

Uma Caracterização dos Polígonos Regulares

Alexsandro Gomes Fernandes ¹, Flávio França Cruz ²
URCA, Juazeiro do Norte, CE

Resumo. Neste trabalho apresentamos uma caracterização dos polígonos regulares utilizando matemática básica. Precisamente, demonstramos que, fixado o número de lados, os polígonos regulares maximizam (minimizam) área na classe dos polígonos inscritos (circunscritos) em uma circunferência. A demonstração utiliza o Princípio de Indução Finita e desigualdades clássicas envolvendo trigonometria, contrastando com as provas disponíveis na literatura que são baseadas na desigualdade de Jensen.

Palavras-chave: Polígonos regulares; Polígonos circunscritos; Polígonos inscritos; Otimização da área.

1 Introdução

Desde as séries iniciais, ensina-se aos alunos conceitos e definições sobre polígonos. Conhecer profundamente as propriedades dessas figuras é uma preocupação desde a antiguidade, pois quanto mais entendemos, melhor podemos manipulá-las, o que favorece suas aplicações no cotidiano.

Este artigo constitui parte da dissertação defendida em setembro do presente ano, visando à obtenção do título de Mestre em Matemática pelo PROFMAT e busca apresentar uma demonstração, utilizando uma abordagem acessível aos alunos dos anos finais da Educação Básica, de que os polígonos regulares maximizam (minimizam) a área na classe dos polígonos inscritos (circunscritos) em uma circunferência e que possuem o mesmo número de lados. A demonstração apresentada possibilita que estudantes dos anos finais da Educação Básica possam compreender essa elegante caracterização dos polígonos regulares e assim desenvolver habilidades para aplicá-los tanto na resolução de problemas acadêmicos quanto na vida cotidiana.

A contribuição desta pesquisa está em contribuir para tornar o conhecimento matemático mais acessível, sem perder o rigor teórico, facilitando o aprendizado e a valorização dos conceitos geométricos na formação educacional.

2 Metodologia

Realizamos estudos bibliográficos com o intuito de obter a maior quantidade possível de informações sobre o nosso objeto de estudo. No livro Fundamentos de Cálculo [1], no capítulo 3, intitulado Limite e Derivada, Caminha (2015 p. 188) nos faz refletir sobre o seguinte exemplo: “Seja Γ um semicírculo de raio R e diâmetro A_0A_1 . Para cada inteiro $n > 2$, mostre que existe um n -ágono $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}$ satisfazendo as seguintes condições: (a) $A_2 \dots A_{n-1} \in \Gamma$. (b) A área de $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}$ é a maior possível”. A solução apresentada no livro tem sua beleza, entretanto, envolve um nível de conhecimento elevado.

Durante os nossos estudos, nos deparamos com artigo da revista Parábola intitulado “Uma prova elementar de que o polígono regular é o maior entre polígonos inscritos em um círculo” (Tradução livre) [3], desenvolvido por quatro alunos japoneses do ensino médio. Esse artigo se relaciona com

¹Autor 1 @email: alex.gomes.fernandes@gmail.com

²Autor 2 @email: flavio.franca@urca.br

o nosso objeto de estudo. Entretanto, apesar de ser uma demonstração correta, precisa e aceita na comunidade matemática, ela utiliza muitos artifícios para chegar ao resultado final, o que a torna menos elementar em alguns pontos e eleva o nível da demonstração.

Nas demonstrações apresentadas a seguir, buscamos utilizar, no máximo, conteúdos abordados nas séries finais da educação básica, o que foi possível nas subseções 3.2 e 3.4 graças a um método obtido a partir dos estudos do artigo [2] da RPM.

