10º CONFERÊNCIA SUL EM MODELAGEM COMPUTACIONAL
X SEMINÁRIO E WORKSHOP EM ENGENHARIA OCEÂNICA
11, 12 e 13 de setembro de 2024 / Universidade Federal do Rio Grande - FURG/ Rio Grande - RS

Modelagem matemática do parasitismo da mosca-das-frutas sul-americana

Matheus Moro Moutinho[1]*; Alexandre Molter[2]†; Dori Edson Nava[3]‡

Resumo: A mosca-das-frutas sul-americana, *Anastrepha fraterculus* (Diptera: Tephritidae), é a principal espécie do gênero e que infesta uma grande quantidade de hospedeiros cultivados e nativos da região Neotropical. Uma infestação de *A. fraterculus* pode trazer grandes problemas para a agricultura, resultando em perdas econômicas significativas devido à redução da qualidade e quantidade da produção. Para mitigar as perdas na produção, se torna necessário o controle da mosca-das-frutas. Dentre as técnicas de manejo está o controle biológico, onde predadores, parasitoides e entomopatogenos atuam sobre os diferentes estágios de vida de *A. fraterculus*. O objetivo do presente trabalho é apresentar uma modelagem matemática para o controle biológico através do parasitismo da mosca-das-frutas sul-americana, por *Doryctobracon brasiliensis*. O modelo a ser utilizado para resposta funcional é o de Holling tipo II. A partir de dados experimentais serão encontrados os parâmetros do modelo, via métodos de ajuste de curvas. Serão analisadas e discutidas duas formas de calcular os valores dos parâmetros e ajustar às curvas aos dados experimentais, uma por mínimos quadrados e outra por identificação de parâmetros utilizando as equações diferenciais. O nível de saturação do parasitismo será calculado a partir da resposta funcional do tipo II. Serão apresentadas simulações computacionais para as funções de otimização propostas e apresentados os parâmetros correspondentes à resposta funcional.

Palavras-chave: Hospedeiros; Parasitoides; Interação; Modelagem Matemática; Resposta Funcional; Controle Biológico

*matheus.thiago.moro@gmail.com
†alexandre.molter@ufpel.edu.br
‡dori.edson-nava@embrapa.br
[1]Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática (PPGMMat/UFPEL).
[2]Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática (PPGMMat/UFPEL).
[3]EMBRAPA Clima Temperado – Pelotas, RS.

1 Introdução

A mosca-das-frutas sul-americana *A. fraterculus* (Wiedemann, 1830) é considerada a principal praga da fruticultura de clima temperado e sub-tropical, o que inclui todo o território brasileiro. Por causar perdas econômicas, tem-se a necessidade da adoção de medidas de controle deste inseto-praga (Nava e Botton, 2010). O controle populacional de *A. fraterculus* pode ser feito tando por inseticidas, quanto por agentes biológicos. Nos últimos anos os inseticidas organofosforados sistêmicos estão sendo retirados gradativamente do mercado a nível mundial e o uso apenas de inseticidas químicos de ação de contato e ingestão não é suficiente. Desta forma surgiu a necessidade de novas alternativas de controle de moscas-das-frutas na fruticultura e que possam ser utilizadas em diferentes estratégias de manejo, causando menor impacto no meio ambiente e no homem. Uma alternativa, com crescente utilização, é o controle biológico.

O controle biológico é um fenômeno natural que consiste na regulação do número de plantas e animais por inimigos naturais, os que se consituem nos agentes de mortalidade biótica (Parra, 2002). É uma estratégia utilizada na agricultura e na gestão de ecossistemas para controlar populações de pragas de forma natural e sustentável, muitas vezes utilizando predadores, parasitoides, ou patógenos para reduzir as populações de pragas. O objetivo deste tipo de controle é equilibrar populações de pragas, minimizando outros métodos prejudiciais ao meio ambiente.

O potencial de agentes para controle biológico pode ser avaliado de várias formas, entre elas, pela resposta funcional, que mede a taxa de predação ou parasitismo em função da densidade da presa ou hospedeiro. A resposta funcional fornece parâmetros comportamentais envolvidos no processo de parasitismo, permitindo realizar comparações e estimativas, que poderão indicar o potencial de sucesso do agente estudado (Faria, Torres, e Farias, 2000). A modelagem matemática no estudo do parasitismo torna-se uma ferramenta fundamental para compreender a dinâmica das interações entre parasitas e seus hospedeiros. Quando empregada a resposta funcional, o principal interesse é a forma e os parâmetros da curva de resposta, que define o número de presas atacadas em função da densidade de presas, ou hospedeiros parasitados em função da densidade de hospedeiros.

