

Estudo das Soluções do Jogo Círculo Zero com Restrições a Subconjuntos de Números Inteiros

Daniel Cunha da Silva,¹ Diego Soares Monteiro,² Natália Pedroza,³ Rasec Almeida⁴
UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. É vasto o campo de pesquisa sobre as potencialidades do uso de jogos nas aulas, especialmente quando surgem discussões sobre a real importância da participação ativa dos alunos no ambiente escolar. Este resumo, além de ter como objetivo propor o uso de atividades lúdicas no ambiente pedagógico, visa contribuir com investigações sobre a existência de soluções para o jogo educativo “Círculo Zero”. Consideramos dois cenários possíveis para a quantidade de peças do jogo: i) número de peças maior que o número de regiões do tabuleiro; e ii) número de peças igual ao número de regiões do tabuleiro. O trabalho apresenta uma abordagem quantitativa de caráter investigativo. A verificação da existência de soluções foi realizada por meio da implementação de algoritmos. Os resultados sugerem uma diferença significativa no número de soluções distintas nos dois cenários considerados e contribuem para o planejamento de docentes ao possibilitar a elaboração de aulas criativas, investigativas e desafiadoras para os estudantes.

Palavras-chave. Círculo Zero, Ludicidade, Investigação Matemática, Algoritmos.

1 Introdução

Historicamente, desde o momento em que as pessoas começaram a viver em comunidade, os jogos se tornaram parte das atividades coletivas. Eles podem ser usados por diversas faixas etárias, essa prática se mantém ao longo da história da humanidade. Há mais de cinco mil anos, os sumérios já se reuniam para disputar partidas de jogos de tabuleiro [9].

Na disciplina de Matemática, os jogos podem ser explorados de diversas maneiras, utilizando recursos já disponíveis no mercado, tanto em formatos físicos quanto digitais, ou ainda por meio da criação de materiais elaborados pelos próprios professores e alunos. A presença de jogos nos livros didáticos também apresentaram uma crescente.

O jogo “Círculo Zero” está presente em diversos materiais didáticos, como em [8, 10] e no livro ([5]) do 7º ano do Ensino Fundamental, além de no canal do Rioeduca na TV, e ainda, de ser possível jogá-lo on-line.

O Círculo Zero representa um jogo de tabuleiro circular do tipo quebra-cabeça, composto por n círculos que se intersectam dois a dois. O objetivo é por, em cada círculo, três peças identificadas por números inteiros, provenientes de um conjunto previamente definido, de tal forma que a soma desses três números resulte em zero. Um exemplo com solução para Círculo Zero com 5 círculos está descrito na Figura 1.

¹daniel.cunha.silva@uerj.br

²diego_smonteiro@hotmail.com

³npsnatalia@gmail.com

⁴almeida.rasec@gmail.com

⁴Este template foi baseado no modelo de trabalho completo do CNMAC 2024, disponível no Overleaf.

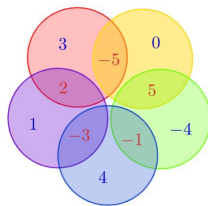


Figura 1: Uma solução do Círculo Zero com 5 círculos

Jogos como o Círculo Zero possibilitam o desenvolvimento da habilidade de adição e subtração de inteiros de forma lúdica, apresentando ao aluno um novo caminho à aprendizagem destes conceitos. Além disso, exploram a ideia de número negativo e positivo podendo ser relevantes para consolidação de significados dos inteiros (ver [8]).

Nesta pesquisa, considera-se um contexto de criação de cenários de investigações e são levantados os seguintes questionamentos: i) “Fornecendo ao jogador do Círculo Zero um conjunto de peças com cardinalidade igual ao número de regiões do tabuleiro, ele sempre encontrará solução?” e ii) “Se excluirmos a peça associada ao 0, ele sempre obterá solução?”. O objetivo desse artigo é investigar a existência de soluções para o jogo por meio de recursos computacionais e responder os questionamentos levantados. O computador é parte essencial para a realização desta pesquisa.

Para [7], durante uma atividade investigativa, espera-se que o aluno trabalhe de maneira produtiva, “formulando questões, representando a informação dada, ensaiando, testando conjecturas e procurando justificá-las”. Essa abordagem enfatiza não apenas a resolução de problemas, mas também o processo de investigação em si, promovendo uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos e desenvolvendo habilidades de raciocínio crítico entre os alunos.

