

Acordes Musicais usados para incentivar o ensino de funções trigonométricas

Gilcélia Regiane de Souza¹
PROFMAT UFSJ-CAP, Ouro Branco, MG

Resumo. Os acordes musicais são elementos da música que formam a base de todos os arranjos e composições musicais. Em uma orquestra, por exemplo, alguns instrumentos (como flauta, violino solo, trompete) reproduzem frases compostas por uma sequência de notas musicais, enquanto que outros (piano, conjunto de instrumentos de cordas) reproduzem notas simultâneas que se combinam entre si, formando assim a base harmônica da música. O papel desta base é preencher os espaços de tempo e fazer uma conexão com os instrumentos solos, ou o vocal. Este trabalho é fruto da dissertação de mestrado do aluno Willsander de Jesus [4] que tem como objetivo converter elementos musicais em elementos matemáticos, para que possamos enxergá-los em uma outra perspectiva, e através de ferramentas computacionais estudar a formação, a identificação e a classificação destes acordes. Com base neste objetivo, foi desenvolvido um algoritmo com esta finalidade. Em poucas palavras, este algoritmo (i) calcula a transformada de Fourier do acorde para identificar suas componentes em frequência; (ii) aplica a equação da escala temperada para estabelecer a relação entre estas frequências e (iii) classifica o acorde a partir dos conceitos da Teoria Musical. Aqui nós limitamos apenas no incentivo ao estudo das funções e na aplicação no ensino médio.

Palavras chave: Música, acordes musicais, ondas sonoras, funções trigonométricas, ensino médio.

1 Introdução

A música é dividida em três partes principais: a melodia, a harmonia e o ritmo [1]. A *melodia* é a combinação de sons sucessivos (dados uns após os outros), a *harmonia* é a combinação de sons simultâneos (dados de uma só vez) e o *ritmo* é o que define o andamento da música. Os instrumentos musicais também podem ser separados em três categorias: *melódicos* (saxofone, flauta, trompete, etc.), *harmônicos* (violão, piano) e *rítmicos* (bateria, percussão). Neste trabalho abordaremos os instrumentos harmônicos, pois são eles que formam a estrutura base da música, constituída pelos acordes musicais.

Um *acorde musical* é um sinal sonoro constituído por pelo menos 3 notas musicais simultâneas. Os acordes mais utilizados na música são divididos em dois grupos fundamentais: os *acordes tríades* (com 3 notas) e os *acordes tétrades* (com 4 notas), ver Figura 1. Também existem acordes com mais de 4 notas, mas a aplicação destes é mais rara nas músicas convencionais. Para cada tipo de acorde, existe uma estrutura e uma representação diferente. Estas estruturas seguem conceitos e definições da Teoria Musical [3]. Na prática, os acordes formam a base de qualquer harmonia musical: onde existe música, existem acordes.

Para compreendermos uma aplicação prática do acorde, podemos dar o exemplo de um músico tocando violão ou um piano. As posições e montagens que o músico faz no braço do violão formam os acordes e seu som é caracterizado por produzir uma sensação de preenchimento na música. O mesmo ocorre no caso de um músico tocando o piano, as variações dos dedos nas

¹gilcelia@ufs.br

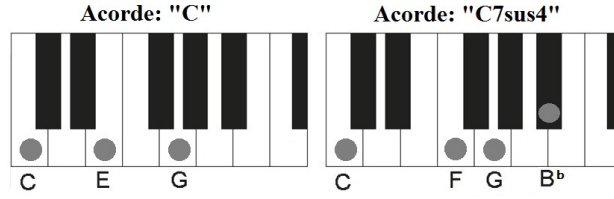


Figura 1: Exemplos de acordes executados em um teclado (acorde tríade à esquerda / acorde tétrade à direita). Fonte: [2]

teclas produzem acordes diferentes, conforme ilustra a Figura 1. Os acordes tríades são mais básicos e mais fáceis de serem executados na prática, sendo amplamente utilizados por músicos profissionais e iniciantes. Já os tétrades exigem um maior domínio do instrumento musical e eles são aplicados com maior frequência em estilos musicais mais sofisticados como o *Jazz* e a *Bossa Nova*. Cada acorde possui um som bem característico, uns transmitem uma sensação de alegria, outros de tristeza e melancolia, outros de suspense; uns são mais brilhantes, enquanto outros são mais fechados.