A resposta funcional pode assumir três formas básicas mais usuais. O primeiro tipo (tipo I) é provavelmente incomum na natureza, pois o número de hospedeiros parasitados pelo parasitoide em função da densidade do hospedeiro segue uma trajetória linear. O segundo tipo de resposta (tipo II) é provavelmente o mais comum, pois o parasitoide atinge o ponto de saturação em termos de parasitismo após uma determinada densidade de hospedeiros. O terceiro tipo de resposta (tipo III) é caracterizada por um período inicial com baixa taxa de parasitismo, seguido por uma curva exponencial que termina em saturação, como na resposta tipo II, o que sugere um padrão sigmoide de parasitismo do hospedeiro (Holling, 1959, Holling, 1961, Pritchard *et al.*, 2017).

Neste trabalho, será analisada a interação hospedeiro-parasitoide para o caso de parasitismo entre *A. fraterculus* e seu parasitoide, *D. brasiliensis*. Para estabelecer a

diâmica desta iteração serão utilizados dados experimentais. Serão obtidos os parâmetros para o modelo da resposta funcional do tipo II. Duas formas de obtenção dos parâmetros serão analisadas. Uma é por ajuste de curvas usando o método de Mínimos Quadrados, e a outra por identificação de parâmetros, minimizando uma função de custo, utilizando as equações diferenciais do modelo e os dados experimentais. Simulações numéricas serão apresentadas e discutidas.

2 Modelo matemático do parasitismo

No modelo estudado e no experimento realizado, o comportamento dos parasitoides é similar ao de um predador, exceto pelo fato de não cosumir o hospedeiro, pois ele parasita somente um individuo ainda não parasitado, o que leva ao esgotamento da oferta dos hospedeiros. Além disto, há uma saturação no parasitismo, levando a um parasitismo máximo. Desta forma, consideramos a equação do disco de (Holling, 1959), para uma densidade constante de parasitoides, Y, e para uma densidade constante de hospedeiros, X. A equação do disco descreve a interação presa-predador (Holling, 1959), mas também é utilizada para descrever a interação hospedeiro-parasitoide (Holling, 1959, Rogers, 1972, Juliano e Scheiner, 2001), e é dada por:

$$N = \frac{aTXY}{1 + ahX}, \tag{1}$$

onde N corresponde ao número de encontros realizados por um parasitoide (presa morta), T é o tempo total durante o qual os hospedeiros ficam expostos ao parasitoide (o tempo do experimento), h é o tempo levado pelo parasitoide para lidar com um hospedeiro, a é a taxa de busca do parasitoide (eficiência de busca por unidade de tempo).

A equação (1) descreve o parasitismo e, portanto, é uma função positiva. Se houver uma taxa de esgotamento na densidade do hospedeiro, é uma função negativa do hospedeiro (x é a variação do hospedeiro), a população do hospedeiro é reduzida de acordo com o número de hospedeiros parasitados. Como houve esgotamento de hospedeiros no experimento (sem reposição de hospedeiro), levando em consideração o efeito da diminuição do parasitismo, a equação (1) será avaliada por integração, com uma densidade de parasitoides fixa, resultando na equação diferencial (Royama, 1971):

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{axY}{1 + ahx}. \tag{2}$$

O termo de parasitismo em um modelo de interação hospedeiro-parasitoide representa a taxa na qual os hospedeiros são parasitados. Ele é considerado fundamental em modelos do tipo hospedeiros-parasitoides, pois é nele onde está a essência da dinâmica da interação das populações. Esse termo vai descrever a taxa em que os hospedeiros são parasitados.

2.1 Estimação dos parâmetros a e h, usando a função W-Lambert

Considerando uma densidade inicial de hospedeiros x_0 quando $T = 0$, e $x_e = x_0 - x$ o número de hospedeiros parasitados, por unidade de área durante T, integrando (2) resulta em

$$x_e = x_0 \left(1 - e^{-a(YT - hx_e)}\right), \tag{3}$$

chamada função decrescente de presa do tipo II de Rogers e representa o número de hospedeiros ou presas atacadas, que aumenta a uma taxa decrescente à medida que a densidade do hospedeiro aumenta (Rogers, 1972).

