

Modelagem Matemática com IA: Uma Abordagem Inovadora para o Ensino de Funções

João de Deus Mendes da Silva,¹ Carlos Alberto Oliveira Costa²

DEMAT UFMA, São Luis, MA

Valdir Mendes da Silva³

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA, São Luis, Maranhão

Resumo. Este trabalho propõe uma sequência didática inovadora para o ensino de funções na Educação Básica, utilizando a modelagem matemática baseada em uma conta de água real. Com o auxílio da ferramenta de Inteligência Artificial, foram elaboradas atividades que exploram conceitos como funções lineares, por partes e proporcionalidade, interligando a matemática a situações do cotidiano, como o consumo de água. O artigo detalha a metodologia utilizada e discute as implicações pedagógicas dessa abordagem, enfatizando a relevância de ferramentas tecnológicas no ensino e a formação de cidadãos mais conscientes em relação às questões sociais e ambientais. A experiência sugere que a inclusão de modelagem matemática e tecnologia no ensino de funções não apenas enriquece o aprendizado matemático, mas também prepara os alunos para enfrentar desafios contemporâneos de maneira crítica e informada.

Palavras-chave. Modelagem Matemática, Inteligência Artificial, Educação Matemática, Sequência Didática, Funções Periódicas.

1 Introdução

O ensino de matemática enfrenta o desafio de tornar conceitos complexos mais acessíveis e relevantes para os alunos, especialmente o de funções, que muitas vezes é considerado abstrato por eles. Neste contexto, a modelagem matemática surge como uma ferramenta poderosa, permitindo que estudantes compreendam a aplicabilidade dos conceitos matemáticos em situações cotidianas [1]. Além disso, ao associar esses conceitos a situações reais, como o cálculo do valor de uma conta de água, torna-se possível contextualizar o conteúdo de maneira mais significativa. Este artigo propõe uma sequência didática inovadora voltada para o Ensino de funções na Educação Básica, utilizando a modelagem matemática de uma conta de água real [2] que foi usada como base para ensinar funções por partes e proporcionalidade.

A sequência didática foi elaborada com o apoio da ferramenta de Inteligência Artificial ChatGPT [5], foram elaboradas atividades que exploram funções lineares, por partes e a proporcionalidade, promovendo um aprendizado significativo ao interligar a teoria matemática a situações práticas. Ao abordar o consumo de água — um recurso escasso e de vital importância — esta proposta educacional não só enriquece o conhecimento matemático dos alunos, mas também os estimula a refletir sobre a gestão sustentável dos recursos naturais [3]. A seguir, serão discutidas as metodologias empregadas e as implicações pedagógicas da proposta, ressaltando a importância de uma abordagem contextualizada no ensino de funções e suas aplicações na vida cotidiana.

¹jdm.silva@ufma.br

²carlos.aoc@discente.ufma.br

³valdirmatematica2013@gmail.com

⁴Este template foi baseado no modelo de trabalho completo do CNMAC 2024, disponível no Overleaf.

2 Metodologia

A sequência didática foi dividida em quatro etapas principais:

- 1. **Apresentação da conta de água:** Nesta primeira etapa, os alunos são apresentados a uma conta de água real (Figura 1), que contém informações como consumo em metros cúbicos (m^3) e o valor total a ser pago. Nessa fase, os alunos são incentivados a entender como o valor da conta, relativo a água, é calculado.
- 2. **Cálculo com funções por partes:** Utilizando a função por partes, os alunos calculam o valor da conta com base no consumo. A função relacionada o consumo de água em metros cúbicos (x) com o valor a ser pago, de acordo com a faixa de consumo:

$$f(x) = \begin{cases} 3,36x & \text{se } 0 \leq x \leq 10, \\ 6,80x - 34,40 & \text{se } 10 < x \leq 20, \\ 10,77x - 113,80 & \text{se } 20 < x \leq 30. \end{cases}$$

- 3. **Construção de gráficos:** A partir dos dados de consumo dos meses anteriores, os alunos constroem gráficos que relacionam o consumo ao longo do tempo e/ou o valor da conta com vistas a análise de padrões. A Figura 2 mostra um exemplo do gráfico que pode ser gerado com os dados de consumo.