Este trabalho tem como objetivo principal coletar os sinais sonoros de vários acordes musicais executados em um piano (ou teclado), por exemplo, enviar estes sinais para o computador e, através de técnicas matemáticas e algoritmos, identificá-los e classificá-los. A Figura 2 ilustra o esquema do processo.

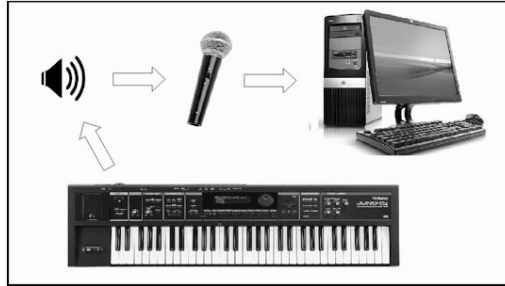


Figura 2: Diagrama esquemático do processo. Fonte:[4]

Por se tratar de sinais sonoros, abordaremos alguns conceitos da física do som como, por exemplo, amplitude (A) e frequência (F). Estes parâmetros definem uma nota musical, onde a amplitude está associada à intensidade do som (ou volume) e a frequência está associada à altura do som, ou seja, notas mais graves (baixa vibração / baixa frequência) ou mais agudas (alta vibração / alta frequência).

Abordaremos também conceitos que permitirão enxergar a música de forma matemática. Falaremos sobre a modelagem de uma onda sonora e da representação matemática de um acorde musical. Resumidamente, cada nota musical pode ser modelada por uma função periódica do tipo

$$f(t) = A \sin(2\pi F \cdot t)$$

onde F é a frequência da nota musical e A sua amplitude. Com base nestas definições, podemos entender um *acorde musical* (acm) como uma combinação de ondas sonoras, ou seja,

$$acm(t) = \sum_{i=1}^n A_i \sin(2\pi F_i \cdot t)$$

onde F_i e A_i são, respectivamente, a frequência e a amplitude de cada onda sonora i .

Todas as figuras apresentadas ao longo do trabalho são de autoria própria. Elas foram construídas utilizando o *Geogebra* (<https://www.geogebra.org>) e o *PowerPoint*.

2 Metodologia

A metodologia compreende uma revisão bibliográfica e a realização de estudos e roteiros para uma prática em sala de aula.

3 Resultados e Discussão

No ensino básico, a música é uma boa motivação para introduzir o estudo das funções trigonométricas, como por exemplo, a função seno, que pode ser utilizada para descrever uma nota (i) ou um acorde musical (ii):

$$f(t) = A_i \sin(2\pi F_i \cdot t) \quad (i)$$

$$g(t) = A_1 \sin(2\pi F_1 \cdot t) + A_2 \sin(2\pi F_2 \cdot t) + \dots + A_k \sin(2\pi F_k \cdot t). \quad (ii)$$

onde A_i (com $i = 1, \dots, k$) são as amplitudes das notas musicais que compõem este acorde e F_i as frequências associadas a estas notas.

Vinculada a esta motivação, podemos inserir também recursos digitais para auxiliar os alunos na compreensão das funções trigonométricas.

3.1 Utilização do Geogebra no Estudo das Funções

Com a inclusão digital presente nos dias de hoje, grande parte dos alunos possuem acesso a algum computador ou *smartphone*. Estes veículos tecnológicos podem ser incorporados no aprendizado da matemática, permitindo que os alunos utilizem aplicativos gráficos para solidificar os conteúdos teóricos apresentados em sala. Destacamos o *Geogebra*, que é um *software* gratuito que pode ser empregado no ensino da matemática básica e avançada. No link <https://www.geogebra.org/download> encontramos versões disponíveis para iOS, Android, Windows, Mac e Linux. Por ser de fácil acesso, esta ferramenta pode ser usada para ampliar o conhecimento, pois através das funções gráficas disponíveis os alunos podem esboçar diversas funções e interagir com o aplicativo para observar as variações provocadas pela alteração de parâmetros e variáveis.

