Provas sem Palavras: Correlacionando Representações Visuais e Formalidade em Demonstrações Matemáticas

Luiz Otávio Abi-acl Almeida[1]
PROFMAT UFVJM, Teófilo Otoni, MG
Weversson Dalmaso Sellin[2]
PROFMAT UFVJM, Teófilo Otoni, MG

Resumo. O presente trabalho investiga a utilização de demonstrações formais e representações visuais, conhecidas como Provas sem Palavras (*Proof Without Words - PWW*, termo que começou a aparecer na *Mathematics Magazine*, por volta de 1975, e no *College Mathematics Journal*, em 1985), como metodologia complementar no ensino da Matemática. A pesquisa foi conduzida com estudantes do terceiro ano do Ensino Médio integrado ao técnico em Informática do Instituto Federal de Minas Gerais *campus* São João Evangelista. Foram abordados conceitos de progressões aritméticas e geométricas, tanto por meio de demonstrações formais quanto utilizando Provas sem Palavras. Uma oficina pedagógica *on-line* foi implementada com questões que poderiam ser resolvidas formalmente ou visualmente. Os resultados indicaram que as representações visuais facilitaram a compreensão e promoveram o desenvolvimento do raciocínio matemático. Conclui-se que a Prova sem Palavras pode ser uma ferramenta eficiente para tornar a abstração matemática mais acessível e para auxiliar na identificação de padrões e generalização de fórmulas.

Palavras-chave. Prova sem Palavras, Representação Visual, Demonstração Formal, Ensino de Matemática, Indução Finita.

1 Introdução

A Matemática é frequentemente percebida como uma ciência abstrata, cuja formalidade nas demonstrações nem sempre é facilmente compreendida pelos estudantes. Sempre deparam-se com fórmulas matemáticas ou teoremas e se questionam "como surgiu? qual caminho à demonstração?, há uma forma menos complicada de se demonstrar?". São questionamentos comuns, afinal, os processos de abstração e generalização de fórmulas não são tão simples. As propostas visuais ou de imagem participam em segundo plano na elaboração da demonstração e não aparecem no produto final. Dessa forma, a necessidade de rigor matemático, muitas vezes, leva ao distanciamento do aluno, que encontra dificuldades em visualizar os conceitos de maneira mais intuitiva. Entretanto, o uso de representações visuais pode fornecer uma alternativa metodológica para superar essa barreira. A Prova sem Palavras (*Proof Without Words - PWW*) oferece uma abordagem visual para demonstrações matemáticas, utilizando-se de imagens para expressar ideias matemáticas de maneira direta e intuitiva. A formalidade nas demonstrações matemáticas remonta à Grécia antiga, com Euclides e seu trabalho Os Elementos. No entanto, ao longo dos séculos, surgiram movimentos que defendem a importância da intuição e da visualização no processo de compreensão matemática, como a obra de Leibniz. Este trabalho tem como objetivo investigar como as Provas sem Palavras podem complementar as demonstrações formais no ensino médio, auxiliando os alunos a identificar padrões, desenvolver abstrações e generalizar fórmulas matemáticas.

[1]luiz.otavio@ifmt.edu.br
[2]weversson.sellin@ufvjm.edu.br

2 Metodologia

A pesquisa foi de natureza qualitativa, realizada com 12 estudantes do terceiro ano do Ensino Médio integrado ao curso técnico em Informática no Instituto Federal de Minas Gerais *campus* São João Evangelista. A metodologia envolveu a aplicação de uma oficina pedagógica *on-line*, composta por dez questões que podiam ser resolvidas utilizando demonstrações formais, em obediência ao rigor matemático de uma demonstração, e/ou Provas sem Palavras, metodologia complementar e alternativa que se utiliza de métodos visuais como imagens e desenhos. As questões abordaram somas de elementos de progressões aritméticas e geométricas, além da utilização do Princípio da Indução Finita.