COMPANHIA DE SANEAMENTO AMBIENTAL DO MARANHÃO

R SILVA JARDIM - NÚMERO 307 - CENTRO SÃO LUIS MA 66020-008

CNPJ: 06.274.757/0001-50 - INSC. ESTADUAL Nº 120551373

Informações e/ou Reclamações - Ligue 08007010195

SEGUNDA VIA

Nº Documento: 2024099146512

RESCRITÓRIO

VINHAIS

CÓDIGO PARA DÉBITO AUTOMÁTICO: 00914651.2

MATRÍCULA

CLIENTE

CPF/CNPJ:

VENCIMENTO: 30/09/2024

INSCRIÇÃO

ENDEREÇO DO IMÓVEL

FATURA: 09/2024

RESPONSÁVEL

ENDEREÇO PARA ENTREGA

ÁGUA LIGADO

ESGOTO LIGADO

ÚLTIMOS CONSUMOS

LEITURA ANTERIOR

CONSUMO (M³)

CONSUMO/DIA (M³)

08/2024 - 15

07/2024 - 15

06/2024 - 15

05/2024 - 15

04/2024 - 15

03/2024 - 15

25

Nº Sm:

ECONOMIAS

CONS. POR ECONOMIA

COD. AUXILIAR

1

15

N 5 15

DESCRIÇÃO DOS SERVIÇOS E TARIFAS

CONSUMO POR FAIXA

VALOR R\$

ÁGUA

RESIDENCIAL 001 UNIDADE

ATE 10 M3 - R\$ 33,58 (POR UNIDADE)

11 M3 A 20 M3 - R\$ 6,80 POR M3

21 M3 A 30 M3 - R\$ 10,77 POR M3

TOTAL ÁGUA

TOTAL ESGOTO (100,00 % DO VALOR DA ÁGUA)

10 M3

10 M3

5 M3

33,58

68,00

53,85

155,45

155,45

Valor aproximado dos tributos FIS e COPING, Lei 12.741 de 2012. R\$

TOTAL GERAL

R\$

310,90

Figura 1: Modelo de conta de água da Companhia de Aguas e Esgoto do Maranhão - CAEMA.

- 4. **Estimativa e projeções:** Por fim, os alunos são incentivados a fazer previsões sobre o consumo de água e estimar o valor da conta futura, baseando-se nos padrões detectados e nas funções aplicadas.

Feito esse primeiro ensaio foi possível aprofundar a questão e explorar o problema de forma mais abrangente, para isso consultamos os dados disponíveis no site da Companhia de Águas e Esgoto do Maranhão - CAEMA, disponíveis em:

<http://gsan.caema.ma.gov.br:8080/gsan/exibirConsultarEstruturaTarifariaPortalCaemaAction.do>, o qual dispõe tabelas e a forma de cobrança para os diversos tipos de consumidores quanto ao fornecimento de água e coleta de esgoto. No caso de *consumo doméstico residencial* os dados são dispostos na Tabela 1

Observa-se que os primeiros 10 metros cúbicos são cobrados de forma linear, isto é, para cada metro cúbico de água consumido paga-se R\$ 3,36 reais. Os demais metros cúbicos são cobrados de acordo com cada faixa de consumo.

