

Explorando Progressões Geométricas Através da Geometria Fractal: O Caso do Triângulo de Sierpinski

Jairomar de Araújo Sobrinho¹ Hellen Christina Fernandes Apolinário²

PROFMAT UFT, Palmas, TO

José Elias dos Santos Filho³

UFPB, Rio Tinto, PB

Resumo. Este trabalho explora a relação entre o perímetro e a área do triângulo de Sierpinski e as progressões geométricas, utilizando a geometria fractal como ferramenta pedagógica. Através de uma abordagem teórico-prática, os alunos foram introduzidos à construção iterativa do triângulo de Sierpinski, observando o aumento do perímetro e a diminuição da área em progressões geométricas. Atividades práticas e o uso do software Geogebra proporcionaram uma compreensão mais profunda dos conceitos envolvidos. O estudo mostrou que a geometria fractal oferece uma maneira visual e dinâmica de ensinar progressões geométricas, conectando a matemática abstrata com representações concretas. Conclui-se que a Geometria Fractal, em particular, o Triângulo de Sierpinski facilitou o entendimento de Progressões Geométricas no ensino da matemática básica.

Palavras-chave. Geometria Fractal, Triângulo de Sierpinski, Progressão Geométrica, Perímetro e Área, Ensino de Matemática.

1 Introdução

A geometria fractal estuda formas complexas e autossimilares que se repetem em várias escalas. Essas figuras possuem estrutura infinita e desafiam noções tradicionais de dimensões. Um exemplo notável é o triângulo de Sierpinski, uma figura plana que ilustra o comportamento fractal através de divisões sucessivas. Diferente das figuras geométricas convencionais, os fractais apresentam um crescimento dinâmico e progressivo, tornando-se relevantes para o estudo de progressões matemáticas [1].

A geometria fractal facilita a conexão entre conceitos abstratos e representações visuais concretas. No triângulo de Sierpinski, há uma relação direta entre o perímetro, que cresce em progressão geométrica a cada iteração, e a área, que diminui proporcionalmente. Isso torna o triângulo um exemplo perfeito para explorar e aplicar progressões geométricas [2].

Este resumo expandido visa explorar essa relação entre o perímetro e a área do triângulo de Sierpinski, com ênfase no papel da progressão geométrica em sua construção. O objetivo principal é demonstrar como o estudo de figuras fractais, como o triângulo de Sierpinski, pode ser uma ferramenta eficaz no ensino de progressões geométricas, oferecendo aos alunos uma maneira visual e dinâmica de compreender o comportamento dessas séries matemáticas. Esse enfoque foi abordado na dissertação “**A Geometria Fractal na construção de figuras planas envolvendo Progressões Geométricas**”, de minha autoria e será expandido aqui com o intuito de reforçar sua aplicabilidade no ensino e na compreensão de tópicos avançados em geometria e aritmética [4].

¹jairomar.sobrinho@mail.uft.edu.br

²hellen@ufla.br

³jose.elias@acadrmico.ufpb.br

2 Metodologia

A pesquisa explorou a relação entre o perímetro e a área do triângulo de Sierpinski com as progressões geométricas por meio de uma abordagem teórico-prática. Primeiramente, foram introduzidos conceitos de geometria fractal aos alunos, focando no triângulo de Sierpinski por sua auto-similaridade e simplicidade construtiva, com a construção iterativa da figura para observar o comportamento do perímetro e da área.

Após a construção, os alunos analisaram como o perímetro aumenta e a área diminui, ambos seguindo progressões geométricas. Essas mudanças foram exploradas com atividades práticas e o uso do software Geogebra, aprofundando a compreensão das progressões geométricas aplicadas em figuras fractais.

3 Resultados e Discussão

O Triângulo de Sierpinski é um fractal gerado a partir de um triângulo por meio de uma regra simples. Inicialmente, partimos de um triângulo equilátero e conectamos os pontos médios de cada lado com segmentos de reta, resultando em quatro triângulos semelhantes ao original. Em seguida, retiramos a figura central e aplicamos novamente a mesma regra aos três triângulos restantes. Este processo é repetido de forma infinita, convergindo para a configuração final do Triângulo de Sierpinski [2].

Perímetro do Triângulo de Sierpinski

O perímetro⁴ do triângulo de Sierpinski apresenta um comportamento peculiar em relação ao número de iterações aplicadas durante sua construção. No processo de criação, o triângulo inicial é dividido em três novos triângulos, retirando-se o triângulo central. A cada iteração subsequente, essa divisão continua, aumentando o número de triângulos menores e, conseqüentemente, o perímetro total da figura.

Matematicamente, o perímetro do triângulo de Sierpinski cresce de acordo com uma progressão geométrica. A cada iteração, o número de segmentos de borda aumenta, enquanto o comprimento de cada segmento diminui. No entanto, o aumento no número de segmentos é tal que o perímetro total tende ao infinito à medida que o número de iterações cresce. Isso ocorre porque, apesar de cada novo segmento ser menor, o número de segmentos cresce exponencialmente, resultando em um perímetro infinitamente grande após infinitas iterações.