3.1.1 Utilização do Geogebra no Estudo das Funções Trigonômétricas

O estudo das funções trigonométricas pode ser muito mais interessante mediante a utilização destes recursos digitais, uma vez que grande maioria dos alunos apresenta dificuldades em esboçá-las. Utilizando o aplicativo do Geogebra conseguimos transformar funções em figuras ilustrativas de ótima qualidade, além de podermos criar pequenas animações, sendo assim um processo divertido.

Para ilustrar a utilização deste aplicativo, criaremos primeiramente o gráfico da função trigonométrica seno e atribuiremos a uma constante k um valor variável, através do “controle deslizante” disponível no aplicativo (com k variando de 0 a 5). Desta forma, podemos perceber o efeito que a constante k produz na amplitude da função estudada:

$$f(x) = k \sin(x). \quad (1)$$

Após inserirmos esta equação no aplicativo, definimos a variável k como um controle deslizante. Automaticamente surge na janela de visualização um controle deslizante que nos permite alterar o valor de k deslizando o dedo na tela do celular. A utilização deste recurso pode ser uma ótima alternativa para apresentar as funções trigonométricas aos alunos do ensino médio. Abaixo temos as Figuras 3, 4 e 5 obtidas para $k = 1$, $k = 3$ e $k = 5$, respectivamente, utilizando o aplicativo no celular.

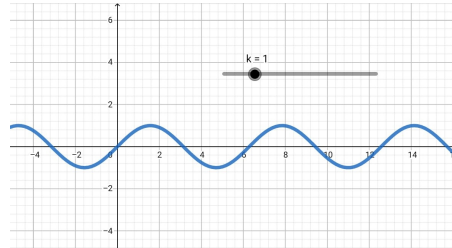


Figura 3: $f(x) = \text{sen}(x)$ (Geogebra).

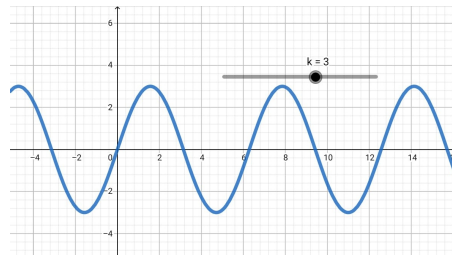


Figura 4: $f(x) = 3 \text{sen}(x)$ (Geogebra).

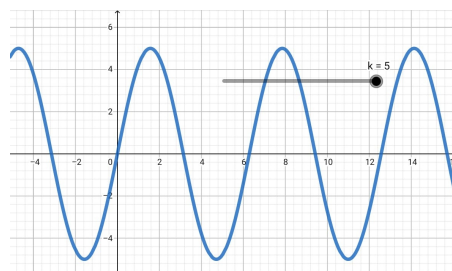


Figura 5: $f(x) = 5 \text{sen}(x)$ (Geogebra).

Semelhantemente, podemos observar o efeito produzido quando multiplicamos o argumento da função seno por uma constante ω :

$$g(x) = \text{sen}(\omega x). \quad (2)$$

Nas ilustrações apresentadas nas Figuras 6 e 7, utilizamos o controle deslizante definido por $0 \leq \omega \leq 5$ e obtemos os resultados para $\omega = 1$ e $\omega = 3$, respectivamente. A partir da observação dos resultados obtidos com a variação do parâmetro ω , podemos introduzir aos alunos o conceito de frequência angular de forma bem simples.

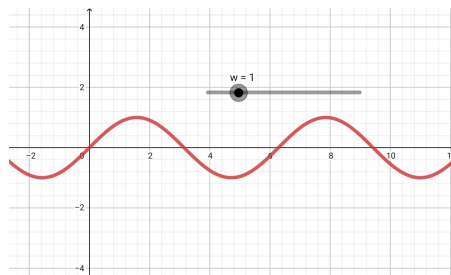


Figura 6: $g(x) = \text{sen}(x)$ (Geogebra).

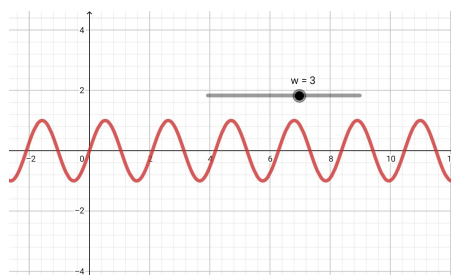


Figura 7: $g(x) = \text{sen}(3x)$ (Geogebra).