Tabela 1: Faixa de Consumo de Água e Valores
Faixa de Consumo (m^3 /Eco/mês) Valor (R\$)

Até 10 m^3	3,36
Excedente de 10 - 20	6,80
Excedente de 20 - 30	10,77
Excedente de 30 - 50	13,68
Excedente acima de 50	21,48

Fonte: <https://www.caema.ma.gov.br>

Podemos definir uma função f que represente o valor a ser pago pela água em função do consumo mensado em x em metros cúbicos m^3 . A função levará em consideração as faixas de consumo e os valores correspondentes a cada faixa. Vamos reescrever cada parte da função $f(x)$ na forma $mx + b$, em que m é o coeficiente de inclinação e b é o termo constante correspondente. Dessa forma, tem-se $f(x)$ descrita em (1),

$$f(x) = \begin{cases} 3,36x & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 6,80x - 34,40 & \text{se } 10 < x \leq 20 \\ 10,77x - 113,80 & \text{se } 20 < x \leq 30 \\ 13,68x - 201,10 & \text{se } 30 < x \leq 50 \\ 21,48x - 591,10 & \text{se } x > 50 \end{cases} \quad (1)$$

É importante notar que, o valor correspondente a taxa de esgoto é igual ao valor cobrada pela água, logo podemos definir o valor total da conta pela função V , dado por:

$$V(x) = 2 \cdot f(x) \quad (2)$$

3 Funções Lineares e Proporcionalidade

É importante notar que há uma lógica subjacente a esse modelo que é incentivar o consumo consciente de água, de modo que os usuários que excedem o consumo básico ($10 m^3$) pagam uma tarifa mais alta para os metros cúbicos subsequentes. Neste ponto o professor tem uma oportunidade de discutir a linearidade de funções como consequência da proporcionalidade, já trabalhada nas séries anteriores.

As funções lineares são uma extensão do conceito de proporcionalidade direta [4]. Em uma

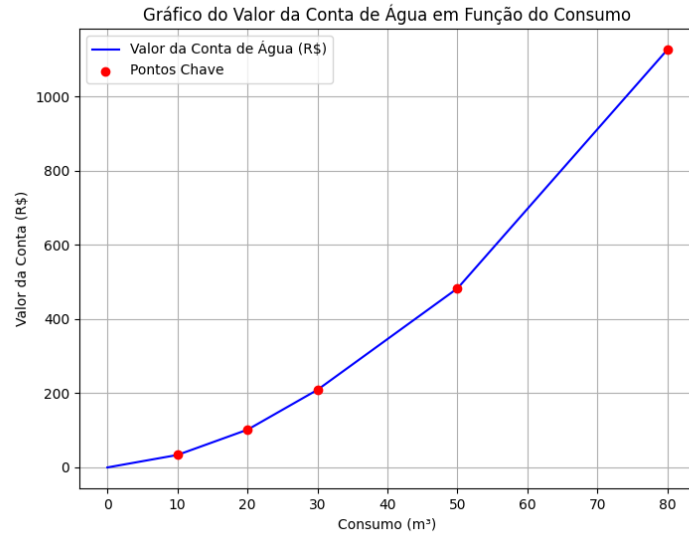
função linear, o valor de uma variável é diretamente proporcional ao valor de outra, como exemplificado no consumo de água. Na primeira faixa de consumo (até 10 m^3), o cálculo do valor segue uma relação de proporcionalidade direta, quanto mais água se consome, mais se paga proporcionalmente, isto é, f é do tipo:

$$f(x) = kx, \quad (3)$$

em que k é a constante de proporcionalidade e x é o consumo em metros cúbicos.

No entanto, para penalizar o consumo excessivo, o valor cobrado por m^3 nas faixas superiores aumenta, o que faz com que a relação perca a linearidade. Isso também pode ser visualizado graficamente ao construir o gráfico da função por partes dada em (1), Figura 2, onde o valor a ser pago não cresce mais proporcionalmente ao consumo.

Figura 2: Gráfico da função por partes que descreve o valor da conta de água geral.