Por meio de uma oficina pedagógica, dividida em duas partes, ocorreu a aplicação das questões. A primeira parte introduziu as demonstrações tradicionais de somatórios e sequências numéricas; e, a segunda parte apresentou representações visuais que, por meio de figuras e diagramas, mostravam as mesmas relações matemáticas. O objetivo era que os estudantes comparassem as duas abordagens e refletissem sobre suas preferências e compreensões.

Após a aplicação da oficina, foi disponibilizado um questionário eletrônico para coletar as percepções dos participantes sobre a eficácia da metodologia adotada. O questionário incluiu perguntas sobre a clareza das demonstrações, a dificuldade percebida em cada abordagem e o impacto das representações visuais na compreensão dos conceitos matemáticos.

3 Resultados e Discussão

Os resultados e discussões à seguir referem-se a algumas das propostas de representações visuais para as questões aplicadas. Perceber-se-á que, em alguns momentos, há estudantes que propõem demonstrações formais, utilizando-se do Princípio de Indução Finita ou fórmulas de soma de Progressão Aritmética ou Geométrica; noutros momentos, utilizam-se de representações visuais (Prova sem Palavras).

3.1 Soma dos n primeiros números naturais

A primeira questão proposta foi relacionada à soma dos n primeiros números naturais.

Mostre a igualdade $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$**, para todo** $n \in \mathbb{N}$**.**

O participante P_1 propõe a demonstração por meio do Princípio de Indução Finita, que trata-se de um método já visto na disciplina de Lógica Matemática no curso técnico em Informática. Segue abaixo a proposição de P_1.

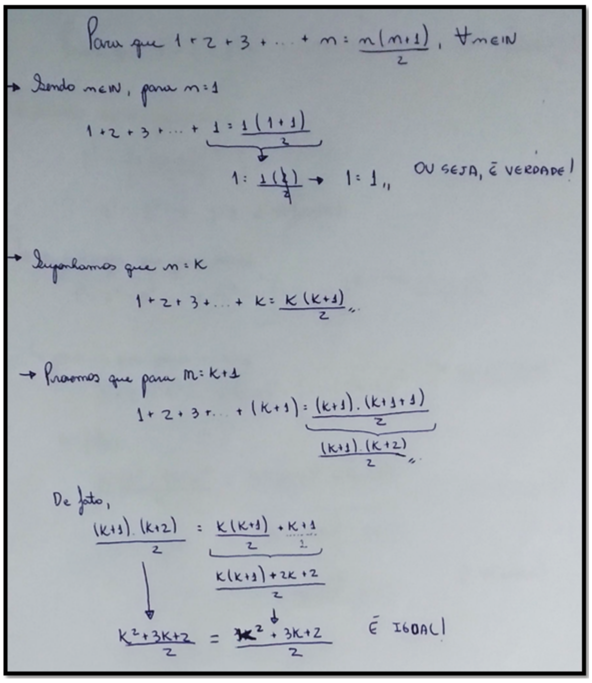


Figura 1: Proposta do estudante P_1. Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

Outros participantes utilizaram a fórmula da soma dos n termos de uma Progressão Aritmética. Estes fatos afirmam o não contato, por parte do grupo participante, com o uso de representações visuais. Casanave, Vaz e Schultz (2009) classificam as abordagens pelo Princípio de Indução Finita e pela Progressão Aritmética como provas sentenciais, que não utiliza-se de recursos gráficos ou pictóricos, como neste caso.

Assim, o pesquisador propõe a construção a seguir que, imageticamente, mostra o aparecimento da referida soma e a igualdade a ela relacionada.