Ao utilizarem o Geogebra para criar as funções trigonométricas, eles poderão enxergar graficamente as mudanças provocadas por ω e as implicações que este fator gera. Sabendo que a função $g(x) = \text{sen}(x)$ possui um período de $2\pi \approx 6,28$, ou seja, o ciclo se repete a cada intervalo de amplitude 2π , os alunos poderão comparar esta função elementar com as outras e observarem o que acontece quando multiplicamos o argumento x por um número real positivo. Para facilitar, podemos sugerir que utilizem inicialmente apenas números inteiros. Na figura a seguir ilustramos uma comparação que pode ser feita no aplicativo. Neste exemplo esboçamos as funções $g_1(x) = \text{sen}(x)$ (linha contínua) e $g_2(x) = \text{sen}(3x)$ (linha tracejada).

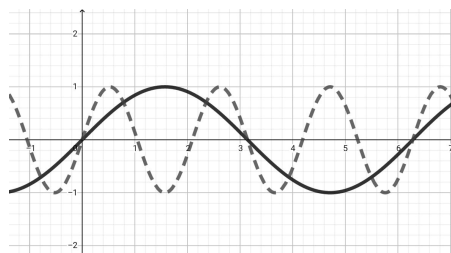


Figura 8: Comparação entre $g_1(x) = \text{sen}(x)$ e $g_2(x) = \text{sen}(3x)$ (Geogebra).

Observando a Figura 6, os alunos poderão perceber que enquanto a função $\text{sen}(x)$ completa “um” ciclo no intervalo $[0, 2\pi]$, a função $\text{sen}(3x)$ completa “três” ciclos. Desta forma, eles poderão induzir naturalmente que a função $\text{sen}(5x)$ completa “cinco” ciclos neste mesmo intervalo, se comparada com a função $\text{sen}(x)$. Aumentando ω , eles observarão que a quantidade de ciclos aumenta proporcionalmente ao valor escolhido. De forma simplificada, podemos então dizer que o fator ω representa a frequência angular na função seno – velocidade de giro – e que quanto maior

for este número, maior será o número de oscilações em um intervalo de observação fixo.

3.2 Aplicação das Funções Trigonômétricas no Estudo da Música

Com base nas ilustrações geradas pelo Geogebra, os alunos podem ter uma visão mais ampla a respeito das funções trigonométricas, permitindo que eles consigam compreender o motivo pelo qual elas são utilizadas para representar alguns fenômenos físicos oscilatórios, como por exemplo, as ondas mecânicas (é aqui que a música pode entrar como aplicação prática).

Voltando ao tema deste trabalho, a música é com certeza um fator motivacional de grande peso pelo fato dos alunos dessa faixa etária estarem fortemente ligados à influência musical. A música abrange o mundo inteiro, ultrapassando fronteiras físicas, sociais e culturais. Onde existem pessoas, existem instrumentos ou dispositivos reproduzindo algum tipo de música. “Sabendo que a proposta deste trabalho é estudar e entender os acordes musicais em um ponto de vista matemático, como poderíamos apresentar este tema aos alunos do ensino médio?”

Para responder a pergunta do parágrafo anterior, inicialmente podemos apresentar aos alunos algumas considerações básicas que devem ser utilizadas no estudo da música: (i) as notas musicais podem ser entendidas como objetos elementares que formam a música, (ii) já os acordes são combinações destes objetos. Reunindo estas definições com o estudo das funções trigonométricas, os alunos podem enxergar graficamente a diferença entre notas e acordes, ou seja, uma nota é representada pela função seno e um acorde é representado pela soma de vários senos, onde os argumentos obedecem à equação da escala temperada². Para não gerar confusão nos alunos ao apresentarmos a aplicação das funções trigonométricas com a música, podemos definir a equação da escala temperada como “uma equação que descreve a distribuição das notas musicais ao longo de um eixo real $\mathbf{W}$, onde cada ω_i representa o fator que multiplica o x no argumento da função seno”³ (Figura 7).