Fonte: Feita pelos autores

A partir da função por partes utilizada para calcular o valor da conta de água, surgem várias questões interessantes que podem ser abordadas em sala de aula. Apenas a título de ilustração, importante lembrar que o valor total da conta, indicado pela função V , dada em (2) é $V(x) = 2f(x)$, isto é, sendo x o consumo de água (em m^3) o valor a pagar é o dobro do valor f ponto x , (em reais). Portanto, uma outra questão a ser feita é quando se tem $V(x) = f(2x)$, por exemplo? Ou seja, a comparação entre o valor calculado para $f(2x)$ e $2f(x)$, que permite verificar se a proporcionalidade se mantém em diferentes faixas.

A título de exemplo, para $x = 6$, considere os seguintes cálculos:

$$f(6) = 3,36 \cdot 6 = 20,16 \quad \text{e} \quad 2f(3) = 2 \cdot 10,08 = 20,16$$

Na faixa inicial, observa-se que a proporcionalidade direta é válida, mas em faixas superiores, a função não se comporta da mesma forma. Considere agora a faixa de $10 < x \leq 20$:

$$f(15) = 6,80 \cdot 15 - 34,40 = 67,60 \quad \text{e} \quad 2f(7,5) = 2 \cdot (6,80 \cdot 7,5 - 34,40) = 46,00$$

Aqui, $f(2x) \neq 2f(x)$, evidenciando o impacto das faixas de consumo não lineares.

Nesse ponto pode-se introduzir a razão $R_k(x) = \frac{f(kx) - kf(x)}{kf(x)}$ para analisar o quanto a função $f(x)$ se desvia de ser linear em cada faixa. Esse cálculo mostra como a função não cresce de forma proporcional em faixas mais altas, refletindo o impacto da penalização no consumo excessivo de água.

4 Exploração de Questões Matemáticas

Nesta fase diversas questões podem ser formuladas e respondidas pelos alunos em sala de aula, permitindo que os alunos apliquem os conceitos discutidos sobre funções e proporcionalidades. Listamos a seguir algumas,

1. Cálculo de $f(3)$ e $f(6)$

Para $x = 3 \text{ m}^3$, calcule $f(3)$ e, para $x = 6 \text{ m}^3$, calcule $f(6)$. Compare os valores de $f(6)$ e $2f(3)$. O que você observa?

Resolução:

Para $x = 3$, $f(3) = 3,36 \times 3 = 10,08$ (R\$ 10,08). Para $x = 6$, $f(6) = 3,36 \times 6 = 20,16$ (R\$ 20,16). Observamos que $f(6) = 2f(3)$, o que confirma que a função é proporcional nessa faixa. Ou seja, se alguém usa o dobro de água, deverá pagar o dobro do valor.

2. Calcule $f(12)$ e $f(24)$. Verifique se a relação $f(2x) = 2f(x)$ se mantém para $x = 12$.

Resolução:

Para $x = 12$, $f(12) = 33.60 + (12 - 10) \times 6.80 = 33.60 + 13.60 = 47.20$ R\$.

Para $x = 24$, $f(24) = 33.60 + 68.00 + (24 - 20) \times 10.77 = 33.60 + 68.00 + 43.08 = 144.68$ R\$. Observa-se que $f(24) \neq 2f(12)$, ou seja, a proporcionalidade não se mantém fora da primeira faixa.

3. Suponha que uma conta foi faturada no valor de R\$ 1000,00. Qual foi o consumo de água da residência?

Resolução:

Estamos procurando um valor de x tal que $1000 = V(x) = 2f(x)$, donde obtemos o $f(x) = 500$. Sabemos que $f(50) = 482.90$, logo o valor de x para $f(x) = 500$ estará na faixa acima de 50 m^3 . Daí, a fórmula para essa faixa é $f(x) = 21,48x - 591,1$, donde obtemos,

$$500 = 21,48x - 591,1 \iff x = \frac{1091,1}{21,48} = 50,796.$$

Aqui o professor tem uma chance de explorar a modelagem, explicando que nem todo resultado matemático se aplica a realidade, é necessário sobretudo compreender o contexto que ele está sendo introduzido. No caso da conta de água, os valores em metros cúbicos são inteiros, logo nenhuma conta pode ter sido faturada com o valor exato de R\$ 1000,00.

