

Sobre Funções Felizes e seus Pontos Fixos

Marcelo Veloso¹ Gilcélia de Souza²
PROFMAT UFSJ, Ouro Branco, MG

Resumo. Este trabalho tem como objetivo principal explorar os pontos fixos da função felicidade em qualquer sistema de numeração posicional. Apresentamos diversos resultados e propriedades associados aos números felizes e aos pontos fixos da função (e, b) -feliz. Em especial, introduzimos métodos para identificá-los por meio da resolução de equações diofantinas, utilizando recursos computacionais. No caso do expoente dois, utilizamos uma fórmula para o cálculo do número de pontos fixos, resultado de Alan Beardon, para exibir exemplos, além de outro resultado que relaciona o número de pontos fixos com os números de Mersenne. Além disso, propomos uma atividade prática para sala de aula, integrada com programação computacional, com o intuito de enriquecer o aprendizado dos alunos de maneira interdisciplinar.

Palavras-chave. Sequências de inteiros; Números Felizes; Pontos fixos; Números de Mersenne.

1 Introdução

Os números felizes abrangem uma variedade de temas na matemática. O estudo desses números integra elementos de teoria dos números, sistemas dinâmicos discretos, computação, entre outras áreas. Trata-se de um tema atual e relevante, amplamente explorado por diversos pesquisadores. Neste contexto, destacamos os artigos que inspiraram nosso trabalho: [1] e [4]. Além disso, o estudo dos números felizes desperta e atrai o interesse dos estudantes pela matemática.

Considere o seguinte algoritmo: dado um número inteiro, calcule a soma dos quadrados de seus dígitos. Repita essa etapa com o número obtido, e continue o processo de forma iterativa. Se, ao final da execução do algoritmo, obtemos o número 1, dizemos que o número inteiro inicial é um número feliz. Observe que o 49 é feliz

$$49 \rightarrow 97 \rightarrow 130 \rightarrow 10 \rightarrow 1.$$

Se, nesse procedimento, nunca obtemos o número 1, diremos que o número inicial não é feliz e será chamado de triste. Observe que 38 é triste:

$$38 \rightarrow 73 \rightarrow 58 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \rightarrow 42 \rightarrow 20 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 37 \rightarrow 58.$$

O presente trabalho explora os pontos fixos da função felicidade em qualquer base posicional. Em especial, abordamos algumas técnicas para encontrar esses pontos fixos, resolvendo equações diofantinas com o auxílio de um programa computacional. Também exploramos um resultado de Alan Beardon (Teorema 3.1, [1]), para determinar o número de pontos fixos da função feliz $F_{2,b}$, obtendo exemplos e um resultado bem interessante que relaciona o número de pontos fixos da função feliz $F_{2,b}$ com os números de Mersenne. Os números de Mersenne são inteiros positivos expressos pela fórmula $2^n - 1$, onde n é um número inteiro positivo.

¹veloso@ufs.j.edu.br

²gilcelia@ufs.j.edu.br

⁴Este template foi baseado no modelo de trabalho completo do CNMAC 2024, disponível no Overleaf.

Para o leitor interessado no tema, existem diversas questões relacionadas aos números felizes, como, por exemplo, a existência de infinitos números primos felizes.

Por fim, propomos uma aplicação em sala de aula, destinada aos alunos do Ensino Médio, onde será possível trabalhar não somente o conceito dos números felizes, mas também vários outros conceitos que permeiam tal assunto, tais como conjuntos numéricos, funções, potenciação, programação básica, entre outros.

2 Metodologia

Para a elaboração deste trabalho sobre os números (e, b) -felizes, iniciamos com uma revisão abrangente da literatura existente, consultando artigos e dissertações acadêmicas que exploram tanto os fundamentos teóricos quanto as aplicações e os problemas relacionados a esses números. A seleção dos textos foi criteriosa, priorizando publicações que oferecem contribuições significativas para o entendimento das propriedades da função (e, b) -feliz e seus pontos fixos.

Em seguida, formulamos novas hipóteses, buscando não apenas expandir o conhecimento existente, mas também contribuir com novos resultados à literatura. Nossa abordagem teórica foi estruturada em torno da análise das propriedades matemáticas da função (e, b) -feliz, com o objetivo de identificar padrões e comportamentos ainda não documentados.

Para validar e exemplificar nossas descobertas, utilizamos ferramentas computacionais que possibilitaram a geração e visualização em larga escala dos números (e, b) -felizes. Esses recursos foram essenciais para testar a robustez de nossas conjecturas, além de fornecer exemplos práticos e concretos que ilustram os novos resultados obtidos. A aplicação de algoritmos específicos e software matemático não apenas confirmou a validade de nossas hipóteses, mas também permitiu a exploração de cenários adicionais que seriam impraticáveis de analisar manualmente.

