

FRACTAIS NO ENSINO DE POLINÔMIOS: UMA ABORDAGEM PRÁTICA

Ana Claudia Hott Paiva Ricardo¹
Gilcéia Regiane de Souza²
Maurício Reis e Silva Júnior³
PROFMAT UFSJ-CAP, Ouro Branco, MG

Resumo. O presente trabalho tem como objetivo principal apresentar uma introdução dos Fractais no Ensino Médio, com enfoque na abordagem prática de conceitos matemáticos, principalmente aqueles relacionados às operações com polinômios, com a exploração de processos iterativos, fórmulas gerais e algoritmos e estímulo ao uso de tabelas. Essa iniciativa objetiva fornecer uma perspectiva visual e recursiva para a compreensão de padrões, fundamentando-se na propriedade de autossimilaridade dos fractais. Adaptada aos requisitos da BNCC[1], essa abordagem prática é um exemplo de estratégia pedagógica inovadora na aprendizagem matemática.

Palavras-chave. Fractais, Polinômios, Autossimilaridade, Recursividade

1 Introdução

No cenário atual da educação matemática, destaca-se uma crescente busca por estratégias pedagógicas inovadoras que visam tornar as aulas mais envolventes e eficazes no processo de ensino-aprendizagem. Uma possível estratégia pedagógica é a utilização de processos ilustrativos, que possam surgir como resultado da aplicação de conceitos sendo estudados pelos alunos em sala de aula. Nessa linha de atuação, um tópico matemático de grande apelo visual seriam os fractais. Élvia Mureb afirma[5], que

A introdução de fractais no Ensino Médio, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, [...] e estímulo ao uso de tabelas .

Nesse contexto, o presente trabalho apresenta uma proposta de introduzir fractais como ferramenta visual, especialmente focalizada na abordagem prática de conceitos matemáticos, notadamente aqueles relacionados às operações com polinômios. Para isso é necessário que a introdução de fractais no ambiente educacional também forneça uma perspectiva visual e recursiva para a compreensão de padrões matemáticos complexos. A propriedade de autossimilaridade dos fractais pode ser usada para ilustrar um processo algébrico recursivo com polinômios.

Especificamente, a proposta pretende apresentar uma introdução de fractais no Ensino Médio, explorando a curiosidade dos alunos para trabalhar com processos iterativos, fórmulas gerais, criação de algoritmos e estímulo ao uso de tabelas, conforme destacado por Élvia Mureb[5], utilizando as técnicas de manipulação de polinômios nesse processo. A proposta pedagógica consiste na utilização da recursividade do binômio de Newton e seu apelo visual ilustrado pelo Triângulo de Pascal.

¹anaclaudiahott72@gmail.com

²gilcelia@ufs.br

³mreis@ufs.br

⁴Este template foi baseado no modelo de trabalho completo do CNMAC 2024, disponível no Overleaf.

Pretende-se com isso mostrar como um processo recursivo resulta na propriedade de autossimilaridade de uma estrutura fractal. A atividade proposta não se limita à ampliação da compreensão dos fundamentos matemáticos, mas se estende à consolidação de habilidades nas operações com polinômios, melhorando a percepção dos estudantes sobre a recursividade e a estruturação dos fractais. A abordagem prática incentiva os alunos a investigarem os padrões visuais nos coeficientes do Triângulo de Pascal, culminando na identificação de um padrão análogo ao fractal.

Segundo Margarida Milani[3], quando há trabalhos e pesquisas realizadas utilizando fractais no ensino médio e fundamental, pode-se abordar alguns conceitos que auxiliam os estudantes a aprender melhor e desenvolver habilidades que podem ser abordados destacando, (sic) “... Intuição, Lógica, razão, Dedução, Fórmulas, Processos Interativos (algoritmos), Padrões Numéricos [...] entre outros.”

A atividade proposta não se limita a atender aos requisitos curriculares, mas alinha-se à filosofia da Base Nacional de Comum Curricular (BNCC) ao promover uma abordagem que vai além da teoria, incentivando os alunos a explorarem conceitos como intuição, lógica, dedução e processos interativos.

2 Metodologia

Uma metodologia de trabalho propõe a aplicação prática dos conceitos de fractais no ensino de polinômios, utilizando a recursividade e a autossimilaridade como bases. A proposta de prática aproveita o Triângulo de Pascal como uma ferramenta visual para auxiliar os alunos a compreender a expansão binomial e a recursividade dos polinômios. O objetivo principal é utilizar uma abordagem prática para lecionar polinômios no ensino médio, com ênfase em padrões recursivos e autossimilares, personagem.