5 Implicações Pedagógicas

As implicações pedagógicas desta sequência didática vão além do ensino de funções matemáticas. Ela proporciona uma reflexão interdisciplinar sobre sustentabilidade e gestão responsável dos recursos naturais, uma vez que a água é um recurso escasso e seu uso excessivo traz impactos ambientais significativos. A partir dessa abordagem, os alunos não apenas aprendem sobre funções e proporcionalidade, mas também desenvolvem uma consciência crítica sobre o consumo sustentável.

O uso do ChatGPT como ferramenta para auxiliar na construção de atividades também revela o potencial das tecnologias de IA no ensino. Embora apresente limitações em certas tarefas, como a interpretação de imagens, a IA facilita a criação de problemas contextualizados e ajustáveis ao nível de conhecimento dos alunos, promovendo um ensino mais dinâmico e adaptado às necessidades contemporâneas.

Em suma, a combinação de tecnologia com problemas do cotidiano enriquece o processo educativo, oferecendo aos alunos uma visão mais ampla e prática da aplicação da matemática, ao mesmo tempo em que os incentiva a refletir sobre questões sociais e ambientais.

6 Considerações Finais

Este artigo apresentou uma sequência didática inovadora para o ensino de funções na educação básica, utilizando a modelagem matemática de uma conta de água real. A proposta, apoiada pela ferramenta de inteligência artificial ChatGPT, demonstrou-se eficaz ao elaborar atividades que conectam conceitos matemáticos a situações do cotidiano, promovendo um aprendizado significativo.

Durante a implementação da sequência didática, foram identificadas algumas limitações na utilização do ChatGPT, especialmente em relação à interpretação de imagens e à precisão na análise de dados. Essas dificuldades exigiram ajustes manuais para assegurar a coerência do modelo com a realidade, ressaltando a importância do acompanhamento docente na integração de tecnologias ao ensino.

Apesar dos desafios, a proposta possibilitou que os alunos explorassem o conceito de funções por partes e a proporcionalidade, evidenciando que a relação entre o valor a ser pago e o consumo total não é sempre linear. A compreensão desse fenômeno, chamado de proporcionalidade penalizada, foi crucial para que os estudantes reconhecessem o impacto das políticas tarifárias na gestão do consumo de água, um recurso natural escasso.

Além do aprendizado matemático, a sequência didática fomentou uma reflexão crítica sobre a sustentabilidade e a gestão responsável dos recursos naturais. Ao abordar questões práticas, os alunos não apenas ampliaram seu conhecimento em matemática, mas também se tornaram mais conscientes sobre o consumo sustentável e as implicações ambientais de suas ações.

Assim, a combinação de tecnologia e contextualização no ensino da matemática enriqueceu o processo educativo, preparando os alunos para enfrentar desafios contemporâneos de maneira crítica e informada. A experiência sugere que a inclusão de ferramentas tecnológicas e a abordagem de temas relevantes são essenciais para a formação de cidadãos mais conscientes e preparados para contribuir com a sociedade.

Referências

- [1] Rodney Carlos Bassanezi. **Modelagem Matemática: Conceitos, Experiências e Aplicações**. 2a. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2002. ISBN: 9788572441953.
- [2] CAEMA. **Companhia de Saneamento Ambiental do Maranhão**. Online. Acessado em 27/09/2024, <https://www.caema.ma.gov.br/>.
- [3] Ministério da Educação (MEC). **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>, Acesso em: 2024. 2018.
- [4] Elon Lages Lima. **Temas e Problemas Elementares**. 2a. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1990. ISBN: 9788524400780.
- [5] OpenAI. **ChatGPT: Modelo de Linguagem GPT-4**. Disponível em: <https://openai.com/chatgpt>, Acesso em: 2024. 2024.