

Propostas e Relatos de Integração Disciplinar para Análise Real na Formação Docente

Diogo Sampaio da Silva,¹ Flávia Morgana de Oliveira Jacinto²
PPGM UFAM, Manaus, AM

Resumo. Neste trabalho, há reflexões sobre a importância da Análise Real na formação de professores de Matemática, discutindo sua relevância e estrutura, frequentemente questionadas por parecerem desconectadas da prática docente no ensino básico. Além disso, aborda-se o problema da “dupla descontinuidade”, abordado por Klein, que se refere à discrepância entre a formação oferecida pela escola e as exigências das disciplinas universitárias, como o Cálculo, bem como a aparente falta de impacto da formação universitária na prática docente para professores de matemática e ciências da natureza nas escolas. Outro ponto relevante é a dificuldade de nivelar turmas heterogêneas, garantindo que todos os alunos alcancem os mesmos objetivos de aprendizagem. Também são levantadas questões sobre a natureza da Matemática como ciência dedutiva, considerando as mudanças históricas na relação entre intuição e rigor. Por fim, discute-se como a organização dos conteúdos e a produção de materiais didáticos para Análise Real podem enriquecer a formação dos professores, promovendo conexões com sua prática docente.

Palavras-chave. Análise Real, Formação docente, História da Matemática, Filosofia da Matemática

1 Introdução

No início do Século XX, o famoso matemático Felix Klein apontou o problema dos conteúdos ensinados na formação dos professores não conversarem com o ensino básico [5]. Isso se refere ao fato de que os conteúdos escolares não preparam adequadamente os futuros pesquisadores em ciências da natureza e matemática para as transformações que esses campos sofreram após grandes descobertas e revoluções, e também ao fato de que é ensinado nas universidades nos cursos de licenciaturas parecem não influenciar na prática docente de muitos professores. No entanto, ao discutir sobre formação de professores de matemática, muito se fala em uma formação sólida em matemática para os futuros professores, muitas vezes sem explicitar o que efetivamente constituiria essa tal solidez, como apontam Moreira e Ferreira [8].

Em particular, nesse trabalho, nos interessa debater o papel da Análise Real na formação dos futuros professores de Matemática. Essa é uma disciplina essencial para a prática docente? Como ela pode ser útil ao professor em formação? Veremos como conhecimentos da e sobre a Análise Real podem influenciar o modo como os professores podem trabalhar nos tópicos mais iniciais do ensino da Matemática. Assim, propomos como uma resposta ao problema da dupla descontinuidade da formação do professor, conectar os conhecimentos de e sobre Análise Real com a experiência dos professores de Matemática.

Outro matemático muito influente do século XIX, Henri Poincaré, indagou algo muito importante para nossa discussão: como a própria forma de fazer Matemática muda com o tempo. Em sua

¹sampaiodiogo.dasilva@gmail.com

²morgana@ufam.edu.br

obra intitulada “O valor da Ciência” [9], Poincaré apresenta sob a ótica da relação entre intuição e rigor, debates a respeito da própria natureza da Matemática e como esta muda com o tempo.

Assim, Poincaré afirma que a cada época que se analisa da História da Matemática, se pensa haver atingido o rigor absoluto, fruto das necessidades que cada época exige em seus problemas.

Algo especialmente emblemático na Matemática entre os séculos XVII e XX, e exemplo deste processo, é a chamada aritmetização de seus conteúdos. Isto significa que o estudo de diferentes áreas e conceitos passou a depender cada vez mais de uma definição rigorosa da noção de número [2], emergindo assim, para os matemáticos da época e os professores de matemática após este momento, perguntas sobre a melhor forma de introduzir conceitos básicos, para formalizar mais adequadamente os objetos no primeiro caso, e para introduzir a nova formalização aos alunos das próximas gerações, no segundo caso.

O que veremos é que esta aritmetização da Matemática trouxe profundas transformações no conceito de número como concebido pela comunidade matemática, tornando o estudo dos números reais uma figura central na transformação da Matemática para a forma que possui atualmente. Defendemos que essas reflexões são extremamente úteis para que o professor não só adquira um conhecimento profundo de Matemática, mas também desenvolva uma compreensão mais ampla sobre sua natureza, possibilitando reflexões sobre a aprendizagem em sala de aula.