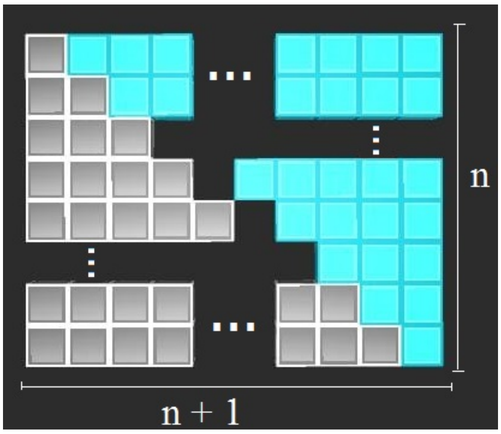


Figura 2: Soma dos n primeiros números naturais. Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

Os participantes apresentaram curiosidade em relação ao artifício utilizado, a saber a Prova sem Palavras. A soma aplicada na imagem trata-se de, na primeira linha, de cima para baixo, haver um quadrado cinza; na segunda, haver dois quadrados cinza, e assim sucessivamente, até a n-ésima linha, onde há n quadrados cinza, assim como, é dada a mesma interpretação à quantidade de quadrados azuis, de baixo para cima, é fácil visualizar a quantidade total de quadrados cinza (ou azuis). No caso, existem n linhas, onde, cada linha possui $n+1$ quadrados e, como há a mesma quantidade de quadrados azuis ou cinzas, a quantidade de quadrados cinza (ou azuis) é $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

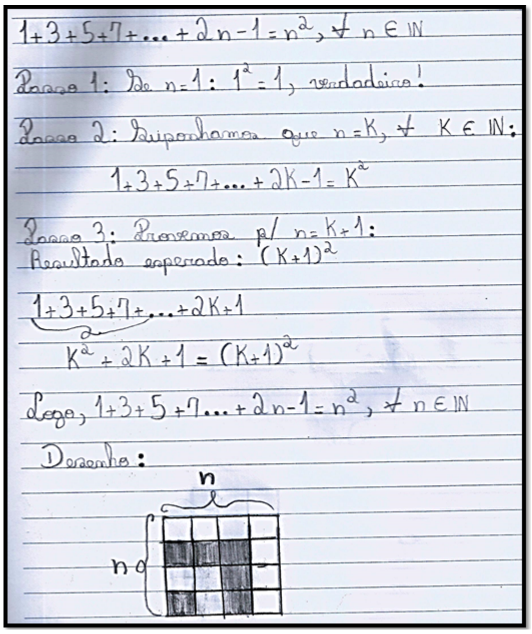
3.2 Soma dos n primeiros números ímpares

Outra questão proposta trata-se da soma dos n primeiros números ímpares, cujo objetivo foi o de familiarizar os estudantes com construções visuais de tais somas no conjunto dos naturais, onde, diversas dessas igualdades de somatórios podem ser mostradas utilizando-se de polígonos regulares.

Numa distribuição de balas, há uma quantidade n de crianças, onde cada uma delas, recebe 02 balas a mais que a criança anterior. Sabendo que a primeira criança recebeu 01 bala, qual a quantidade total de balas que devo comprar para tal distribuição ser feita?

A partir da contextualização sugerida, os participantes identificaram a soma finita dos números ímpares $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$, definiram o n-ésimo termo geral para a progressão $(2n - 1)$ e relembraram que, tal soma, é igual a n^2.

Uma representação visual sugerida pelo participante P_2 está mostrada à seguir, inclusive P_2 utiliza, resumidamente, os passos do Princípio de Indução Finita e, em seguida, tenta esboçar um desenho. Neste caso, P_2 introduz a tentativa de uso das duas representações: a formal e a visual por imagem. Duval (2009) coloca que pode-se haver distintas e variadas representações para um mesmo objeto matemático.


$1+3+5+7+\ldots+2n-1 = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$

Passo 1: Se $n=1$: $1^2 = 1$, verdadeiro!