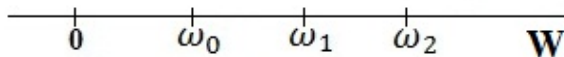


Figura 9: Interpretação simplificada da equação da escala temperada. Fonte: [4]

Desta forma podemos apresentar aos alunos uma função que descreve matematicamente um acorde musical composto por três notas musicais:

$$f(x) = A_0 \sen(\omega_0 \cdot x) + A_1 \sen(\omega_1 \cdot x) + A_2 \sen(\omega_2 \cdot x). \quad (3)$$

Esta equação é fácil de ser trabalhada em sala de aula, pois utiliza apenas elementos básicos para descrever a função seno, e estes parâmetros podem ser investigados através da utilização do Geogebra, por exemplo. A Figura 62 ilustra um exemplo que pode ser apresentado aos alunos, sugerindo que eles façam o esboço pelo Geogebra.

$$f(x) = \sen(x) + \sen(1,25 \cdot x) + \sen(1,4 \cdot x) \quad (4)$$

Sem entrarmos em temas específicos da física e da música, podemos levar os alunos a enxergarem a música através de elementos matemáticos.

²A apresentação do significado físico da escala temperada talvez não seja compreendida pelos alunos neste momento dependendo da sequência dos conteúdos adotados pela escola, pois este tema depende das progressões geométricas, que geralmente são introduzidas nos anos finais do ensino médio.

³Definição simplificada atribuída pelo autor.

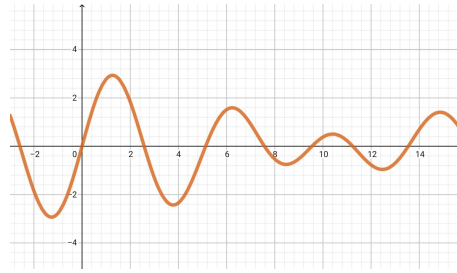


Figura 10: $f(x) = \sin(x) + \sin(1,25 \cdot x) + \sin(1,4 \cdot x)$ (Geogebra).

4 Considerações Finais

A música e a matemática são áreas diretamente relacionadas e podemos compreender e estudar uma a partir da outra. Neste trabalho apresentamos e observamos esta relação no desenvolvimento do estudo dos acordes, que são elementos musicais que formam a base de qualquer música. Reunindo noções de física e matemática podemos representar elementos musicais de forma analítica e gráfica, nos dando suporte para uma análise precisa da teoria musical. O objeto de interesse deste trabalho – identificar e classificar um acorde musical – se tornou possível mediante o vínculo destas áreas do conhecimento humano.

Um grande desafio da educação moderna é incentivar os alunos a se aprofundarem no conhecimento, principalmente no conhecimento matemático. Em todos os níveis de escolaridade observamos e nos deparamos com indagações do tipo: “Onde aplicaremos isto?” ou “Por que temos que estudar isto?”. É possível fazer uma ligação entre a matemática e a vida cotidiana e, a aplicação da matemática no estudo da música comprova um ramo desta ligação.

A abordagem deste trabalho também pode ser empregada para motivar e despertar o interesse dos alunos no estudo das funções trigonométricas, fenômenos oscilatórios, música e também técnicas de programação. A utilização de recursos tecnológicos pode, neste sentido, realizar a conexão entre os conteúdos didáticos e às aplicações práticas do mundo moderno.

Agradecimentos

À UFSJ.

Referências

- [1] Alves L. **Teoria Musical: lições essenciais: sessenta e três lições com questionários, exercícios e pequenos solfejos**. 3a. ed. São Paulo: Irmãos Vitale, 2005.
- [2] Z. Lathi B. P.e Ding. **Sistemas de comunicações analógicos e digitais modernos**. 3a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- [3] F. A. R. Sandroni. “Música e harmonia: origens da escala diatônica”. Em: **Revista de Ciências Humanas, Florianópolis** 46 (2012), pp. 347–370.
- [4] Jesus W. e Souza G. R. “Identificação e Classificação de Acordes Musicais aplicando a Transformada de Fourier”. <https://proformat-sbm.org.br/dissertacoes/?aluno=willsander+de+jesus&titulo=&polo=ufsj>. Dissertação de mestrado. UFSJ, 2020.