Pode-se observar que (3) é uma função implícita e, neste caso, pode ser resolvida usando a função W-Lambert (Bolker, 2008, Lehtonen, 2016). Reescrevendo a equação (3) em termos da função W-Lambert como:

$$x_e = x_0 - \frac{W\left(ahx_0 e^{-a(YT - hx_0)}\right)}{ah}, \tag{4}$$

o processo de mínimos quadrados pode ser utilizado para ajustar a função aos dados experimentais, levando a um sistema algébrico não linear, cuja resolução pode ser obtida pelo Método de Gauss-Newton (Björck, 1996).

Em alguns casos há restrições experimentais e a saturação do parasitismo ao longo da vida do parasitoide não pode ser verificada. Ou ainda, os dados experimentais podem configurar uma solução diferente para o formato da função de W-Lambert. Em particular, para os dados experimentais utilizados neste trabalho, não foi possível computar os valores dos parâmetros a e h pela implementação do método de mínimos quadrados feito no Maple. Em casos como este, uma forma de obter os parâmetros do modelo é através de um processo de otimização, também chamado de identificação de parâmetros. Partiu-se, então, para o método de estimação dos parâmetros utilizando as equações diferenciais.

2.2 Estimação dos parâmetros a e h usando a equação diferencial

Considere a equação diferencial (2), onde são conhecidos os valores de Y e a oferta inicial de hospedeiros, x_0, em $T = 0$. Iremos integrar a equação (2) sobre o intervalo de tempo $[0, T]$ para cada x_0 dado. Do experimento, sabemos a quantidade de hospedeiros parasitados e não parasitados (denominamos os não parasitados de $\bar{x}$) para cada oferta de x_0, após o período de exposição T. Portanto, para cada oferta de x_0 temos a quantidade de hospedeiros parasitados no tempo $T = 1$ (tempo de exposição dos hopedeiros ao parasitoide foi de um dia), obtidos da solução da equação (2) e dos valores conhecidos pelo experimento.

Temos dois parâmetros a serem identificados, a e h. Sendo assim, haverá um intervalo de busca para a, cujos valores tomaremos como a_i, e um intervalo de busca para h, cujos valores tomaremos como h_j. Para cada x_0 e cada valor do par (a_i, h_j) calcularemos o desvio entre x_{ij} (solução da equação (2) em T para cada par (a_i, h_j)) e como conhecemos

$\bar{x}_k$ (hospedeiros não parasitados medidos), obtemos a função erro:

$$E(a_i, h_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(x_{ij} - \bar{x}_k\right)^2}, \tag{5}$$

onde m é a quantidade de diferentes condições iniciais (x_0) usadas no experimento. Considerando θ o mínimo da função $E(a_i, h_j)$, minimizando o erro quadrático, obtemos:

$$\theta = \arg\min_{a,h} E(a_i, h_j) \tag{6}$$

O menor valor de θ corresponde ao melhor par ordenado (a, h). Para garantir que o melhor valor de a e h tenha sido atingido, o valor mínimo de θ deve corresponder a valores de a e h de dentro do intervalo de busca, e não da borda. Se estiver na borda pode ocorrer de existirem valores melhores fora do intervalo de busca, o que sugere a ampliação do intervalo.

3 Principais resultados

O experimento de parasitismo foi conduzido com exposição dos hospedeiros a um parasitoide, durante um dia, a uma temperatura de 24°C, e uma replicação de vinte vezes para cada oferta de larvas. Os valores descritos na tabela abaixo referem-se às médias dos valores obtidos do experimento.

Tabela 1: Parasitismo de larvas de *A. fraterculus* por *D. brasiliensis*

Número de larvas (X_0)	Média do número de parasitados	Taxa de parasitados
5	4,11	0,822
10	7,26	0,726
15	8,26	0,55
20	8,76	0,438
25	10,65	0,426
30	10,49	0,349

Para o ajuste da curva de resposta funcional via solução do processo de otimização foram utilizados os intervalos $a = [2,5; 3,5]$ e $h = [0,04; 0,12]$, com passo incremental de $0,1$ para a e $0,008$ para h. Desta forma, foram encontrados os valores ótimos, sendo eles $a = 3,0263$ e $h = 0,0844$. Substituindo estes valores na equação (2), obtemos:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3,0263xY}{1 + 0,2541x}. \tag{7}$$

sendo reescrita em termos da função W-Lambert, que descreve o parasitismo do experimento, como (com $Y = 1$):

$$x_e = x_0 - \frac{W\left(0,2554x_0 e^{-3,0263(T-0,0844x_0)}\right)}{0,2554}, \tag{8}$$

Na figura 1 é apresentada a função W-Lambert.