A metodologia combinada de revisão bibliográfica, desenvolvimento teórico e validação computacional revelou-se eficaz para ampliar o entendimento sobre as sequências dos números felizes em qualquer base posicional e expoente, fornecendo novas perspectivas e insights sobre o tema.

3 Resultados e Discussão

Dados os inteiros $e \geq 2$ e $b \geq 2$, seja x um número inteiro positivo cuja representação na base b é dada por

$$x = [a_r a_{r-1} a_{r-2} \dots a_1 a_0]_b = \sum_{i=0}^r a_i b^i.$$

A função (e, b) -feliz é definida por

$$\begin{aligned} F_{e,b} : \mathbb{Z}_+ &\longrightarrow \mathbb{Z}_+ \\ x &\longmapsto \sum_{i=0}^r a_i^e \end{aligned}$$

Ou seja,

$$F_{e,b}(x) = F_{e,b}\left(\sum_{i=0}^r a_i b^i\right) = \sum_{i=0}^r a_i^e.$$

É usual denotar a função $F_{2,10}$ por F . Assim, quando a base e o expoente não são declarados, subentende-se que seu valor $e = 2$ e $b = 10$.

Dizemos que um número inteiro positivo m é (e, b) -feliz quando, para algum inteiro $k \geq 1$, temos que $F_{e,b}^k(m) = 1$, onde $F_{e,b}^0 = id$ (função identidade) e $F_{e,b}^k = F_{e,b} \circ F_{e,b} \circ \dots \circ F_{e,b}$ (composição

de k funções $F_{e,b}$). Caso contrário, ele é dito (e, b) -triste. É imediato que o número 1 é (e, b) -feliz para qualquer expoente e qualquer base.

Exemplo 3.1. O número 193 é $(2, 10)$ -feliz na base 10, pois

$$\begin{aligned} F(193) &= 1^2 + 9^2 + 3^2 = 1 + 81 + 9 = 91 \\ F^2(193) &= F(F(193)) = F(91) = 9^2 + 1^2 = 81 + 1 = 82 \\ F^3(193) &= F(F^2(193)) = F(82) = 8^2 + 2^2 = 64 + 4 = 68 \\ F^4(193) &= F(F^3(193)) = F(68) = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \\ F^5(193) &= F(F^4(193)) = F(100) = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1 + 0 + 0 = 1. \end{aligned}$$

◇

Existem diversas questões relacionadas aos números (e, b) -felizes: existem infinitos números (e, b) -felizes? Qual a sua densidade nos interiores? Dentre outras. Aqui vamos nos ater aos pontos fixos da função (e, b) -feliz.

Um inteiro positivo n é chamado de **ponto fixo** da função (e, b) -feliz quando

$$F_{e,b}(n) = n.$$

É imediato que 1 é um ponto fixo para qualquer função (e, b) -feliz.

Exemplo 3.2. O número 273 é ponto fixo da função $(4, 8)$ -feliz. De fato,

$$F_{4,8}(273) = F_{4,8}([421]_8) = 4^4 + 2^4 + 1^4 = 256 + 16 + 1 = 273.$$

◇

O próximo resultado mostra que para determinar os pontos fixos é suficiente encontrar as soluções de uma equação diofantina em um subconjunto finito dos inteiros positivos.

Teorema 3.1 (Teorema 4.4, [2]). *Os pontos fixos da função $F_{e,b}$ são os números*

$$[x_e x_{e-1} \dots x_1 x_0]_b = x_e b^e + x_{e-1} b^{e-1} + \dots + x_2 b^2 + x_1 b + x_0$$

que satisfazem

$$x_e^e + x_{e-1}^e + \dots + x_2^e + x_1^e + x_0^e = x_e b^e + x_{e-1} b^{e-1} + \dots + x_2 b^2 + x_1 b + x_0.$$

□

Exemplo 3.3. Determinar os pontos fixos da função $F_{3,5}$ é equivalente a determinar as soluções da equação:

$$x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 5^3 x + 5^2 y + 5z + w,$$

onde $0 \leq x, y, z, w \leq 4$. Resolvendo a equação, utilizando nosso programa no software octave, obtemos as seguintes soluções: $(0, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 3)$, $(0, 4, 3, 3)$. Logo, os três pontos fixos da função $F_{3,5}$ são

$$1 = [1]_5, \quad 28 = [103]_5, \quad e \quad 118 = [433]_5.$$

◇

3.1 Número de pontos fixos

O principal resultado do artigo de Alan Beardon ([1]) assegura que o número de pontos fixos é igual ao número de divisores do inteiro $1 + b^2$ menos um (veja Teorema 3.2). Nosso trabalho acrescenta alguns exemplos e um resultado interessante que relaciona o número de pontos fixos com os números de Mersenne.

