

Título: Um estudo dos triângulos: propriedades e relações fundamentais

Ronivon Alves¹

Dr. Francisco de Assis Benjamim Filho ²

ProfMat UFCA, Juazeiro do Norte, CE

Resumo. Este resumo expandido tem por finalidade apresentar os principais pontos que estão sendo desenvolvidos em uma dissertação de mestrado cujo título é “Um estudo dos triângulos: propriedades e relações fundamentais”, cujo objetivo, como sugere o próprio título é estudar os triângulos e as principais relações existentes entre os seus elementos, servindo de fonte de aprofundamento acerca do tema para professores e estudantes da educação básica. Inicialmente faremos um levantamento sobre como o tema tem sido abordado em alguns dos principais livros didáticos aprovados pelo Plano Nacional do Livro de Didático (PNLD) e em seguida um estudo teórico acerca do assunto. Notamos que ao explorar tal temática nos deparamos com uma expressão recorrente: $a^2 + b^2 - c^2$, em que a , b e c são medidas dos lados de um triângulo, que neste estudo a definimos como relacionador triangular. Definir tal expressão, nos possibilita reescrever equações famosas como a de Herão para o cálculo de área com uma outra aparência e tornar expressões envolvendo os elementos triangulares mais simples e práticas de serem manipuladas, como, de fato, veremos no decorrer deste trabalho.

Palavras-chave. geometria, triângulos, relacionador, ensino.

1 Introdução

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [9] preconiza um estudo aprofundado nas relações envolvendo triângulos, principalmente no ensino médio, visto que essa temática é muito presente em diversas áreas do conhecimento e em muitas situações cotidianas, a citar, nas artes, arquitetura, agrimensura, etc. Nesse sentido, podemos fomentar a importância de um estudo mais detalhado no que concerne aos elementos triangulares, já que apesar de haver grande volume de materiais abordando o tema, ainda há relevantes assuntos a serem investigados, muitos dos quais, relativamente triviais, que podem ser explorados, inclusive em educação básica.

Neste sentido, o trabalho "um estudo dos triângulos: propriedades e relações fundamentais" tem por objetivos apresentar conceitos, propriedades e relações métricas envolvendo os triângulos e seus elementos dentro da geometria euclidiana plana, para que sirva de fonte de estudo para estudantes e professores da educação básica e a quem mais se interessar.

Os livros didáticos, ano após ano, traz os mesmos tópicos relacionados aos triângulos, pouco ou nada se acrescenta. Sem sombra de dúvidas, o livro didático é uma importante fonte de estudo para o aluno, porém não é uma diretriz ou base única de estudo para o professor elaborar suas aulas, nesse sentido, cabe ao professor buscar outras referências, para que assim seja capaz de levar algo a mais para o seu público e/ou ter maior domínio de conteúdo. Sob essa perspectiva, livros paradidáticos, periódicos, artigos acadêmicos ou dissertações de mestrado são uma boa opção para diversificar as perspectivas sob as quais se aborda determinados assuntos em sala de aula e encontrar inspiração para aulas dinâmicas e com maior ressignificação dos objetos de estudo. Vale

¹ronivonciencias@gmail.com

²Orientador

ênfatizar que não se trata de estarem certos ou errados os conteúdos abordados nos livros didáticos, ou muito menos julgá-los como bons ou ruins, longe disso, o ponto é que eles não devem ser o único balizador no tocante ao que ou como algo deve ser ministrado em sala de aula.

Dentro de uma escola, cada turma é única e somente a experiência do professor e a convivência professor/aluno e demais membros que compõem a escola poderá mostrar os melhores métodos de ensino para se alcançar o número máximo de estudantes dispostos a se dedicar à aprendizagem da Matemática (o que não significa que sempre haverá um método que alcançará a maioria, infelizmente), desse modo a prática adquirida ao longo de anos de ensino é de grande apoio, mas é imprescindível que o professor tenha uma boa “bagagem” teórica, e mais que isso, consiga fazer uma transposição didática de acordo com o nível de conhecimento da sua turma. Vale salientar que a transposição didática é um estudo teórico dentro das teorias da aprendizagem que mostra como acontece uma transformação do conhecimento desde a sua produção científica até chegar aos estudantes do ensino básico, sendo que é o professor que fará a última análise da forma como tais produções científicas serão apresentadas à turma. Com isso, reforçamos a importância de se ter um bom embasamento teórico do assunto que será ministrado, bem como das formas que tais assuntos podem ser ministrados.

Este resumo expandido, dentro da temática “Domínio aprofundado dos conceitos matemáticos do ensino básico”, destaca de forma breve alguns tópicos abordados com maior profundidade na dissertação do autor sobre a investigação dos triângulos.

2 Metodologia

A principal motivação desse trabalho é a apresentação de um estudo mais detalhado dos triângulos que, muitas vezes, não é apresentado no ensino básico.