2.1 Objetivos

De maneira geral, a atividade visa melhorar a compreensão dos fundamentos matemáticos, fazendo com que os alunos se habituem à manipulação de polinômios, mediante sua expansão e consequente obtenção dos coeficientes binomiais da n -ésima potência de uma soma algébrica. Como objetivos específicos relacionados ao tópico de polinômios, que é parte do conteúdo de matemática para o ensino médio, a atividade irá abordar:

1. Potências de uma soma algébrica;
2. Coeficientes da expansão binomial;
3. Funções genéricas a partir de algoritmos;
4. Autossimilaridade como consequência de um processo iterativo;
5. Induzir os estudantes a executar um algoritmo de maneira intuitiva, e assim promover sua compreensão sobre funções matemáticas num sentido mais amplo;
6. Mostrar as relações de recorrência e seus efeitos no aparecimento de uma estrutura final, com consequente observação do mecanismo de autossimilaridade presentes no triângulo de Pascal e no triângulo de Sierpinski;
7. Rever temas básicos como a divisibilidade e produtos notáveis.

2.2 Desenvolvimento da atividade

Nessa atividade serão feitas expansões de polinômios com consequente identificação de seus coeficientes no triângulo de Pascal e posteriormente sua relação com o triângulo de Sierpinski a partir da coleção de divisores de cada coeficiente. No início da tarefa, os estudantes são instruídos a registrar o polinômio inicial na folha de exercícios, conforme definido a seguir:

$$P_0(x) = 1. \quad (1)$$

Assim, inicia-se o processo de multiplicação dos polinômios por $Q(x) = 1 + x$ e, ao mesmo tempo, em uma folha à parte, os alunos são orientados a manter anotações de todos produtos obtidos durante a atividade. O processo recursivo implica na repetição dessa operação para gerar os resultados subsequentes. O primeiro produto seria obtido pela multiplicação de $P_0(x)$ por $Q(x)$, ou seja:

$$P_0(x)Q(x) = P_1(x) = 1 + x \quad (2)$$

Em seguida, continuando a atividade, o polinômio $P_1(x)$ obtido pela equação 2 será multiplicado por $Q(x) = 1 + x$.

À medida que a atividade é desenvolvida, pode-se perceber o processo recursivo, pois, para se conseguir o próximo produto de polinômios, é necessário utilizar o resultado anterior multiplicado por $Q(x)$. Em outros termos, $P_n(x) = P_{n-1}(x)Q(x)$. Agora os coeficientes de x em $P_n(x)$ precisam ser identificados e coletados. Isso significa agrupar os diversos termos relacionados a x em graus variados, e colecionar os coeficientes. Os coeficientes devem ser registrados em uma folha à parte onde os alunos documentam seus resultados de acordo com a expansão do polinômio $P_n(x)$, obtendo:

$$\begin{aligned} P_1(x)Q(x) &= (1+x)(1+x) = 1 + x + x + x^2 = 1 + 2x + x^2 = (1+x)^2 = P_2(x) \\ P_2(x)Q(x) &= (1+x)^2(1+x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = (1+x)^3 = P_3(x) \\ P_3(x)Q(x) &= (1+x)^3(1+x) = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 = (1+x)^4 = P_4(x) \\ &\vdots \\ P_{n-1}(x)Q(x) &= (1+x)^{n-1}(1+x) = P_n(x) \end{aligned}$$

À medida que a atividade é desenvolvida, pode-se perceber o processo recursivo, pois, para se conseguir o próximo produto de polinômios, é necessário utilizar o resultado anterior multiplicado por $Q(x)$. Em outros termos, $P_n(x) = P_{n-1}(x)Q(x)$. Agora os coeficientes de x em $P_n(x)$ precisam ser identificados e coletados. Isso significa agrupar os diversos termos relacionados a x em graus variados, e colecionar os coeficientes. Os coeficientes devem ser registrados em uma folha à parte onde os alunos documentam seus resultados de acordo com a expansão do polinômio $P_n(x)$. Observa-se que esta atividade, apesar de sua simplicidade inicial, se torna tediosa à medida que o grau dos polinômios envolvidos aumenta. Portanto, uma estratégia que pode ser usada é que os alunos realizem essa tarefa em duplas, com um dos estudantes encarregados da multiplicação e o outro responsável pela coleta e combinação dos termos semelhantes, de preferência, alternando suas funções. Os alunos devem fazer a expansão polinomial até $n=4$ pelo menos. Os próximos coeficientes serão obtidos seguindo as orientações abaixo.

