gurevitch (2001). *Nonlinear curve fitting: predation and functional response curves*. Design e Analysis of Ecological Experiment. New York, NY: Oxford University Press.
- Poncio, S. (2015). “Bioecologia e técnicas de criação de parasitoides (Hymenoptera) nativos de três espécies de *Anastrepha* no Brasil e no México”. Em.
- Rogers, D. (1972). *Random search and insect population models*. Vol. 41, 2, Journal of Animal Ecology, pp. 369–383.
- Royama, T. (1971). *A comparative study of models for predation and parasitism. Researches on Population Ecology*. Researches on Population Ecology, pp. 1–91.
- Salles, L. (1995). *Bioecologia e controle da mosca-das-frutas sul-americana*. Pelotas, Brazil: EMBRAPA-CPACT.
- Zucchi, R. A. (2000). “Espécies de *Anastrepha*, sinônimas, plantas hospedeiras e parasitóides”. Em: *Moscas-das-frutas de importância econômica no Brasil: conhecimento básico e aplicado*, pp. 41–48.