Foi feito um levantamento do que se aborda sobre os triângulos em quatro coleções amplamente usadas no ensino médio: “Matemática em contextos”, dos autores Luiz Roberto Dante e Fernando Viana (chamaremos de coleção 1) [5] e [4], “Matemática”, do autor Joamir Roberto de Sousa (chamaremos de coleção 2) [10] e [11], “Matemática”, dos autores José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Roberto Câmara de Sousa (chamaremos de coleção 3) [1] e [2] e a coleção “Conexões”, obra coletiva cujo editor responsável é Fabio Martins de Leonardo (chamaremos de coleção 4) [7] e [8].

Todas as coleções analisadas são divididas em volumes por temáticas, assim usamos para este estudo os livros de geometria e trigonometria que trazem os temas relevantes à pesquisa. Sobre os triângulo dentro da geometria plana, em cada obra analisamos se eram apresentadas definições, classificações, relações envolvendo ângulos, relações métricas, cevianas e pontos notáveis, semelhança, relações trigonométricas, o cálculo de área envolvendo ângulos e a fórmula de Herão.

Além desses, foram consultados outros livros voltados para a geometria e um deles, C.Q.D., Garbi [6] trás algumas das relações apresentadas nesse trabalho, porém com uma abordagem diferenciada.

Após o levantamento mencionado, foram obtidas relações geométricas envolvendo triângulos, incluindo equações para calcular medidas de cevianas importantes, como a altura, bissetriz interna e mediana.

3 Resultados e Discussão

Apresentamos na tabela 1, abaixo, de forma sucinta, os resultados da pesquisa feita nas quatro coleções de matemática para o ensino médio acerca da abordagem dada ao estudo dos triângulos.

Tabela 1: O estudo dos triângulos em coleções de matemática para o ensino médio

	Coleção 1	Coleção 2	coleção 3	coleção 4
Definição de triângulo	Não	Sim	Não	Não
Classificação dos triângulos	Não	Não	Não	Não
Ângulos internos e externos	Não	Não	Não	Não
Relações métricas	Sim	Sim	Sim	Sim
Cevianas e pontos notáveis	Não	Não	Não	Não
Semelhança de triângulos	Sim	Sim	Sim	Sim
Relações trigonométricas	Sim	Sim	Sim	Sim
Cálculo de área envolvendo ângulo	Não	Não	Sim	Sim
Fórmula de Herão	Sim	Sim	Sim	Sim

A tabela 1 resume o resultado da pesquisa já mencionada, contudo cada tópico teve uma análise mais minuciosa. Por exemplo, todas as coleções apresentam relações métricas, porém somente em relação ao triângulo retângulo. Nenhuma coleção apresenta definições ou proposições relacionadas a cevianas em triângulos, apesar de que a coleção 3 trás o teorema da bissetriz interna. Em se tratando de área, notamos que duas das coleções exploram um pouco mais o assunto em relação às outras, entretanto não há grande destaque para os temas que aparecem apenas nelas. Enfatizamos mais uma vez que isso não classifica uma ou outra coleção como melhor ou pior, simplesmente nos mostra que o professor deve variar sua fonte de estudo e “filtrar” o que será trabalhado de acordo com o perfil da sua turma, até porque, os autores tiveram que selecionar os tópicos que julgaram mais necessários para as suas obras.

O foco principal da dissertação referente a esse resumo expandido é trazer um embasamento teórico acerca do estudo dos triângulos para estudantes e professores da educação básica. Nessa perspectiva, definimos uma expressão frequente dentro das proposições relacionadas aos triângulos que denominaremos relacionador triangular.

Definição 1. *Seja ABC um triângulo, tal que $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$, chamamos de relacionador do triângulo ABC em relação ao vértice C , cuja notação é R_C^{ABC} a seguinte expressão:*

$$R_C^{ABC} = a^2 + b^2 - c^2 \quad (1)$$

A partir dessa definição e fundamentados previamente por outras teorias podemos formular proposições como as que seguem, sempre considerando o triângulo ABC sob as mesmas condições da definição 1.

Proposição 1. *Dadas as medidas dos lados de um triângulo ABC temos que:*

- $R_C^{ABC} = a^2 + b^2 - c^2 < 0$ se, e somente se, o ângulo $\angle BCA$ é obtuso.
- $R_C^{ABC} = a^2 + b^2 - c^2 = 0$ se, e somente se, o ângulo $\angle BCA$ é reto.
- $R_C^{ABC} = a^2 + b^2 - c^2 > 0$ se, e somente se, o ângulo $\angle BCA$ é agudo.

As demonstrações dessas proposições são consequências diretas da lei dos cossenos e são apresentadas na dissertação.