3 Resultados e Discussão

3.1 Polígonos inscritos com 2^m lados

Proposição 3.1. *Entre todos os polígonos, com 2^m lados, inscritos em uma circunferência, os regulares são os de maior área.*

Demonstração. Considere um polígono com 2^m lados inscrito em uma circunferência de raio R , em que $m \in \mathbb{N}$ e $m > 1$. Traçamos segmentos de reta do centro da circunferência a cada vértice do polígono, obtendo assim 2^m triângulos isósceles, conforme Figura 1. Sejam $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{2^m}$ as áreas dos triângulos em que o polígono foi dividido e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2^m}$ os ângulos formados pelos lados iguais de cada triângulo, tais que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2^m} = 2\pi$.

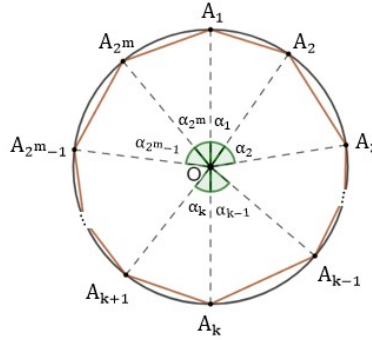


Figura 1: Polígono de 2^m lados inscrito em uma circunferência. Fonte: Os autores.

Como queremos determinar a área do Polígono Inscrito, doravante representada por $S(PI)$, basta somarmos as áreas dos triângulos obtidos a partir do polígono. Assim, $S(PI) = S_1 + S_2 + \dots + S_{2^m}$. Escrevendo a área de cada triângulo em função do seno e colocando o termo comum em evidência, obtemos

$$S(PI) = \frac{R^2}{2} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{2^m}). \quad (1)$$

Queremos encontrar os polígonos de maior área. Para isso, devemos determinar o valor máximo da expressão $\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{2^m}$, com $\alpha_k \in (0, \pi)$ e $k \in \{1, 2, \dots, 2^m\}$, pois o polígono é inscrito.

Fazemos $F = \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{2^m}$ e agrupamos os senos de dois em dois, obtendo $F = (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) + (\sin \alpha_3 + \sin \alpha_4) + \dots + (\sin \alpha_{2^m-1} + \sin \alpha_{2^m})$. Agora, para $x, y \in (0, \pi)$, devemos provar que o valor máximo da função

$$\sin x + \sin y \leq 2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right), \quad (2)$$

ocorre se, e somente se, $x = y$.

Vamos empregar a fórmula de prostaférese amplamente conhecida.

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right).$$

Aplicando a última igualdade em (2), segue que

$$2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right) \leq 2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right).$$

Dai,

$$\left(\frac{x-y}{2} \right) \leq 1.$$

Provando (2) e mostrando que o valor máximo de $\sin x + \sin y$ é obtido quando

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right), \quad (3)$$

o que ocorre se, e somente se, $x = y$.

Assim, aplicando (2) em cada par de senos em F e colocando o 2 em evidência, obtemos

$$F \leq 2 \left[\sin \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right) + \cdots + \sin \left(\frac{\alpha_{2m-1} + \alpha_{2m}}{2} \right) \right].$$

Seguimos repetindo esses processos de agrupar os senos de dois em dois, aplicar (2) a cada par de senos e colocar o dois em evidência até obtermos 2^m senos de um único ângulo do lado direito da desigualdade, de modo que

$$\sin \alpha_1 + \cdots + \sin \alpha_{2m} \leq 2^m \sin \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2m}}{2^m} \right). \quad (4)$$

Concluimos, portanto, que a soma $\sin \alpha_1 + \cdots + \sin \alpha_{2m}$ atinge seu valor máximo quando ocorre a igualdade. Demonstraremos, a seguir, que tal condição se verifica se, e somente se, os ângulos forem iguais. Vejamos.

Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2m}$, nada precisa ser provado. Por outro lado, se

$$\sin \alpha_1 + \cdots + \sin \alpha_{2m} = 2^m \sin \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2m}}{2^m} \right), \quad (5)$$

devemos mostrar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2m}$. Para isso, novamente, tomamos por F o primeiro membro da igualdade obtida de (5), agrupamos as parcelas de F duas a duas e aplicamos a igualdade (3) a cada par de senos, por se tratar do valor máximo da soma. Como $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4$, ..., $\alpha_{2m-1} = \alpha_{2m}$, podemos, sem perda de generalidade, manter os ângulos de maior índice, obtendo $F = 2 [\sin \alpha_2 + \sin \alpha_4 + \cdots + \sin \alpha_{2m}]$. Continuamos repetindo esse procedimento até obtermos a expressão $F = 2^m \cdot \sin \alpha_{2m}$, o que reduz a igualdade (5) a

$$2^m \cdot \sin \alpha_{2m} = 2^m \sin \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2m}}{2^m} \right),$$

o que só ocorre se $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2m}$.

Assim, o valor máximo da expressão (4) ocorre se, e somente se, os ângulos forem iguais. Isto garante que entre os polígonos inscritos em uma circunferência, com 2^m lados, os regulares são os

de maior área. Além disso, como $\alpha_1 + \dots + \alpha_{2^m} = 2\pi$, uma fórmula para determinar a área desse polígono é dada por

$$S(PI) = \frac{nR^2}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right), \forall n = 2^i > 3, \text{ onde } i \in \mathbb{N}.$$

□

3.2 Polígonos inscritos com n lados

Proposition 3.2. *Entre todos os polígonos, com n lados, inscritos em uma circunferência os regulares são os de maior área.*

Demonstração. Inicialmente, observe que um polígono de n lados inscrito em uma circunferência pode ser dividido em n triângulos, com $n \geq 3$, em que dois lados de cada triângulo são raios (R) da circunferência e o terceiro é um lado do polígono conforme Figura 2. De maneira análoga ao que fizemos com o polígono de 2^m lados, chegamos a expressão

$$S(PI) = \frac{R^2}{2} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n), \quad (6)$$

em que $S(PI)$ é a área do polígono inscrito.

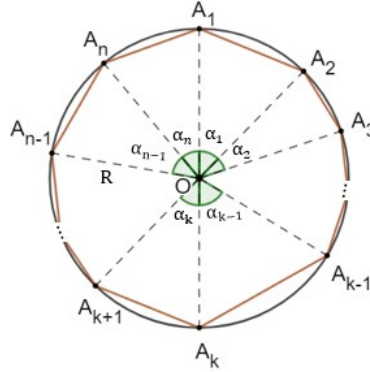


Figura 2: Polígono de n lados inscrito em uma circunferência. Fonte: Os autores.

Como queremos obter a maior área para o polígono, devemos encontrar uma expressão que represente o valor máximo para $\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n$, com $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 2\pi$. Já que o polígono é inscrito em uma circunferência, devemos ter que $\alpha_k \in (0, \pi)$, com $k \in \{1, \dots, n\}$ e $n \geq 3$. Já vimos que a desigualdade (4) vale para 2^m , com $m \in \mathbb{N}$. Agora, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq n < 2^m$, vamos provar que a desigualdade é verdadeira para todo n nas condições dadas. Sejam $\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n$ a soma de n parcelas e θ um ângulo tal que

$$\theta := \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n}. \quad (7)$$

Adicionamos $(2^m - n) \sin \theta$ à soma e obtemos $\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n + (2^m - n) \sin \theta$ com um total de 2^m senos, então

$$\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n + (2^m - n) \sin \theta \leq 2^m \sin \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n + (2^m - n)\theta}{2^m} \right). \quad (8)$$

Considerando a igualdade (7) e com um pouco de álgebra, concluímos que

$$\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + (2^m - n)\theta}{2^m} = \theta. \quad (9)$$

Aplicando (9) em (8) obtemos $\sin \alpha_1 + \cdots + \sin \alpha_n + (2^m - n) \sin \theta \leq 2^m \sin \theta$. Daí, subtraindo $(2^m - n) \sin \theta$ dos dois membros da última desigualdade, encontramos $\sin \alpha_1 + \cdots + \sin \alpha_n \leq n \sin \theta$. Agora, aplicando a igualdade (7) segue que

$$\sin \alpha_1 + \cdots + \sin \alpha_n \leq n \sin \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \right). \quad (10)$$

Assim, provamos que a desigualdade é válida para todo n natural.