2.2.1 Obtenção de demais coeficientes

Neste estágio da atividade, inicia-se a introdução do Triângulo de Pascal e a demonstração de seu potencial na criação de fractais. O Triângulo de Pascal é uma matriz numérica amplamente empregada na matemática, sobretudo em aplicações de simulação e na expansão de polinômios binomiais. Após o registro dos coeficientes até a ordem “ n ” selecionada, os alunos devem ser orientados para que os coeficientes restantes sejam calculados por meio da adição dos dois termos

do polinômio anterior, cujo resultado será atribuído à coleta dos termos. Por exemplo: Concomitantemente ao preenchimento da tabela, será promovida uma discussão a respeito das observações realizadas pelos alunos. Eles serão incentivados a identificar padrões, especialmente os que envolvem relações entre coeficientes e o valor de “ n ”. Pode ser destacada a notável característica do Triângulo de Pascal, que revela padrões distintos nas somas ao longo de diagonais específicas. Por exemplo, na primeira diagonal da esquerda para a direita, só aparece o número 1. Na segunda diagonal aparece uma sequência dos números naturais $(1, 2, 3, 4, \dots)$, e na terceira diagonal surge uma sequência dos números chamados ‘triangulares’ $(1, 3, 6, 10, \dots)$

2.2.2 Triângulo de Sierpinski pela divisibilidade dos coeficientes

Nesta parte, serão obtidos aspectos visuais que podem ser vistos pela divisibilidade dos coeficientes no triângulo de Pascal. Os alunos devem inicialmente colorir os coeficientes ímpares e deixar em branco os coeficientes pares. Um padrão semelhante ao do triângulo de Sierpinski deverá ficar evidente. Na Figura 1, é um exemplo de como ficaria a tabela após os coeficientes serem coloridos

P ₀	1																		
P ₁	1	1																	
P ₂	1	2	1																
P ₃	1	3	3	1															
P ₄	1	4	6	4	1														
P ₅	1	5	10	10	5	1													
P ₆	1	6	15	20	15	6	1												
P ₇	1	7	21	35	35	21	7	1											
P ₈	1	8	28	56	70	56	28	8	1										
P ₉	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1									
P ₁₀	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1								
P ₁₁	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1							
P ₁₂	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1						
P ₁₃	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1					
P ₁₄	1	14	91	364	1001	2002	3432	5005	6005	5005	3432	2002	1001	364	91	14	1		
P ₁₅	1	15	105	420	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	420	105	15	1			

Figura 1: Triângulo de Sierpinski gerado durante a abordagem prática Fonte: autora.

3 Resultados e Discussão

Os resultados mostram que a introdução dos fractais no ensino de polinômios proporcionou uma compreensão mais profunda dos conceitos de recursividade e padrões visuais entre os alunos. O uso de ferramentas como o Triângulo de Pascal facilitou a assimilação de ideias abstratas, como a expansão de polinômios e os coeficientes binomiais. Além disso, a abordagem prática possibilitou que os estudantes identificassem padrões autossimilares e explorassem a matemática de maneira investigativa, o que gerou um maior engajamento e interesse pelos temas abordados.

Durante as atividades, foi criado um arquivo [4] onde é possível visualizar o Triângulo de Sierpinski, gerado no programa Excel, que pode ser acessado pelos alunos. Esse material oferece uma representação clara dos padrões de autossimilaridade e recursividade presentes no estudo dos polinômios [2].

4 Considerações Finais

A idealização desse trabalho baseia-se em tornar mais acessível o ensino dos conceitos básicos de operação de polinômios aos alunos do Ensino Médio. Desta forma, inicialmente, usa-se o Triângulo de Pascal como ferramenta visual e recurso didático, pois com ele pode-se explorar a recursividade do binômio de Newton e a relação com a autossimilaridade dos fractais. Durante a trajetória deste

trabalho, percorreu-se desde a exploração da autossimilaridade presente em estruturas naturais, como as folhas, até a definição matemática dos fractais.

Referências

- [1] Ministério da Educação. **Base Nacional Comum**. Online. Acesso em: 01 fev. 2023 http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_10518_versao_final_site.pdf.
- [2] Ana Cláudia Hott. “Fractais no ensino de polinômios, uma abordagem prática”. Dissertação de mestrado. PROFMAT UFSJ/CAP, 2024.
- [3] Margarida Milani. **Fractais, Pipas tetraédricas e Origami**. 1a. ed. CRV, 2022.
- [4] Ana Claudia Hott Paiva Ricardo. **Triângulo de Sierpinski gerado pelo EXCEL**. Online. Acessado em 10/09/2024, https://docs.google.com/spreadsheets/d/1CBLpu9ekrPKktuQ0Ujx_yy7rmFwHaIct/edit?usp=sharing&ouid=115241674281308914073&rtpof=true&sd=true.
- [5] Élvia Mureb Sallum. “Fractais no ensino médio”. Em: **Revista do Professor de Matemática** 57 (2005).