Pesquisas como as de [3] destacam a importância de abordagens de ensino que enfatizam a resolução de problemas e a investigação como estratégias eficazes para promover a proficiência matemática dos alunos. Ao fornecer oportunidades para se explorar questões abertas e construir argumentos matemáticos, as investigações matemáticas não apenas enriquecem a experiência de aprendizagem, mas também ajudam os alunos a pensar criticamente e resolver problemas.

Por vezes, tais investigações podem envolver problemas matemáticos que desafiam a demonstração direta, levando à utilização de recursos computacionais como uma forma de auxílio na demonstração. Demonstrações assistidas por computador representam uma abordagem recente, se pensarmos na história da matemática, permitindo aos matemáticos explorar e verificar passagens em demonstrações de maneira mais eficiente e detalhada [2]. Embora o computador possa realizar algumas partes da resolução de um problema de forma mais eficiente do que o ser humano, “a intuição de um matemático é essencial e não substituível por nenhum programa de computador” [1]. Portanto, o que o computador pode fazer pelo matemático no processo de demonstração é determinado pelo próprio matemático [2].

2 Metodologia

Os resultados do presente estudo foram obtidos por meio de uma abordagem quantitativa de caráter investigativo. A investigação matemática é uma tendência de ensino na matemática, que tem origem em uma forma de se fazer pesquisa em matemática, que é o ato de investigar. Para os matemáticos, investigar consiste em descobrir relações entre objetos matemáticos, sejam eles conhecidos ou desconhecidos, buscando identificar suas respectivas propriedades, como destaca [6].

Numa investigação matemática, parte-se de uma questão muito geral ou de um conjunto de informações pouco estruturadas a partir das quais se procura formular uma questão

mais precisa e sobre ela produzir diversas conjecturas. [...] Neste processo, por vezes formulam-se novas questões e abandonam-se, em parte ou no todo, as questões iniciais. As conjecturas que resistirem a vários testes vão ganhando credibilidade, estimulando a realização de uma prova que, se for conseguida, lhes conferirá validade matemática ([6, p. 2])

A sequência metodológica empregada consistiu em uma série de pesquisas sobre jogos e desafios, destinadas a serem aplicadas evento escolar, com o intuito de oferecer atividades lúdicas aos alunos. A partir da adaptação e criação de jogos, surgiu um questionamento por parte de um professor-autor sobre a existência de solução para um conjunto específico de peças no jogo *Círculo Zero*. Esse questionamento foi o ponto de partida para uma pesquisa exploratória e investigativa.

As investigações começaram com a modelagem matemática do jogo e para o estudo dos dois cenários de investigações propostos foram utilizados Python e MATLAB como linguagens de programação para implementação dos algoritmos.

Definition 2.1. *Considere $n \geq 3$ círculos indistinguíveis, que se intersectam dois a dois, conforme Figura 2, e geometricamente definem $2n$ regiões. O jogo *Círculo Zero*, consiste em colocar $2n$ peças, associadas a um dado conjunto $A_n = \{-n, -(n-1), \dots, n-1, n\} \subset \mathbb{Z}$, de tal forma que cada região receba uma única peça distinta das demais e que a soma dos valores das três peças em cada círculo resulte em zero.*

*A sequência $a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}) \in \mathbb{Z}^{2n}$ é uma solução do *Círculo Zero* se satisfaz o sistema de equações diofantinas:*

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_3 + a_4 + a_5 = 0 \\ \vdots \\ a_{2n-3} + a_{2n-2} + a_{2n-1} = 0 \\ a_{2n-1} + a_{2n} + a_1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

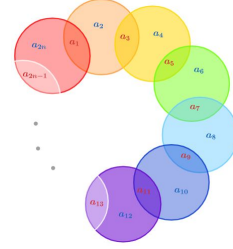


Figura 2: *Círculo Zero* com n círculos

com as restrições: $a_i \in A_n$ e $a_i \neq a_j$, para $i, j \in \{1, \dots, 2n\}$ com $i < j$.

A definição de solução do jogo *Círculo Zero* por meio da sequência a , não considera a natureza cíclica do jogo, isto é, o fato dos n círculos serem indistinguíveis, além de não considerar orientação: sentido horário e anti-horário. Assim, destaca-se que ao se considerar as rotações do tabuleiro, sequências distintas podem representar a mesma solução para o problema. Esses casos são chamados de “soluções equivalentes”, um exemplo aparece na Figura 3.

