

Teoremas de Stokes e de Green: aplicação com o planímetro

Adriana Xavier Freitas¹ Patrich Fabricio Gabriel²
PROFMAT UFLA, Lavras, MG

Resumo. Esse trabalho versa sobre o Teorema de Green e o Teorema de Stokes. Foi utilizada uma metodologia qualitativa exploratória, por meio da qual levantam-se pontos importantes ao se aplicar os teoremas na educação básica, utilizando para isso o planímetro.

Palavras-chave. Teorema de Green, Teorema de Stokes, planímetro.

1 Introdução

O cálculo de áreas é uma das habilidades constantes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC, [1]) e no Currículo Referência Minas Gerais (CRMG, [2]) em praticamente todos os anos de ensino da educação básica (Ensino Fundamental e Ensino Médio), conforme podemos observar no quadro a seguir:

¹adrianafreitas@ufla.br

²patrich.gabriel@estudante.ufla.br

Quadro 1: Habilidades que envolvem cálculo de áreas

ANO	HABILIDADE
3º Ano	(EF03MA21) Comparar, visualmente ou por superposição, áreas de faces de objetos, de figuras planas ou de desenhos.
4º Ano	(EF04MA34MG) Construir a ideia de área a partir de recobrimento de superfícies (ladrilhagem) com figuras planas.
4º Ano	(EF04MA21) Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.
5º Ano	(EF05MA36MG) Calcular perímetros e áreas de figuras desenhadas em malhas quadriculadas com o uso das unidades padronizadas.
5º Ano	(EF05MA19) Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.
5º Ano	(EF05MA20) Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes.
6º Ano	(EF06MA49MG) Realizar conversões entre unidades de medidas de área.
6º Ano	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
7º Ano	(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.
7º Ano	(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
8º Ano	(EF08MA38MG) Calcular área de figuras planas: triângulos, quadriláteros e círculos ou figuras compostas por algumas dessas.
8º Ano	(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Ensino Médio	(EM13MAT307A): Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.).
Ensino Médio	(EM13MAT506). Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas

Fonte: BNCC e CRMG (2023).

Conforme apresentado no quadro 1, o estudo de áreas fica restrito a regiões circulares, retangulares, quadradas, triangulares ou, ainda, a regiões que podem ser decompostas em alguma das citadas anteriormente. Porém, fazendo uma relação com o cotidiano, nem sempre uma região a se determinar sua área possui um formato específico ou pode ser decomposta inteiramente em outras.

Sendo assim, o propósito desse trabalho é apresentar uma maneira não constante nos currículos de educação básica consultados que nos permite levar aos estudantes uma forma de calcular áreas diversas. Para isso, faremos uso do Teorema de Green, do Teorema de Stokes e do Planímetro.

2 Metodologia

O metodologia usada neste trabalho foi pesquisa em livros, artigos e na internet sobre resultados que abordavam os assuntos e que pudessem auxiliar em uma melhor compreensão do tema.

3 Resultados e Discussão

Os Teoremas de Green e Stokes são amplamente conhecidos pelos estudantes da área de exatas e aparecem nos principais livros de cálculo, como por exemplo em [4]. Em um primeiro momento estudamos O Teorema de Green e os pré-requisitos necessários para entendê-lo.

Teorema 3.1 (Teorema de Green). *Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C . Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D , então*

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (1)$$

Depois vimos a generalização do Teorema de Green para o espaço: O Teorema de Stokes.

Finalizamos o trabalho aprendendo sobre o Planímetro. Uma ferramenta muito útil no cálculo de área de figuras planas, cujo funcionamento se justifica utilizando argumentos matemáticos dentre eles o Teorema de Green.

O planímetro é um instrumento óptico usado para a determinação de áreas de superfícies planas limitadas quaisquer, tomando como base o contorno que a delimita [3]. Ele é muito utilizado no ensino superior, principalmente em disciplinas de engenharia, cartografia, arquitetura, desenho técnico, geologia, geografia e medicina.

A necessidade de se obter a área de figuras planas fechadas de traçado irregular, no início do século XIX, inspirou o desenvolvimento e a criação de vários projetos de instrumentos que pudessem sanar essa necessidade com resultados com certo grau de precisão [3].

Podemos citar entre os projetos desenvolvidos o Planímetro de Cone, criado por Johann Martin Hermann em 1814, e o Planímetro Rotacional, elaborado em 1855 por James Clerk Maxwell. Entretanto, conforme aborda [3], “os equipamentos não eram muito eficazes, pois tinham uma utilização pouco prática e, alguns, eram até imprecisos”.

Foi em 1854 que o suíço Jakob Amsler inventou o Planímetro Polar Mecânico, que foi utilizado nesse trabalho. Apesar de uma aparência simples, ele faz cálculos de algumas integrais de superfícies para a determinação de áreas, que não são tão simples.

Além disso, apresentamos algumas atividades para que os professores do Ensino Básico possam desenvolver em sala de aula com seus alunos. Mostrando para eles que o cálculo de área não é só abstração da aplicação de fórmulas, que existem instrumentos que também fazem esses cálculos. Tornando assim, a aula mais interessante.

4 Considerações Finais

O Teorema de Stokes tem um papel fundamental no estudo de campos vetoriais, principalmente na análise do movimento de rotação de fluidos. Quando a superfície é plana, esse teorema cai em uma forma particular conhecido como Teorema de Green. Como uma aplicação desse teorema temos a construção do Planímetro. Com o Planímetro podemos calcular área de figuras diversas.

De acordo com o apresentado no início do trabalho, os currículos de educação básica abordam em toda a estrutura da grade curricular matemática ao longo dos anos, o aprofundamento no cálculo

de áreas de figuras geométricas planas, porém esse estudo fica restrito inicialmente à contagem de quadrículas ou triângulos e, depois, a fórmulas que devem ser memorizadas e guardadas.

Porém, nem sempre uma figura a ter sua área medida estará numa forma conhecida ou poderá ser decomposta em outras que conseguimos calcular por meio das fórmulas já citadas. Pensando nisso, o trabalho aborda a utilização de um instrumento, chamado de planímetro, como um possível aliado a despertar nos estudantes uma matemática que seja menos abstrata e mais prática.

Por fim, a busca por novos recursos, independente de quais sejam, é fundamental para quê, unida a criatividade, a prática e o desejo do professor, o cenário educacional brasileiro seja aprimorado. Reitera-se a importância vital de os educadores terem a vontade de estimular e despertar a curiosidade dos alunos, permitindo que eles possam aplicar o conhecimento adquirido ao longo de sua trajetória.

Referências

- [1] **Base Nacional Comum Curricular**. Brasil. Brasília: Ministério da Educação, 2018. URL: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>.
- [2] **Currículo Referência Minas Gerais**. Minas Gerais. Belo Horizonte: Secretaria De Estado de Educação de Minas Gerais, 2018. URL: <https://curriculoreferencia.educacao.mg.gov.br/>.
- [3] Francisco de A. P. da S. do A. Ferreira, Jefferson C. dos S. Leite, Huerllen V. L. e Silva, Jerlane F. C. Lopes, Odeir de J. Lima e Salvino C. Filho. “O planímetro polar de Amsler no ensino de geometria”. Em: **Revista Eletrônica Paulista de Matemática** 19 (2020), pp. 33–54. URL: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v19a04-o-planimetro-polar-de-amsler-no-ensino.pdf>.
- [4] James Stewart. **Cálculo - Volume 2**. 7^a ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.