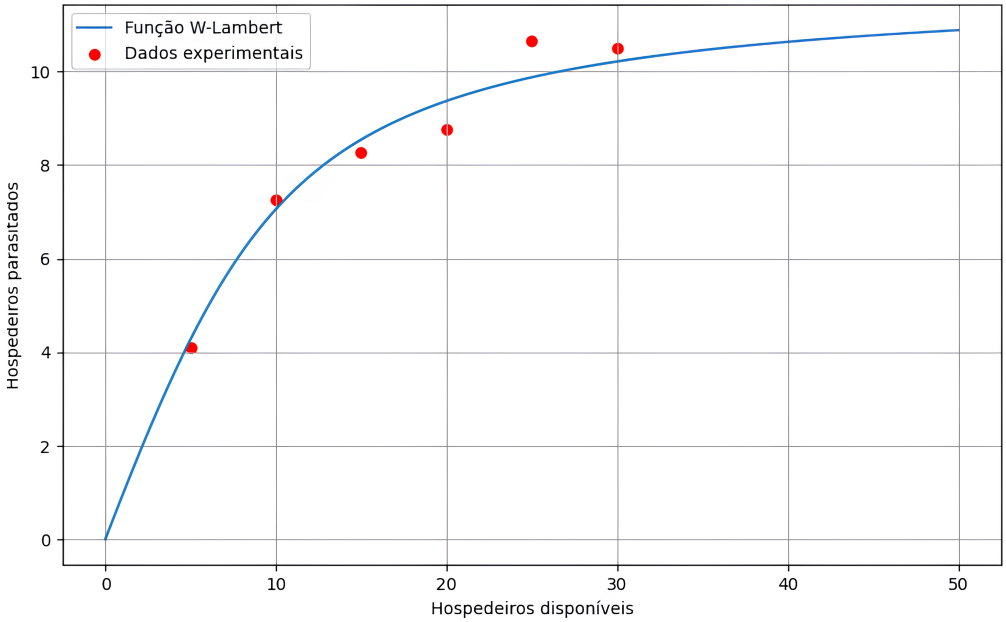

Figura 1: Gráfico da função W-Lambert para os dados de parasitismo de *A. fraterculus* por *D. brasiliensis*, equação 8.

A figura 2 apresenta o gráfico da função E, equação (5), para os diferentes valores de a e h.