De modo geral, Alfonso-Goldfarb defende que nas ciências, reflexões e discussões sobre como produzir conhecimento surgem naturalmente com as diferentes necessidades e questões de cada momento no decorrer da história, sendo apresentadas e discutidas pelos próprios estudiosos [1]. E tal conhecimento é particularmente útil ao professor que ensinará ciências, ampliando sua compreensão não apenas do conhecimento adquirido, mas de suas origens e do porquê este se faz necessário. Assim como Poincaré, vemos que as ciências se caracterizam através da busca pela verdade, o que inclui a Matemática [9].

Propomos então compartilhar nossa experiência na produção de um material didático voltado para a disciplina Análise Real, tendo como principais diretrizes a integração entre conhecimentos de Matemática, alguns dos fatos históricos que possam trazer a compreensão da evolução das ideias que contextualizaram o surgimento desses conhecimentos e possíveis relações com o ensino e aprendizagem da Matemática em sala de aula.

A semente germinal do nosso material está em abordagens e roteiros usados e aplicados na realização de cursos de nivelamento em Análise Real ministrados pela segunda autora, cujos estudantes ou eram alunos de graduação, em várias fases de seus cursos, ou alunos egressos dos cursos de licenciatura em Matemática, e dentre estes últimos, alguns sem qualquer experiência de sala de aula, enquanto outros há muito tempo formados. Com estudantes em momentos tão discrepantes, fez-se necessário abordar conceitos básicos de conjuntos e funções, a fim de que estivessem com o arsenal considerado mínimo e necessário para o curso do nivelamento.

2 Metodologia

Nosso trabalho se inicia com o curso de Análise Real ofertado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Amazonas (PPGM-UFAM), que tem sido ofertado para alunos com interesse em realizar o exame de seleção de mestrado para o mesmo programa. A segunda autora possui experiência com este curso e com a disciplina Análise Real oferecida para os cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática da mesma universidade, tendo ministrado pelo menos 4 vezes desde 2008.

Ao observarmos que não só as abordagens e organizações do curso sugeridas na ementa ou na bibliografia eram possíveis, como até mesmo outras diferentes das escolhidas para as aulas do curso, registramos parte do que foi apresentado em sala de aula e tornamos o que seriam inicialmente notas de estudo individual em material de apoio a estudos dirigidos com soluções de exercícios,

incluindo e destacando estas possíveis abordagens e organizações. No entanto, ao discutirmos sobre como melhorar o trabalho, vislumbramos a possibilidade de torná-lo um material de apoio para alunos de licenciatura em Matemática, contemplando não apenas os conteúdos de Análise Real em uma disposição original, como ainda de forma integrada com a história da Análise e reflexões sobre como o conteúdo apresentado pode se relacionar com a prática em sala de aula do professor.

Além disso, a segunda autora tem realizado intervenções dentro do ensino do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de graduação, a partir da perspectiva de integrar pontualmente a formalização da Análise Real com essa disciplina, visando apresentar alguns conceitos via a experimentação numérica com o auxílio do aplicativo *Geogebra* Clássico e disponível gratuitamente. Intervenções que objetivam que os alunos experimentem, por exemplo: calcular os epsilons e deltas da definição formal de limite e continuidade de funções para alguns exemplos clássicos, como para as funções afins ou o inverso de um número real não nulo; ou ainda calcular os valores reais que satisfazem os famosos teoremas do valor intermediário e médio para algumas funções polinomiais.

Já o primeiro autor, além de promover o uso do material produzido em monitorias do curso de nivelamento em Análise Real e do curso de Análise para graduação, participará com seminários, tanto para cursos de graduação como para os cursos de nivelamento, com o intuito de promover discussões históricas sobre o desenvolvimento dos conceitos de números reais e funções, abordando as principais ideias surgidas dentro da nossa atual bibliografia, buscando trazer reflexões sobre o surgimento e evolução do Cálculo e da Análise, bem como seus papéis nas formações dos discentes.

Tais integrações permitem que o Curso de Cálculo já introduza alguma familiaridade com as noções que geralmente só são apresentadas com enfoque no Curso de Análise. Por outro lado, um Curso de Análise integrado com a formação docente permite que os professores do ensino básico compreendam melhor as noções do Cálculo e preparem seus alunos que possam encontrar tais noções em sua formação, e os professores do ensino universitário rompam com o ciclo da dupla descontinuidade na formação docente.