Vamos provar que a igualdade ocorre se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$. Se os ângulos forem iguais, a igualdade será claramente verificada. Por outro lado, se

$$\sin \alpha_1 + \cdots + \sin \alpha_n = n \sin \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \right), \quad (11)$$

devemos mostrar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$.

Seja θ um ângulo, conforme apresentado em (7). Adicionando $(2^m - n) \sin \theta$ a ambos os membros da igualdade (11), obtemos

$$\sin \alpha_1 + \cdots + \sin \alpha_n + (2^m - n) \sin \theta = n \cdot \sin \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \right) + (2^m - n) \sin \theta.$$

Substituindo a média aritmética dos n ângulos por θ e simplificando o segundo membro da última igualdade, segue que $\sin \alpha_1 + \cdots + \sin \alpha_n + (2^m - n) \sin \theta = 2^m \sin \theta$. Para essa quantidade de senos, já vimos que a igualdade ocorre se, e somente se, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \theta = \cdots = \theta$. Agora, subtraímos $(2^m - n) \sin \theta$ de ambos os membros, obtendo $\sin \alpha_1 + \cdots + \sin \alpha_n = n \cdot \sin \theta$. Por fim, substituindo θ pela média aritmética dos n ângulos encontramos a igualdade desejada, provando que, se essa ocorre, então $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n$. Portanto, a igualdade (11) ocorre se, e somente se, todos os ângulos forem iguais.

Desse modo, provamos que a expressão (6) atinge o valor máximo se, e somente se, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$, garantindo que, entre os polígonos inscritos em uma circunferência, os regulares são os de maior área. Além disso, uma fórmula para determinar a área dos polígonos regulares inscritos em uma circunferência de raio R é dada por

$$S(PI) = \frac{R^2}{2} n \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right), \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 3.$$

□

3.3 Teorema dos polígonos regulares inscritos

Theorem 3.1. *Entre todos os polígonos inscritos em uma circunferência e com a mesma quantidade de lados, os regulares são os de maior área.*

Demonstração. Provadas as proposições 3.1 e 3.2, fica provado o teorema. □

3.4 Polígonos circunscritos com 2^m lados

Proposition 3.3. *Entre todos os polígonos, com 2^m lados, circunscritos a uma circunferência, os regulares são os de menor área.*

Demonstração. Considere um polígono de 2^m lados circunscrito a uma circunferência de raio R e centro O , em que $m \in \mathbb{N}$ e $m > 1$. Nele traçamos segmentos de reta que partem do centro da circunferência até os pontos em que o polígono tangencia a circunferência, obtendo assim 2^m quadriláteros. Sejam $P_1, P_2, \dots, P_{2^m}$ os vértices do polígono, $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2^m}$ os pontos de interseção entre o polígono, a circunferência e o raio. Fazendo $\angle Q_1 O Q_2 = 2\alpha_1$, $\angle Q_2 O Q_3 = 2\alpha_2$, $\dots$, $\angle Q_{2^m} O Q_1 = 2\alpha_{2^m}$ em que $2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{2^m} = 2\pi$. Podemos, sem perda de generalidade, tomar o quadrilátero $OQ_1P_1Q_2$ e nele traçar o segmento $\overline{OP_1}$, conforme Figura 3, que o divide em dois triângulos retângulos congruentes, segundo o caso CH. Logo, a área (S_1) do quadrilátero $OQ_1P_1Q_2$ é igual a duas vezes a área do triângulo OQ_1P_1 . Daí, fazendo $Q_1P_1 = x_1$, temos $S_1 = R \cdot x_1$.