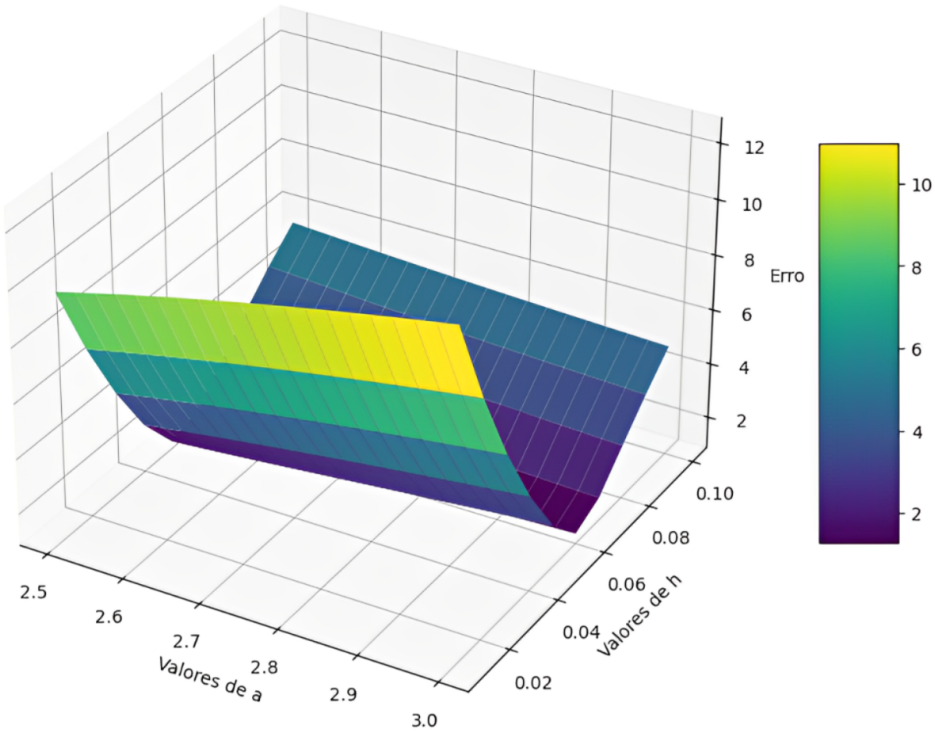

Figura 2: Superfície dos erros para os valores de a e h obtidos no parasitismo de *A. fraterculus* por *D. brasiliensis*, equação 5.

O valor de θ, equação (6), é $1,094$, que corresponde aos melhores valores encontrados

para a e h.

A figura 3 apresenta a curva da função E, no plano de corte do eixo h, no ponto de mínimo.

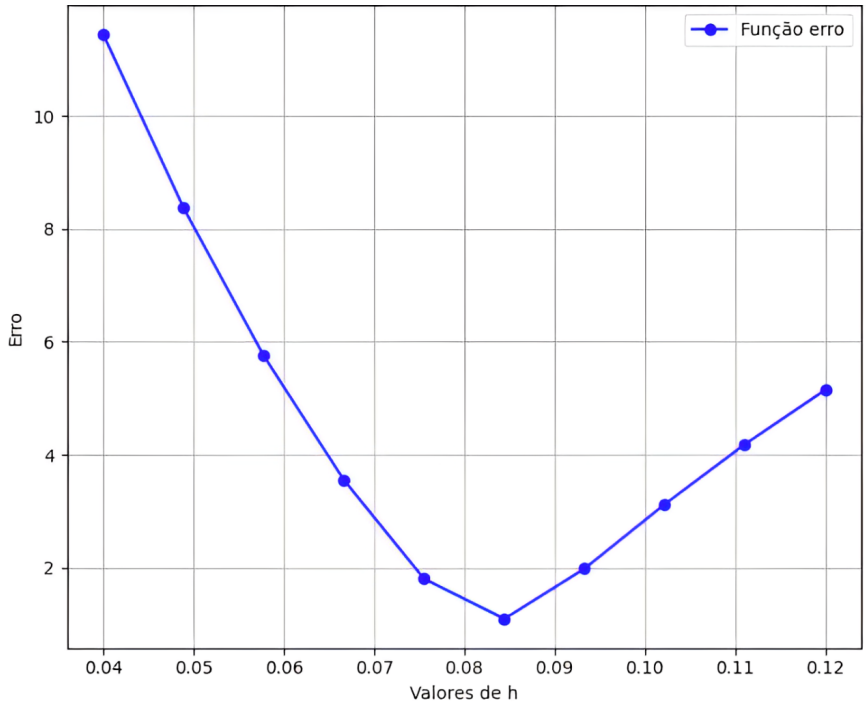

Figura 3: Erros para valores de h obtidos no parasitismo de *A. fraterculus* por *D. brasiliensis*.

A figura 4 apresenta a curva da função E, no plano de corte do eixo a, no ponto de mínimo.