Teorema 3.2 (Teorema 3.1, [1]). *O número de pontos fixos da função $F_{2,b}$ é igual a $d(1 + b^2) - 1$.* $\square$

Em virtude do Teorema 3.2 Vamos denotar o número de pontos fixos da função $F_{2,b}$ por $fix(b)$. Ou seja,

$$fix(b) = d(1 + b^2) - 1.$$

O próximo resultado, Lema 3.1, permite obtermos algumas consequências interessantes do Teorema 3.2, veja [3].

Lema 3.1 (Lebesgue, 1850). *Seja $m > 1$ um inteiro. Então não existe inteiros positivos x e y tais que*

$$1 + y^2 = x^m.$$

$\square$

Corolário 3.1 (Teorema 3.5, [1]). *Seja $b \geq 2$. Então a função $F_{2,b}$*

1. *tem 1 ponto fixo se, e somente se, $1 + b^2$ é um número primo.*
2. *tem 3 pontos fixos se, e somente se, $1 + b^2 = pq$, onde p e q são primos distintos.*
3. *tem 5 pontos fixos se, e somente se, $1 + b^2 = pq^2$ onde p e q são primos distintos.*
4. *tem 7 pontos fixos se, e somente se, $1 + b^2 = pq^3$ ou $1 + b^2 = pqr$ onde p e q são primos distintos.*
5. *tem 9 pontos fixos se, e somente se, $1 + b^2 = pq^4$ onde p e r são primos distintos.*

$\square$

Encontramos uma relação, bem interessante, entre os números de Mersenne e os números de pontos fixos da função $F_{2,b}$.

Teorema 3.3. *Seja $b \geq 2$ e $1 + b^2 = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$. Então o número de pontos fixos da função $F_{2,b}$ é um número de Mersenne se, e somente se, cada β_i é um número de Mersenne.*

Demonstração. Suponha que o número de pontos fixos da função $F_{2,b}$ é um número de Mersenne, $fix(b) = 2^n - 1$. Seja $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ a decomposição de $1 + b^2$ em fatores primos. Segue do Teorema 3.2 que

$$2^n - 1 = fix(b) = d(1 + b^2) - 1 = (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \cdots (\beta_k + 1) - 1$$

Ou seja,

$$2^n = (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \cdots (\beta_k + 1).$$

Isso implica que $\beta_i + 1 = 2^{r_i}$, para cada $i = 1, \dots, k$, tal que $r_1 + \cdots + r_k = n$. Portanto, cada $\beta_i = 2^{r_i} - 1$ é um número de Mersenne.

Agora suponha que

$$1 + b^2 = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_n^{\beta_n},$$

onde $\beta_i = 2^{r_i} - 1$ é um número de Mersenne, para cada $i = 1, \dots, k$. Segue do Teorema 3.2 que

$$(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \cdots (\beta_k + 1) - 1$$

é o número de pontos fixos de $F_{2,b}$. Então

$$\begin{aligned} \text{fix}(b) &= (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1) \cdots (\beta_k + 1) - 1 = (2^{r_1} - 1 + 1)(2^{r_2} - 1 + 1) \cdots (2^{r_k} - 1 + 1) - 1 \\ &= 2^{r_1} \cdot 2^{r_2} \cdots 2^{r_k} - 1 \\ &= 2^R - 1, \end{aligned}$$

onde $R = r_1 + r_2 + \cdots + r_k \in \mathbb{N}$. Portanto, o número de pontos fixos de $F_{2,b}$ é um número de Mersenne. □

Exemplo 3.4. Considere que $1 + b^2 = 5^3 \cdot 37^1$. Note que os expoentes dos fatores primos, 3 e 1, são números de Mersenne, pois $3 = 2^2 - 1$ e $1 = 2^1 - 1$. O número de pontos fixos para a base b é dado por:

$$\text{fix}(b) = d(1 + b^2) - 1 = (3 + 1) \cdot (1 + 1) - 1 = 4 \cdot 2 - 1 = 8 - 1 = 2^3 - 1,$$

o que também é um número de Mersenne. Resolvendo a equação $1 + b^2 = 5^3 \cdot 37^1$, encontramos $b = 68$. Portanto, o número de pontos fixos de $F_{2,68} = 2^3 - 1$. ◇