Passo 2: Suponhamos que $n=K, \forall K \in \mathbb{N}$:

$1+3+5+7+\ldots+2K-1 = K^2$

Passo 3: Provemos p/ $n=K+1$:

Resultado esperado: $(K+1)^2$

$\underbrace{1+3+5+7+\ldots}_{K^2}+2K+1$

$K^2 + 2K + 1 = (K+1)^2$

Logo, $1+3+5+7\ldots+2n-1 = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$

Desenho:

Figura 3: Proposta do estudante P_2. Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

A representação visual utilizada por P_2 vai ao encontro da proposta sugerida pelo pesquisador, que segue abaixo.

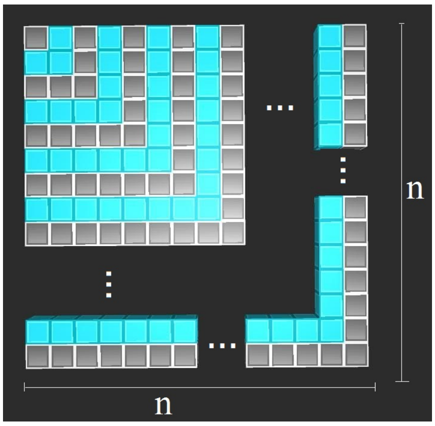


Figura 4: Soma dos n primeiros números ímpares. Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

Visualmente, tem-se que:

- Para o primeiro termo, 1, é óbvia a existência de um único quadradinho cinza;
- Para a soma, $1+3$, é observável que existem 4 quadradinhos que formam uma área gerada por dois números (1 e 3), ou seja, a medida do lado do quadrado de área 4 é 2;
- Para a soma, $1+3+5$, é observável que existem 9 quadradinhos que formam uma área gerada por três números (1, 3 e 5), ou seja, a medida do lado do quadrado de área 9 é 3;
- Para a soma, $1+3+5+7$, é observável que existem 16 quadradinhos que formam uma área gerada por três números (1, 3, 5 e 7), ou seja, a medida do lado do quadrado de área 16 é 4;
- De maneira sucessiva, é notório que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2, pois, se k é ímpar, então $k+2$ também é. Logo, é possível organizar cada próximo número ímpar $k+2$ ao ímpar anterior k e, isso implica o adicional de 1 unidade a cada lado do quadrado anterior, como apresentado nas representações do estudante P_2 e do pesquisador;
- Conclui-se que há n linhas por n colunas e, portanto, n^2 quadradinhos azuis e cinza.

Logo, em resposta à pergunta, são necessárias n^2 balas para que se cumpra a distribuição para n crianças.

Percebe-se, que houve uma proposta de solução visual, mas vinculada ao Princípio de Indução Finita, o que Casanave, Vaz e Schultz (2009) classificam como prova heterogênea (demonstrações com utilização de recursos figurativos). Logo, houve apropriação significativa de métodos algébricos em detrimento de apelos visuais e/ou geométricos, o que evidencia que o ensino básico na área de Matemática tende a ser algebrizado.

3.3 Soma infinita das frações $\frac{n}{2^n}$, com $n \in N^*$

A próxima questão proposta refere-se à soma infinita das frações $\frac{n}{2^n}$, com $n \in N^*$.

Mostre que $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=2$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

Tratou-se de uma questão considerada muito difícil pelos participantes. Segundo eles, detectar um padrão visual ou de termo para termo não foi possível; demonstrar, por fórmula da soma de uma Progressão Geométrica Infinita ou por Indução Matemática, foi impossível, uma vez que, em nenhum dos métodos se encaixa na definição para tal somatório.

Em contrapartida, o participante P_6 deu uma interpretação visual para a igualdade de uma forma muito precisa e diferenciada, de forma que surpreendeu todos os presentes na aplicação da Oficina, a qual segue abaixo.

Figura 5: Proposta do estudante P_6. Fonte: Arquivos do pesquisador (2021).