O que apresentamos nas seções seguintes são ideias obtidas a partir de grande parte da literatura selecionada como referência às notas, e aqui apontamos uma ideia central contida no texto: o estudo da evolução da Matemática através do tempo complementa a formação matemática, especialmente de professores.

3 Resultados e Discussão

De modo geral, apesar da natureza abstrata da Matemática, muitas vezes o que impulsiona seu desenvolvimento são questões concretas. Isso ilustra bem a dualidade intuição-rigor discutida por Poincaré [9]. Tal relação, tão preciosa para o desenvolvimento da Matemática, deve ser trazida também para seu ensino, naturalmente.

Lembramos que nosso foco principal é estudar limites de funções reais de uma variável real, e particularmente, derivadas e integrais de tais funções, a fim de estudar seu comportamento. Muitos desses conceitos envolvem transitar entre ideias visuais e sua representação simbólica formal, desenvolvendo assim a prática de trabalhar rigor e intuição em conjunto, lado a lado, o que Poincaré defendia como essencial na atividade matemática [9].

A isso se soma a colocação de Russel em seu livro “Introdução à Filosofia Matemática” [11], que classifica dois tipos principais de estudo na matemática: o construtivo que avança do mais simples para o mais complexo, e o que avança através da análise dos conceitos procurando quais ideias e princípios gerais podem ser obtidos indo no sentido contrário.

Em consonância com o que foi apresentado, Klein comenta em [5] o fato de que o desenvolvimento da Matemática é como o de uma árvore: os galhos crescem juntamente com as raízes. Os galhos crescem juntamente com as raízes. Isto é, enquanto novas descobertas são feitas, muitas vezes novos padrões de rigor surgem, e a fundamentação da Matemática é revisitada e reconstruída,

de acordo com as necessidades e problemas de cada período.

Mas tais mudanças de abordagem surgem naturalmente no desenvolvimento histórico da Matemática. Como Otero-Garcia e Baroni apontam [2], apesar de o Cálculo Diferencial e Integral estabelecido por Newton e Leibniz ter sido rapidamente aceito, a busca por novos resultados tornou cada vez mais necessária uma nova formalização daqueles obtidos anteriormente. Como exemplo, Otero-Garcia e Baroni destacam o estudo das séries trigonométricas, que levou: Riemann ao estudo das integrais; Cantor ao estudo dos números reais e a criar a Teoria dos Conjuntos; Weierstrass ao estudo de continuidade e derivabilidade.

Assim, apesar de conceitos como continuidade, derivada e integral estarem há muito estabelecidos, investigações buscando trazer novos resultados acabaram denunciando a necessidade interna de reconstrução da Matemática com novos padrões de rigor, e no centro disso estava a necessidade de se entender melhor a noção de número real. Afinal, como Hairer e Wanner questionam em [3], podemos dizer que derivadas e integrais são limites, mas o que é um limite senão um número real?

No prefácio da mesma obra, Hairer e Wanner apontam que a sequência usual de um curso de Análise começa com conjuntos e funções, depois limites e continuidade, seguidos de derivadas e por fim integrais. Observam ainda que historicamente, esses conceitos se desenvolveram como entendemos na ordem contrária.

Para acentuar as diferenças entre Cálculo e Análise, as organizações dos tópicos costumam divergir também. Serge Lang em seu livro de cálculo afirma que o desenvolvimento lógico dos tópicos seria na seguinte ordem: Teoria dos Conjuntos, Números Inteiros, Números Racionais, Números Reais, Limites, Derivadas e Integrais e outros conteúdos. No entanto, Lang também aponta que esta não é a ordem mais proveitosa para esse curso de natureza mais introdutória, tomando noções mais intuitivas de números como ponto de partida [6].

Uma das primeiras coisas que se destaca ao analisar a ideia matemática de função através da História é que este conceito é um divisor de águas, marcando a origem da prática matemática moderna, firmada cada vez mais no conceito de dependência entre variáveis [2]. Um dos principais fatores que leva ao surgimento da noção de função é o mesmo que dá origem ao Cálculo Infinitesimal: o estudo de curvas.

Segundo Otero-Garcia e Baroni [2], as bases sobre as quais se fundamentaram o que hoje se entende por função foram a notação simbólico-algébrica introduzida por François Viète (1540-1603) e a geometria analítica introduzida por René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665). Ainda de acordo com os mesmos autores, Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) foram os responsáveis pelo surgimento do que hoje entendemos por Cálculo. Enquanto Newton desenvolveu tal teoria devido a preocupações de natureza física, Leibniz visava enfrentar problemas geométricos.