Proposição 2. *Seja r uma reta perpendicular a um segmento BC no ponto H , tal que $CH = m$. Seja ainda $A \neq H$ um ponto qualquer da reta r , temos que*

$$R_C^{ABC} = 2am \quad (2)$$

Demonstração. Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned}
h &= \sqrt{b^2 - m^2} = \sqrt{c^2 - (a - m)^2} \\
b^2 - m^2 &= c^2 - (a - m)^2 \\
b^2 - m^2 &= c^2 - a^2 + 2am + m^2 \\
b^2 - c^2 &= 2am - a^2 \\
a^2 + b^2 - c^2 &= 2am \\
R_C^{ABC} &= 2am
\end{aligned}$$

□

Note que dessa forma

$$m = \frac{R_C^{ABC}}{2a}$$

Também podemos determinar a medida de cevianas notáveis, como vemos a seguir.

Proposição 3. *Nas mesmas condições do triângulo ABC da definição 1, a altura $AH = h$ do triângulo ABC é dada por*

$$h = \frac{\sqrt{(2ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{2a} \quad (3)$$

Demonstração. Sendo H o pé da altura $AH = h$ e $CH = m$, pelo teorema de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned}
h &= \sqrt{b^2 - m^2} \\
h &= \sqrt{b^2 - \left(\frac{R_C^{ABC}}{2a}\right)^2} \\
h &= \frac{\sqrt{(2ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{2a}
\end{aligned}$$

□

A partir da proposição 3 é imediato notar que a área A_{ABC} do triângulo ABC é dada por

$$A_{ABC} = \frac{\sqrt{(2ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{4} \quad (4)$$

Uma observação importante é que essa última equação é equivalente à fórmula de Herão, como podemos ver abaixo:

$$A_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Em que

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

é dito semiperímetro do triângulo em questão.

Desse modo

$$A_{ABC} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \left(\frac{a+b+c}{2} - a\right) \left(\frac{a+b+c}{2} - b\right) \left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)}$$

$$A_{ABC} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \left(\frac{a+b+c-2a}{2} \right) \left(\frac{a+b+c-2b}{2} \right) \left(\frac{a+b+c-2c}{2} \right)}$$

$$A_{ABC} = \sqrt{\left(\frac{(-a^2 + ab - ac + ab - b^2 + bc + ac - bc + c^2)(a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc - ac - bc - c^2)}{16} \right)}$$

$$A_{ABC} = \sqrt{\left(\frac{(2ab - (a^2 + b^2 - c^2))(2ab + (a^2 + b^2 - c^2))}{16} \right)}$$

$$A_{ABC} = \frac{\sqrt{(2ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{4}$$

Observe que quando usamos o relacionador triangular a obtenção da equação para o cálculo da área é simples e acessível para estudantes do ensino médio. Em contraste, a fórmula de Herão, apesar de ser fácil de aplicar exige manipulações algébricas mais elaboradas para se demonstrar, tornando-a consideravelmente menos intuitiva.

Além das medidas das alturas, também podemos determinar as medidas das bissetrizes, medianas e a porção da mediatriz contida no triângulo. As demonstrações para as seguintes proposições encontram-se na dissertação. Ainda considerando as mesmas condições do triângulo ABC da definição 1, temos:

Proposição 4. *A medida z da bissetriz referente ao ângulo $\angle BCA$ é dada por*

$$z = \frac{\sqrt{ab(2ab + (R_C^{ABC})^2)}}{a + b} \quad (5)$$

Proposição 5. *A medida y da mediana referente ao vértice A do triângulo ABC é dada por*

$$y = \frac{\sqrt{2R_A^{ABC} + a^2}}{2} \quad (6)$$

Proposição 6. *Seja M o ponto médio do segmento BC e N a interseção da mediatriz com o lado CA (sem perda de generalidade, considere como vértice C aquele que torna possível a existência do ponto N). Nessa condições, temos que $MN = x$ é dada por*

$$x = \frac{a}{2} \sqrt{\left(\frac{2ab}{R_C^{ABC}} \right)^2 - 1} \quad (7)$$

Proposição 7. *A medida R do raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC é dada por*

$$R = \frac{abc}{\sqrt{(2ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}$$

Proposição 8. *A medida r do raio do círculo inscrito no triângulo ABC é dada por*

$$r = \frac{\sqrt{(2ab)^2 - (R_C^{ABC})^2}}{2p}$$

em que p é o perímetro do triângulo.

Note que é imediato perceber que o produto entre a medida do raio do círculo circunscrito e a medida do raio do círculo inscrito equivale ao quociente entre o produto das medidas dos lados do triângulo e o dobro do perímetro, ou seja,

$$Rr = \frac{abc}{2(a+b+c)}$$

A literatura clássica apresenta, como na obra de Garbi [6], que

$$R = \frac{abc}{4A_{ABC}} \quad (8)$$

e

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad (9)$$

em que s é o semiperímetro do triângulo, o que evidencia que o relacionador triangular facilita a visualização imediata de relações entre os elementos dos triângulos.