O estudante representou a soma visualmente da seguinte forma:

- Dois quadrados de área igual a 2, onde cada quadrado tem área 1, são divididos em partes;
- O primeiro quadrado foi dividido em duas partes de áreas iguais representando a soma $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$;
- O outro quadrado foi dividido em oito partes iguais, onde:
  - três destas partes, referem-se à $\frac{3}{8}$;
  - duas destas partes, referem-se à $\frac{2}{8}=\frac{4}{16}$;
  - uma parte mais $\frac{1}{4}$ da outra parte, referem-se à $\frac{5}{32}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}$;
  - $\frac{3}{4}$ da outra parte, refere-se à $\frac{6}{64}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}$;
  - e, a última oitava parte, possui $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}$ mais $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{4}$ desta oitava parte, a qual refere-se à $\frac{7}{128}=\frac{1}{32}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{32}+\frac{3}{128}$.
- De maneira sucessiva, é perceptível que o somatório de áreas em questão, como apresentado por P_6, tende a preencher toda a área de ambos os quadrados. Logo, conclui-se que $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=2$.

Um passo muito determinante e de crescimento, nesta questão, é o fato de P_6 apresentar um artifício visual totalmente diferente a outros propostos pelo pesquisador. A soma infinita em questão é apresentada na seção *"Um pouco de história"* de um artigo[3], de autoria de Ávila (1996).

Os objetivos em relação à incentivar a utilização do recurso visual para mostrar a igualdade na série foram alcançados, principalmente, por causa da representação visual sugerida pela estudante P_6 com sua Prova sem Palavras.

Uma prática educativa com solidez matemática é pautada por Allevato e Onuchic (2004), quando salientam que os objetivos gerais da área de Matemática são

> levantar ideias matemáticas, estabelecer relações entre elas, saber se comunicar ao falar e escrever sobre elas, desenvolver formas de raciocínio, estabelecer conexões entre temas matemáticos e de fora da matemática e desenvolver a capacidade de resolver problemas, explorá-los, generalizá-los e até propor novos problemas a partir deles (ALLEVATO; ONUCHIC, p. 218).

Dessa maneira, pode-se constatar a Prova sem Palavras como uma metodologia que colabora e incentiva uma disposição crítica e ativa do estudante pautada nestes objetivos, desenvolvendo o raciocínio e a criatividade, bem como, a habilidade de abstração e generalização de fórmulas.

4 Considerações Finais

A pesquisa mostrou que a Prova sem Palavras é uma ferramenta poderosa no ensino da Matemática, especialmente no que diz respeito à identificação de padrões, abstração e generalização de fórmulas. Elas proporcionam uma maneira intuitiva de compreender conceitos matemáticos que, de outra forma, poderiam parecer abstratos ou distantes para a compreensão dos alunos. Por outro lado, as demonstrações formais continuam sendo essenciais para garantir o rigor matemático necessário, mostrando que a visualização e a formalidade podem coexistir de forma complementar. O uso de ambas as metodologias oferece aos alunos a oportunidade de aprender Matemática de maneira mais acessível e envolvente, promovendo uma compreensão mais profunda e significativa dos conceitos.

Agradecimentos

Agradeço aos estudantes do IFMG *campus* São João Evangelista por sua participação na pesquisa.

Referências

[1] G. Ávila. "As séries infinitas". Em: **Revista do Professor de Matemática** 30 (1996).

[2] A. L. Casanave, B. Vaz e S. Schultz. "Diagramas e Provas". Em: **Doispontos** 6.2 (2009), pp. 13–25.

[3] R. Duval. "Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais". Em: **São Paulo: Livraria da Física** (2009).

[4] L. de la R. Onuchic e N. S. G. Allevato. "Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas". Em: **Educação Matemática: pesquisa em movimento** 4 (2004), pp. 232–252.

[3] "As séries infinitas". Disponível em `https://www.rpm.org.br/cdrpm/30/3.htm`. Acesso em 07 de fevereiro de 2021.