Segundo os mesmos autores, o nome “função” é atribuído a Leibniz que, posteriormente, trouxe a formalização e simbologia do conceito, junto de Johann Bernoulli (1667-1748), conceito esse que foi adotado e padronizado por Leonard Euler (1707-1783). Posteriormente, Cauchy em [10] usou este mesmo conceito para protagonizar no que veio a se tornar o seu curso de Análise Real.

Este mesmo Cauchy, uma das principais figuras no surgimento da Análise Real como área separada do cálculo e um dos principais precursores do rigor matemático moderno, em seu curso de Análise ainda considerava número apenas o que se entende atualmente como número real positivo. O termo *quantidade* era empregado para representar números orientados, isto é, positivos ou negativos, e também o zero, coincidindo com a noção de número real atual [10]. Esta diferença de tratamento com os números negativos ameaçava ainda mais os números complexos, que não eram considerados números também, mas meras expressões, úteis apenas como ferramentas.

O conceito atual de convergência surge com Cauchy. A partir disso, ele estabeleceu e provou diversos testes de convergência, como o da raiz, o do quociente e aquele que, por vezes, é conhecido como “critério de Cauchy”, segundo Otero-Garcia e Baroni [2].

Este conceito tem ricas aplicações, não apenas na Matemática. Poincaré menciona que um tipo especial de série, chamada série de Fourier, foi criada para resolver um problema de física relacionado à propagação do calor [9]. Poincaré aponta isto como um lembrete de que muitas vezes a Matemática se desenvolve inspirada por questões que não são de natureza matemática.

Reiteramos que a grande procura por novos padrões de rigor na Matemática Moderna tem como marco inicial uma revisão sobre um teorema hoje atribuído à Análise Real: o Teorema do Valor Intermediário [2]. Em termos simples, esse teorema diz que se uma função contínua definida em um intervalo fechado e limitado assume um valor menor que um valor d e depois um outro valor maior que d , então em algum momento, seu valor é exatamente d . Tal fato pode ser considerado intuitivamente óbvio e assim o era, sendo por isso tomado como axioma ou demonstrado de forma menos rigorosa que nos padrões atuais.

No entanto, Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781 - 1848) apresentou uma prova puramente analítica em contraposição a demonstração mais informal apresentada pelo famoso matemático Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) em 1817, apenas analisando o conceito de continuidade, de modo semelhante à Análise Moderna com seus ϵ s e δ s [2, 7].

Poincaré faz observações em [9] sobre como o conceito de função contínua se transformou através da História. Ele diz que a noção de função contínua começa como apenas uma imagem, por exemplo, a de um traço contínuo riscado a giz num quadro-negro. Depois, pouco a pouco foi utilizado um sistema de desigualdades, todas sendo construídas e remetendo-se à ideia original encapsulada pela imagem; para no final, rejeitar-se essa representação visual que lhe serviu de apoio, mas daí em diante se tornou inútil. Contudo, se nos desfazermos completamente da imagem inicial, como entenderíamos todas essas desigualdades estruturadas umas sobre as outras?

Atualmente, o conceito mais geral de continuidade faz parte do estudo da Topologia, que segundo Victor J. Katz, surge com Georg Bernhard Riemann (1826-1866) preocupado com problemas de integrais de funções [4], cujo trabalho foi continuado por Poincaré, que em [9] credits Riemann e Betti como os principais cultivadores desse estudo.

Como o grande matemático Henri Poincaré afirma em [9], a ausência de ideias quantitativas leva os teoremas da Topologia (chamada à época de *Analysis situs*) a possuírem a interessante vantagem em relação aos teoremas da Geometria Euclidiana: eles permanecem inalteradamente verdadeiros mesmo se representados visualmente de forma desproporcional, ou ainda substituindo linhas retas por outras mais sinuosas. Tal constatação faz com que Poincaré a chame de “verdadeira geometria qualitativa”. Justamente essa generalidade permite que a Topologia abstraia as ideias quantitativas, e Poincaré em [9] enfatiza que isto quer dizer que podemos ainda falar de noções de proximidade, sem falar explicitamente qual a distância entre os objetos.

No entanto, a aritmetização da Matemática fez com que outros conceitos ficassem cada vez mais dependentes da noção de número, o que levou a mais e mais pesquisas sobre como reduzir esta ideia para ideias ainda mais simples e gerais.