Exemplo 3.5. Seja $1 + b^2 = 2^1 \cdot 5^3 \cdot 13^1$. Observe que os expoentes dos fatores primos, 1 e 3, são números de Mersenne, pois $1 = 2^1 - 1$ e $3 = 2^2 - 1$. O número de pontos fixos para a base b é dado por:

$$\text{fix}(b) = d(1 + b^2) - 1 = (1 + 1) \cdot (3 + 1) \cdot (1 + 1) - 1 = 2 \cdot 4 \cdot 2 - 1 = 16 - 1 = 2^4 - 1,$$

que também é um número de Mersenne. Ao resolver a equação $1 + b^2 = 2^1 \cdot 5^3 \cdot 13^1$, encontramos $b = 57$. Logo, o número de pontos fixos de $F_{2,57}$ é igual a $M_4 = 2^4 - 1$. ◇

3.2 Sequência Didática

Por fim, propomos uma aplicação prática em sala de aula voltada para alunos do ensino médio. Essa proposta tem como objetivo ensinar um assunto que não faz parte do currículo escolar, mas que oferece oportunidades de aprendizado em diversas áreas, incluindo não apenas a Matemática, mas também a Computação.

Apresentamos uma sequência didática destinada a introduzir o conceito de números felizes a alunos do ensino médio. Esta sequência busca relembrar conceitos matemáticos fundamentais, como os conjuntos numéricos, com ênfase no conjunto dos números naturais, além de revisar operações básicas, como potenciação, e discutir conceitos de funções. Para complementar essa abordagem, introduziremos também conceitos básicos de programação utilizando o **Scratch**, uma linguagem de programação projetada para ensinar lógica de programação a crianças e adolescentes.

A sequência é articulada em atividades práticas em sala de aula, com o objetivo de enriquecer o processo de ensino e aprendizagem dos alunos. O foco principal da atividade será realizar uma investigação matemática que permita aos alunos verificar, por meio de programação básica, se um determinado número inteiro positivo, inserido pelo usuário, é um número $(2, 10)$ -feliz ou não.

A motivação para esta atividade está relacionada à importância e ao papel das tecnologias digitais no ensino de Matemática. Como mencionado por [5], embora esse tema tenha sido objeto de diversas pesquisas na Educação Matemática, a integração de tecnologias voltadas ao ensino de Matemática ainda enfrenta desafios em muitas escolas. Fatores como a falta de laboratórios de informática, a ausência de recursos adequados e a necessidade de capacitação dos educadores podem contribuir para essa realidade.

4 Considerações Finais

Este trabalho demonstra que é sempre possível verificar se um dado número é (e, b) -feliz. Além disso, determinamos que a identificação dos pontos fixos da função (e, b) -feliz é equivalente a resolver uma determinada equação diofantina. Exploramos também a quantidade de pontos fixos da função $F_{2, b}$ (Teorema 3.2). Com base nesse resultado, e em virtude do Teorema 3.1, conseguimos obter diversos resultados relacionados ao número de pontos fixos em uma base $b \geq 2$, considerando a decomposição em fatores primos da expressão $1 + b^2$.

Observamos, ainda, que sempre que os expoentes na decomposição em fatores primos da expressão $1 + b^2$ forem números de Mersenne, o número de pontos fixos da função $F_{2, b}$ também será um número de Mersenne (Teorema 3.3).

Por fim, propomos uma aplicação prática em sala de aula voltada para alunos do ensino médio. Essa proposta tem como objetivo ensinar um assunto que não faz parte do currículo escolar, mas que oferece oportunidades de aprendizado em diversas áreas, incluindo não apenas a Matemática, mas também a Computação.

Referências

- [1] Alan Beardon. “Sums of Squares of Digits”. Em: **The Mathematical Gazette** (1998), pp. 379–388.
- [2] Luciano Coelho. “Sobre Funções Felizes e seus Pontos Fixos”. Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Federal de São João del-Rey, 2024.
- [3] Victor Amédée Lebesgue. “Sur l’impossibilité, en nombres entiers, de l’équation $x^m = y^2 + 1$ ”. Em: **Nouvelles Annales de Mathématiques** (1850).
- [4] Rudney Carlos da Mata e Marcelo Oliveira Veloso. “Números Felizes e Pontos Fixos”. Em: **Revista Eletrônica da Matemática** 9.1 (2023), pp. 1–12.
- [5] José Augusto Jerônimo da Silva. “Sequência de Atividades para Estudo de Funções de Primeiro Grau: Análise Gráfica e Aplicações com Geogebra”. Mestrado em Ensino de Ciências Exatas. Universidade do Vale do Taquari, 2022.