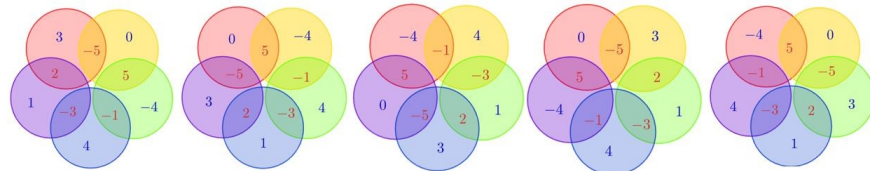


Figura 3: Exemplos de soluções consideradas equivalentes para $n = 5$

3 Resultados e Discussões

Deseja-se estudar a existência de soluções para o Círculo Zero impondo restrições às incógnitas do sistema 1 em dois cenários investigativos. No primeiro cenário, as restrições já estão presentes na definição 2.1. No segundo, impõe-se uma restrição a mais: as incógnitas pertencem ao conjunto $A_n \setminus \{0\} = \{-n, -(n-1), \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, n-1, n\}$. Neste último caso, a restrição imposta torna possível estabelecer uma bijeção entre o número de regiões e o número de peças.

Sem as restrições, o sistema 1 possui a solução trivial $(0, 0, \dots, 0, 0) \in \mathbb{Z}^{2n}$, dentre as soluções possíveis. No entanto, devido às restrições impostas, verificar a existência de uma solução pode não ser algo tão simples. Nesse caso, recorre-se à implementação de algoritmos.

3.1 Método de exaustão

O primeiro algoritmo implementado utiliza o método da exaustão. Considerando os elementos do conjunto A_n , constrói-se todas as sequências possíveis de $\mathbb{Z}^{2n}$ formada pelos elementos de A_n por meio das $2n$ -permutações dos $(2n+1)$ elementos de A_n , $P(A_n, 2n)$ [4].

$$P(A_n, 2n) = \frac{(2n+1)!}{(2n+1-2n)!} = (2n+1)!$$

A partir de cada sequência construída, o algoritmo verifica quais sequências satisfazem o sistema (1) e as restrições impostas para os valores das peças. Este algoritmo foi utilizado para estudar os dois cenários investigativos, contudo apresenta duas limitações principais, a primeira é não considerar a natureza cíclica do jogo, desse modo, temos:

$$\text{Quant. de soluções distintas} = \frac{\text{Quant. de soluções encontradas por exaustão}}{2n}.$$

A segunda é a exigência de muita memória do computador, uma vez que, o número de permutações realizadas é da ordem de $(2n+1)!$ e/ou $(2n)!$. O método de exaustão revelou-se apropriado para a análise dos casos de 3 a 6 círculos, inclusive. Para essas quantidades de círculos, sempre foi possível encontrar soluções para o sistema 1 com as restrições impostas e peças em A_n , Figura 4.

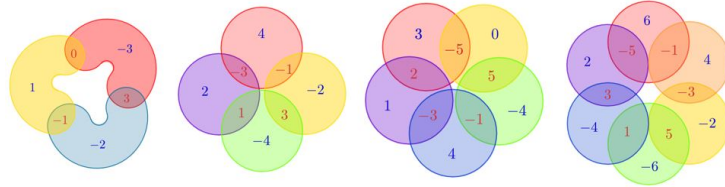


Figura 4: Exemplo de soluções com peças em A_n nos casos com 3 até 6 círculos

Se as peças forem restritas ao conjunto $A_n \setminus \{0\}$, o mesmo não acontece. Para $n = 3$ e $n = 5$ não existem soluções sem o zero, como apresentado na Tabela 1. Tal fato evidencia que: o estabelecimento de bijeção entre as peças do jogo altera significativamente o número de soluções.

Tabela 1: Quantidade de soluções distintas para 3 círculos até 6.

	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
Quant. de soluções em A_n	6	9	14	20
Quant. de soluções em $A_n \setminus \{0\}$	0	1	0	4

A princípio, a conjecturou-se que para uma quantidade ímpar de círculos ($n \geq 3$), não existiria solução com peças em $A_n \setminus \{0\}$. Entretanto, devido às limitações do método de exaustão, não foi possível obter respostas para n a partir de 7. Assim, tornou-se necessário adotar uma estratégia de redução da complexidade do algoritmo, conforme descrito na subseção a seguir.