Em 1889, Giuseppe Peano introduziu em *Arithmetices Principia: Nova Methodo Exposita* axiomas para introduzir os números naturais. No entanto, o autor escreveu este trabalho de modo a apresentar todo o texto em linguagem simbólica, como forma de evitar que o uso de palavras de uma língua natural prejudicasse a exatidão do conteúdo trabalhado [5]. No século XIX, surgem movimentos buscando reformar a Matemática em bases cada vez mais rigorosas. Peano, por exemplo, juntamente com David Hilbert, reformou a estrutura de axiomas da Geometria Euclidiana, tornando-a adequada aos padrões modernos de rigor matemático. Tal era a busca por novas bases mais sólidas para o conceito de número, que este trabalho de Peano pode ser visto como um aperfeiçoamento de algo que o também matemático Richard Dedekind publicou apenas um ano antes [2].

A concepção atual de o conjunto dos números reais ser fruto de um conjunto de axiomas é ainda muito jovem, surgindo neste mesmo contexto por meio de David Hilbert, como parte de seu

programa em transformar toda a Matemática em deduções lógicas e todas as verdades matemáticas em consequências de demonstrações rigorosas [2]. Afinal, a Matemática da época tinha bases muito mais apoiadas na intuição, tornando a ideia de se livrar de toda a intuição muito tentadora, parecendo tornar tudo perfeitamente claro e exato.

Assim, novamente o surgimento da formalização dos conceitos do Cálculo do ponto de vista histórico segue ordem contrária à apresentada do ponto de vista axiomático.

4 Considerações Finais

Em síntese, defendemos que a aritmetização da Matemática, bem como outros eventos onde grupos de matemáticos refazem as bases de conceitos e proposições já estabelecidos, constituem períodos revolucionários para a Matemática, no sentido que Goldfarb aponta [1]. Tais observações complementam o entendimento do que a Matemática trata, expandindo a compreensão do que são objetos como números reais, funções contínuas e outros, além de entendermos a necessidade de estudá-los pelo método axiomático atual. Portanto, apoiamos a posição de Klein ao afirmar que professores devem atuar como diplomatas entre os estudantes e o conhecimento formal obtido nas universidades [5], e adicionamos que um complemento natural para trazer esta conexão é o entendimento não só das ideias matemáticas, mas de seu surgimento e evolução. Deste então, objetivamos atuar seguindo estas diretrizes em sala de aula, e esperamos incentivar ações semelhantes para outras disciplinas matemáticas universitárias.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece o apoio do PET-Matemática quando foi aluno de graduação e agora como aluno de pós-graduação e à CAPES pela bolsa que recebe. Agradece também aos professores André Pontes do Departamento de Filosofia da UFAM e Wanderley Vitorino do Departamento de Física da UFAM, por seus conselhos e recomendações de bibliografia. A segunda autora agradece ao Departamento de Matemática e ao PPGM-UFAM que sempre a apoiam no desenvolvimento de suas atividades de ensino e pesquisa.

Referências

- [1] A. M. Alfonso-Goldfarb. **O que é História da Ciência**. São Paulo: Editora Brasiliense, 2004.
- [2] R. L. S. Baroni e S. C. Otero-Garcia. **Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue**. Cultura Acadêmica, 2014.
- [3] E. Hairer e G. Wanner. **Analysis by its History**. Nova Iorque: Springer Science & Business Media, 2006.
- [4] V. J. Katz. **A history of mathematics: An introduction**. Pearson, 1998.
- [5] F. Klein. **Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior - Aritmética**. Lisboa: Editora da Sociedade Portuguesa de Matemática, 2009.
- [6] S. Lang. **A first course in calculus**. Nova Iorque: Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] Ø. Linnebo. **Philosophy of mathematics**. Princeton University Press, 2017.
- [8] P. C. Moreira e A. C. Ferreira. “O lugar da matemática na licenciatura em matemática”. Em: **Bolema: Boletim de Educação Matemática** 27 (2013), pp. 981–1005.

- [9] H. Poincaré. **O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2011.
- [10] T. M. Roque e G. F. Schubring. **Curso de Análise de Cauchy: uma edição comentada**. Rio de Janeiro: SBM, 2022.
- [11] B. Russell. **Introdução à Filosofia Matemática**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007.