A seguir um exemplo de como o relacionador triangular pode encurtar os cálculos na resolução de um problema.

Exemplo 1: (EFOMM-2014 [3]) Considere um triângulo retângulo de catetos 9 cm e 12 cm. A bissetriz interna relativa à hipotenusa desse triângulo mede:

Uma das abordagens clássicas para resolver o problema seria usar a equação

$$z = \frac{2}{a+b} \sqrt{abs(s-c)}$$

sendo z a medida da bissetriz relativa a hipotenusa e a e b as medidas dos catetos, c a medida da hipotenusa e s o semiperímetro, de acordo com o que apresenta Garbi[6]. Assim, por Pitágoras segue que $c = 15$ cm. Desse modo:

$$s = \frac{9+12+15}{2} = 18$$

Portanto

$$\begin{aligned} z &= \frac{2}{9+12} \sqrt{9 \cdot 12 \cdot 18 \cdot (18-15)} \\ z &= \frac{36}{7} \sqrt{2} \end{aligned}$$

De contrapartida, usando o relacionador triangular, temos que

$$z = \frac{\sqrt{ab(2ab + (R_C^{ABC})^2)}}{a+b}$$

Mas no triângulo retângulo, o relacionador triangular referente ao ângulo reto é 0. Assim:

$$z = \frac{ab}{a+b} \sqrt{2}$$

Ou seja

$$z = \frac{36}{7} \sqrt{2}$$

Além dessas, a dissertação apresenta outras proposições relacionadas as razões trigonométricas, distâncias de um vértice a um ponto notável do triângulo e outras relações envolvendo áreas.

4 Considerações Finais

O estudo dos triângulos na geometria plana é bastante amplo. Embora alguns tópicos sejam abordados no ensino fundamental, muitos deles não recebem a devida atenção no ensino médio, apesar da necessidade de uma abordagem mais aprofundada. No ensino médio, há uma boa cobertura de temas relacionados à trigonometria, e um sólido entendimento dos triângulos é essencial para uma melhor compreensão desses conteúdos. Portanto, é importante avaliar o perfil da turma para, quando necessário, aprofundar o estudo dos triângulos de forma adequada.

Embora não seja viável abordar exaustivamente todos os aspectos relacionados aos triângulos no ensino médio, é fundamental dispor de materiais abrangentes, que contemplem o maior número possível de informações, de modo a permitir a seleção criteriosa dos conteúdos mais relevantes para o perfil e as necessidades da turma.

Nessa perspectiva, a dissertação “Um estudo dos triângulos: propriedades e relações fundamentais” ainda está em desenvolvimento, mas já apresenta resultados teóricos relevantes. Espera-se que, ao reunir as principais relações desse polígono, sirva como fonte de estudo para professores e estudantes, contribuindo, ainda que pontualmente, para o aprimoramento da educação básica.

Referências

- [1] José Roberto BONJORN, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Roberto Câmara de SOUSA. **Prisma Matemática: geometria: ensino médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias**. 2020.
- [2] José Roberto BONJORN, JR Giovanni Júnior e PRC de Sousa. **Prisma Matemática: geometria e trigonometria: Ensino Médio**. São Paulo: Editora FTD, 2020.
- [3] Concursos Militares. **Provas Anteriores da EFOMM**. Acesso em: 24 out. 2024. 2024. URL: <https://www.concursosmilitares.com.br/provas-antteriores/marinha/efomm/>.
- [4] Fernando Viana DANTE Luiz Roberto. **Matemática em contextos, geometria plana e geometria espacial**. São Paulo: Editora Ática, 2020.
- [5] Fernando Viana DANTE Luiz Roberto. **Matemática em contextos, trigonometria e sistemas lineares**. São Paulo: Editora Ática, 2020.
- [6] Gilberto G GARBI. **CQD: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria/Gilberto Geraldo Garbi**. 2010.
- [7] Fabio Martins de Leonardo, ed. **Conexões: Matemática e suas Tecnologias: Geometria plana e espacial**. 1ª ed. 6 vol. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. São Paulo: Moderna, 2020.
- [8] Fabio Martins de Leonardo, ed. **Conexões: Matemática e suas Tecnologias: Trigonometria**. 1ª ed. 6 vol. Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. São Paulo: Moderna, 2020.
- [9] Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Acesso em: 30 set. 2024. Ministério da Educação, Brasil. 2017. URL: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>.
- [10] Joamir Roberto de SOUZA. **Matemática geometria**. São Paulo: FTD, 2020.
- [11] Joamir Roberto de SOUZA. **Matemática: sequências e trigonometria**. São Paulo: FTD, 2020.