3.2 Algoritmo combinado em divisão de tarefas

Uma estratégia frequentemente utilizada para resolver um sistema de equações diofantinas lineares consiste em reduzir o número de equações a uma ou duas. Para isso, o problema pode ser inicialmente decomposto em dois grandes conjuntos: $A_{int} = \{a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}\}$ formado pelos elementos que estão nas interseções dos círculos; $A_{ForaInt} = \{a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}\}$ formado pelos elementos que estão fora das interseções, bem como suas respectivas somas:

$$s_1 = \sum_{i=1}^n a_{2i-1} = a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} \quad (2)$$

$$s_2 = \sum_{i=1}^n a_{2i} = a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} \quad (3)$$

Da soma das equações diofantinas do sistema 1 e dos elementos de A_n e/ou $A_n \setminus \{0\}$ pode-se reescrever o modelo, de modo mais simplificado, através do sistema de equações diofantinas:

$$\begin{cases} 2s_1 + s_2 = 0 \\ s_1 + s_2 = \sum_{i=1}^{2n} a_i = 0. \end{cases} \quad (4)$$

A solução para o sistema 4 é $s_1 = s_2 = 0$. A existência de tal solução para o sistema 4 não garante a existência de uma solução para o Círculo Zero, entretanto, ao aliar a informação de que a soma dos elementos na interseção precisa ser zero ($s_1 = 0$) à proposição 3.1, foi possível construir um algoritmo combinando divisão de tarefas.

Proposição 3.1. - Se o jogo Círculo Zero tem uma solução $a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n-1}, a_{2n})$, então esta solução é uma sequência da forma: $a = (a_1, -(a_1 + a_3), a_3, -(a_3 + a_5), a_5, \dots, a_{2i-1}, -(a_{2i-1} + a_{2i+1}), a_{2i+1}, \dots, a_{2n-1}, -(a_{2n-1} + a_1))$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstração. Por definição, uma sequência $a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n-1}, a_{2n})$ é solução do Círculo Zero se satisfaz o sistema 1 com as restrições impostas, logo decorre imediatamente que $a_{2i} = -(a_{2i-1} + a_{2i+1})$, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ e que $a_{2n} = -(a_{2n-1} + a_1)$. $\square$

Observa-se que a soma dos elementos que estão na interseção (A_{int}) precisa ser zero. Ademais, da proposição 3.1, sabe-se que os n elementos que estão no conjunto A_{int} correspondem a uma base para determinar as soluções. Assim, como tem-se interesse na verificação de existência de solução e na contagem das soluções distintas para o caso $A_n \setminus \{0\}$, otimiza-se a busca de soluções por meio de um processo que realiza a combinação simples dos $2n$ elementos de $A_n \setminus \{0\}$ tomados n a n , $C_{2n,n} = \frac{2n!}{n!n!}$, seguida de uma permutação circular destes n elementos, $PC_n = (n-1)!$. As combinações simples, limitam a análise de soluções, a princípio, aos possíveis elementos que estão na interseção e que devem ser solução de $s_1 = 0$. A partir das sequências obtidas para resolver a equação $s_1 = 0$ e que tem cardinalidade menor ou igual a $C_{2n,n}$, realizam-se as permutações circulares para cada uma dessas sequências. Com os possíveis candidatos a estarem na interseção, calculam-se os valores que devem estar fora da interseção, pela proposição 3.1. Nesta última etapa,

muitas vezes, obtém-se valores que não pertencem ao conjunto $A_n \setminus \{0\} \cap A_{ForaInt}$ e encontram-se soluções com elementos repetidos, desta forma, tais soluções são descartadas.

O mesmo algoritmo poderia ser utilizado para o caso em que as peças pertencem a A_n restringindo a contagem e verificação de existência de soluções para $2n + 1$ subconjuntos de A_n , onde cada destes subconjuntos exclui exatamente um elemento de A_n do algoritmo de divisão de tarefas, como na descrição acima, em que excluiu-se o 0. A proposição 3.2 justifica, matematicamente, a proposta do algoritmo em divisão por tarefas.

Proposição 3.2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $C_{2n,n} \cdot PC_n \leq P(A_n \setminus \{0\}, 2n) = 2n!$*

Demonstração. Para todo $n \in \mathbb{N}$, vale que $\frac{(n-1)!}{n!n} \leq 1$, isto pode ser verificado por indução. Ao multiplicarmos os dois membros da desigualdade por $2n!$, temos que: $\frac{2n!}{n!n}(n-1)! \leq 2n!$, logo $C_{2n,n} \cdot PC_n \leq P(A_n \setminus \{0\}, 2n) = 2n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Para a quantidade de círculos de 7 até 10, inclusive, sempre encontram-se soluções para o sistema 1 com as restrições impostas e peças em $A_n \setminus 0$. A Figura 5 exhibe soluções para esses casos e refuta a conjectura proposta inicialmente de que não haveria solução para n ímpar.