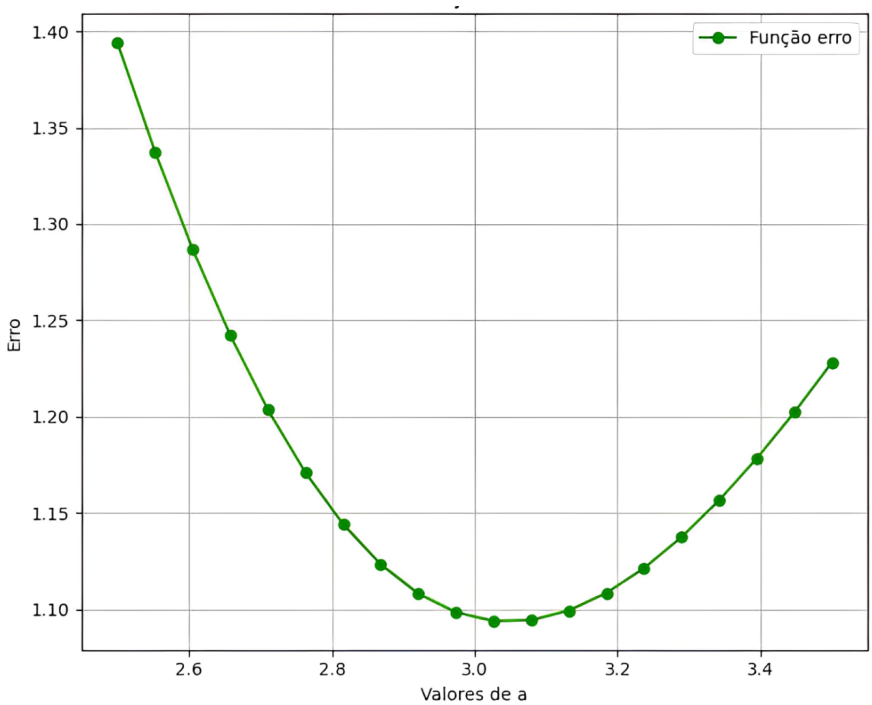

Figura 4: Erros para valores de a obtidos no parasitismo de *A. fraterculus* por *D. brasiliensis*.

Como o tempo de manuseio h determina a taxa máxima de parasitismo, ou seja, a saturação, pela equação (1) é possível obter este valor, dado por $\frac{1}{h}$. No presente trabalho a saturação ficou em 12, o que quer dizer que por mais que se aumente a oferta dos hospedeiros, a quantidade de hospedeiros parasitados não passará de 12, em média.

4 Conclusão

Este trabalho teve como objetivo apresentar uma modelagem matemática para o parasitismo da mosca-das-frutas sul-americana, *A. fraterculus*, pelo parasitoide *D. brasiliensis*. A dinâmica do sistema foi descrita através de um modelo hospedeiro-parasitoide e utilizando uma resposta funcional do tipo II. Os parâmetros do modelo foram estimados através de um processo de otimização. A resposta funcional encontrada é de fundamental importância para a dinâmica das populações envolvidas uma vez que ela contém a informação de como estas duas espécies interagem entre si. A taxa do parasitismo constitui o principal termo das equações, além de conter a informação sobre o controle da população de pragas.

A partir dos valores dos parâmetros, estabeleceu-se o nível de saturação do parasitismo, que teve seu valor calculado em $\frac{1}{h} = 12$. Este valor tem grande importância para a criação massal de parasitoides e no controle biológico das moscas-das-frutas.

Para trabalhos futuros pretende-se descrever o modelo matemático completo da dinâmica populacional da mosca-da-fruta e seu parasitoide e formular o controle de sua população.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação Getúlio Vargas/EMAp e à FAPERGS, pelo apoio financeiro.

Referências

Björck, Å. (1996). *Numerical methods for least squares problems*. SIAM.

Bolker, B. M. (2008). *Ecological models and data in R*. Princeton University Press.

Faria, C. A., J. B. Torres, e A. M. Farias (2000). "Controle Biológico de Pragas". Em: *Revista Brasileira de Entomologia,* 29.1, pp. 85–93.

Holling, C. S. (1959). "Some characteristics of simple types of predation and parasitism." Em: *The Canadian Entomologist,* 91, pp. 385–398.

Holling, C. S. (1961). "Principles of insect predation". Em: *Annual review of entomology* 6.1, pp. 163–182.

Juliano, S. A. e J. Scheiner S. M.; Gurevitch (2001). *Nonlinear curve fitting: preadation and functional response curves.* Design e Analysis of Ecological Experiment. New York, NY: Oxford University Press.

Lehtonen, J. (2016). "The Lambert W function in ecological and evolutionary models". Em: *Methods in Ecology and Evolution* 7.9, pp. 1110–1118.

Nava, D. E. e M. Botton (2010). "Bioecologia e controle de Anastrepha fraterculus e Ceratitis capitata em pessegueiro." Em: *Embrapa Clima Temperado*, pp. 1–29.

Parra, J. R. P. (2002). *Controle biológico no Brasil: parasitóides e predadores*. Editora Manole Ltda.

Pritchard, D. W., R. A. Paterson, H. C. Bovy, e D. Barrios-O'Neill (2017). "Frair: um pacote R para ajustar e comparar respostas funcionais do consumidor". Em: *Wiley Sociedade Ecológica Britânica*, 1528–1534.

Rogers, D. (1972). *Random search and insect population models.* Vol. 41, 2, Journal of Animal Ecology, 478–486.

Royama, T. (1971). *A comparative study of models for predation and parasitism. Researches on Population Ecology*. Researches on Population Ecology, pp. 1–91.