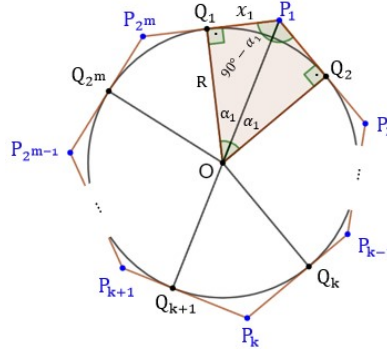


Figura 3: Polígono de 2^m lados circunscrito em uma circunferência. Fonte: Os autores.

Por outro lado, como o triângulo OQ_1P_1 possui um ângulo reto, os outros ângulos são complementares. Assim, pela lei dos senos, obtemos que

$$\frac{x_1}{\sin \alpha_1} = \frac{R}{\sin(90^\circ - \alpha_1)} \implies \frac{x_1}{\sin \alpha_1} = \frac{R}{\cos \alpha_1} \implies x_1 = R \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1}.$$

Logo, $x_1 = R \cdot \tan \alpha_1$. Substituindo em $S_1 = R \cdot x_1$ segue que $S_1 = R^2 \cdot \tan \alpha_1$.

Procedendo de maneira análoga com os demais quadriláteros, obtemos a seguinte expressão para a área do polígono circunscrito, que representaremos por $S(PC)$.

$$S(PC) = R^2 (\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \dots + \tan \alpha_{2^m}).$$

Queremos obter a menor área para o polígono, então devemos encontrar uma expressão que represente o valor mínimo da soma $\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \dots + \tan \alpha_{2^m}$, com $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2^m} = \pi$. Como o polígono é circunscrito a uma circunferência, temos que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2^m} \in (0, \frac{\pi}{2})$, com $m \in \mathbb{N}$ e, nesse caso, $m > 1$.

Para determinarmos o valor mínimo de $\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \dots + \tan \alpha_n$, devemos, inicialmente, provar que

$$\tan(x) + \tan(y) \geq 2 \tan\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad (12)$$

com $x, y \in (0, \frac{\pi}{2})$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x = y$. Vejamos: como

$$\tan(x) + \tan(y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x) \cdot \cos(y)} \quad \text{e} \quad \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\sin(x+y)}{1 + \cos(x+y)}.$$

$$\tan \alpha_1 + \cdots + \tan \alpha_n \geq n \tan \left(\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \right),$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n$.

A demonstração a partir desse ponto é análoga ao que fizemos com a desigualdade para o seno na subseção 3.2. Após os cálculos previstos, obtém-se a expressão que determina a área de um polígono regular de n lados circunscrito a uma circunferência de raio R .

$$S(PC) = nR^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 3.$$

□

3.6 Teorema dos polígonos regulares circunscritos

Theorem 3.2. *Entre todos os polígonos circunscritos a uma circunferência e com a mesma quantidade de lados, os regulares são os de menor área.*

Demonstração. Provadas as proposições 3.3 e 3.4, fica provado o teorema.

□

4 Considerações Finais

Concluimos este trabalho reiterando que o resultado acima caracteriza os polígonos regulares como objetos que otimizam a área em um contexto com vínculo e destacando, novamente, que o resultado é deduzido utilizando ferramentas muito acessíveis, a saber, desigualdades trigonométricas e o Princípio de Indução.

Referências

- [1] A. C Muniz Neto. **Fundamentos de cálculos**. 1a. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015. ISBN: 9788583370369.
- [2] M. Rosado Filho. **Uma Desigualdade Trigonométrica e Navegação com Barco a Vela**. Online. Acessado em 22/02/2024, <https://www.rpm.org.br/cdrpm/88/14.html>.
- [3] R. Tanaka, J. Miyamoto, Y. Maruo, K. Nakayama e R. Miyadera. “An elementary proof that the regular polygon is the largest among polygons that are inscribed in a circle”. Em: **Parábola** Vol. 59.Nº 1 (2013), pp. 1–8.