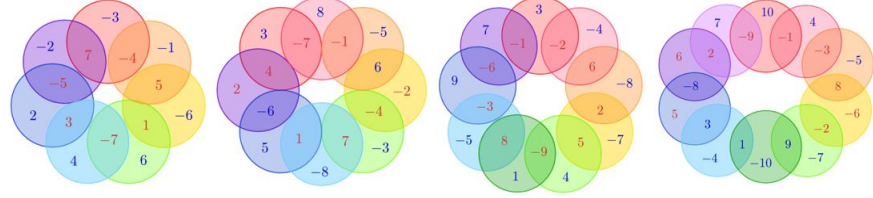


Figura 5: Exemplo de soluções com peças em $A_n \setminus 0$ nos caso com 7 até 10 círculos

Para o caso em que as peças pertencem a A_7 , o número de soluções distintas é de 110. Em $A_8 \setminus \{0\}$, é de 30 e para A_8 é de 536. Tais resultados evidenciam que a bijeção entre regiões do tabuleiro e número de peças, implica significativamente, na contagem e nas estratégias para resolução do jogo. Para casos com $n = 9$ e $n = 10$ foi verificar existência, mas não obter o número total de soluções distintas.

Ressalta-se que a escolha de retirada do zero foi realizada para tornar o jogo mais desafiador. O estabelecimento de bijeção a partir da retirada de outro elemento de A_n que seja diferente de zero altera também, significativamente, a quantidade de soluções. Esses diferentes cenários de investigação podem contribuir para o planejamento de aulas dinâmicas e desafiadoras, além de fomentar o desenvolvimento do poder argumentativo dos alunos em cenários que não existem soluções.

4 Considerações finais

Este artigo abordou a investigação sobre a existência de soluções para o jogo “Círculo Zero” para as peças restritas a dois subconjuntos específicos de números inteiros. A pesquisa a partir da ludicidade, estabeleceu um elo entre os cenários de investigação e a determinação de existência de soluções para um problema, utilizando diferentes ferramentas. Assim, foi possível ilustrar como as atividades exploratórias podem motivar e construir ideias matemáticas. A partir de um evento, os autores foram impulsionados a investigar a impossibilidade de resolver o problema proposto, utilizando métodos variados, incluindo a programação computacional.

No trabalho, foram destacadas as fases de um processo de investigação: formulação de questões; estabelecimento de conjecturas; realização de testes; e avaliação dos resultados. Além disso, os resultados apresentados para os dois cenários investigados podem contribuir com o professor na criação de aulas lúdicas e desafiadoras.

Este estudo visou não apenas contribuir para a compreensão do jogo Círculo Zero e suas propriedades matemáticas, mas também propôs abordagens diferenciadas para o ensino de Matemática, ressaltando o potencial das atividades exploratórias e investigativas apoiadas pela tecnologia. Em última análise, a pesquisa reforça a ideia de que a Matemática transcende um simples conjunto mecânico de fórmulas isoladas, destacando a importância da intuição e da investigação no processo de descobertas.

Referências

- [1] A. Ávila. **Entrevista com Artur Ávila**. Entrevistadora: Marília Gabriela. Entrevista concedida ao programa Marília Gabriela Entrevista do canal GNT, programa exibido em 12 de abril de 2015. Rio de Janeiro, 2015.
- [2] R. de F. Batistela, Taís Alves Moreira e Henrique Lazari. “Um estudo sobre demonstração matemática por/com computador”. Em: **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática** 11 (2016), pp. 204–215.
- [3] J. Boaler. **Mathematical mindsets: Unleashing students’ potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching**. John Wiley & Sons, 2015.
- [4] R. A. Brualdi. **Introductory Combinatorics**. 5th edition. China Machine Press, 2009.
- [5] L. R. Dante e F. Viana. **Coleção: Teláris Essencial | Matemática**. 1st edition. São Paulo: Editora Ática, 2022.
- [6] J. P. da Ponte. “Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal”. Em: **Investigar em educação**. 2003, pp. 93–169.
- [7] J. P. da Ponte et al. “O trabalho do professor numa aula de investigação matemática”. Em: **Quadrante** 7.2 (1998), pp. 41–70.
- [8] E. da S. Rocha et al. “Uma análise pedagógica dos dados estatísticos das provas de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental do Saeb, no período de 2011 a 2017”. Em: (2019), pp. 61–62.
- [9] F. S. M. Rocha e M. A. Kalinke. **Práticas Contemporâneas em Educação Matemática**. 1st edition. Curitiba: Editora InterSaberes, 2020.
- [10] B. G. Tonial. **Jogos no ensino da matemática: um estudo bibliográfico com base nos anais do Enem**. 2022.