- Nível 0

Considere-se o triângulo equilátero de lado c mostrado na Figura 1.

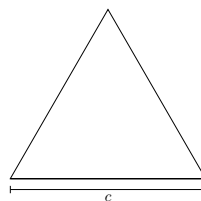


Figura 1: Perímetro do Triângulo de Sierpinski - Nível 0. Fonte: Autor (2024).

⁴Neste trabalho, optamos por utilizar a notação $2P$ para representar o perímetro de uma figura plana.

Sabemos que o perímetro $2P_0$ do triângulo equilátero é dado por

$$2P_0 = 3c$$

- Nível 1

Num triângulo qualquer expressado na Figura 2 e sabendo que M , N e W são pontos médios dos lados do triângulo ABC , temos:

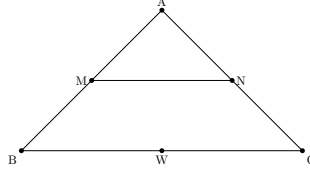


Figura 2: Pontos médios dos lados de um triângulo. Fonte: Autor (2024).

Prova-se que $MN \parallel BC$ e que a medida de MN é a metade de BC .

Segue desse resultado que os lados do triângulo formado pelos pontos médios MNW têm medidas iguais a $c/2$.

Daí, dado o triângulo equilátero de Nível 0, e conectando-se os pontos médios de cada lado com segmentos de reta, como podemos observar na Figura 3, temos que:

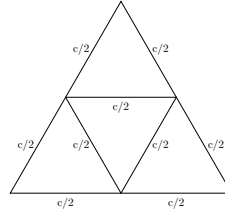


Figura 3: Perímetro do Triângulo de Sierpinski de Nível 1. Fonte: Autor (2024).

Deste modo, sendo cada lado dividido em dois:

$$2P_1 = 9 \cdot \frac{c}{2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot c}{2} = 3c \cdot \frac{3}{2} = 2P_0 \cdot \frac{3}{2}$$

Área do Triângulo de Sierpinski

A área do triângulo de Sierpinski diminui a cada iteração de maneira sistemática, seguindo uma progressão geométrica decrescente. No processo de construção, o triângulo original é dividido em quatro partes iguais, e o triângulo central é removido, restando três triângulos menores. A cada nova iteração, o processo de remoção se repete para cada um dos triângulos restantes, reduzindo ainda mais a área total da figura.

Matematicamente, a razão entre a área do triângulo após cada iteração e a área inicial é de $\frac{3}{4}$. Assim, com o aumento do número de iterações, a área remanescente torna-se cada vez menor, aproximando-se de zero. Isso significa que, após um número infinito de iterações, a área do triângulo de Sierpinski tende a zero, enquanto a figura ainda mantém uma estrutura infinita em termos de perímetro e complexidade.

- Nível 0

Sabemos que a área A de um triângulo equilátero é dada por $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2$. Seja c a medida do lado do triângulo equilátero conforme Figura 4.

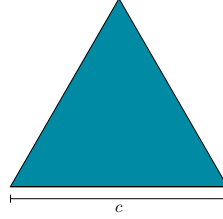


Figura 4: Área do Triângulo de Sierpinski - Nível 0. Fonte: Autor (2024).

Para o Nível 0, a área do Triângulo de Sierpinski é dada por:

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}c^2}{4}$$

- Nível 1

Dado o triângulo equilátero do Nível 0, considere os pontos médios de seus lados, formando três triângulos com lados de comprimento $\frac{c}{2}$, conforme mostrado na Figura 5.

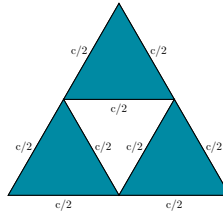


Figura 5: Área do Triângulo de Sierpinski - Nível 1. Fonte: Autor (2024).

Deste modo, considera-se o ponto médio do lado do triângulo, sendo cada lado dividido em dois, como ilustrado na Figura 5:

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3 \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 3 \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{\sqrt{3}c^2}{4} \cdot \frac{3}{4} = A_0 \cdot \frac{3}{4}$$

A Figura 6 ilustra o processo de construção do Triângulo de Sierpinski para os primeiros níveis:

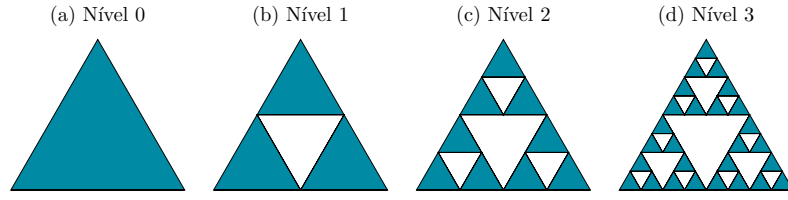


Figura 6: Evolução do Triângulo de Sierpinski. Fonte: Adaptado de [3].

A partir da iteração do Triângulo de Sierpinski podemos construir a seguinte Tabela 1 em que são apresentados o perímetro $2P_n$ e a área A_n para o nível de iteração n :

Iterações	Perímetro	Área
Nível 0	$2P_0$	A_0
Nível 1	$2P_1 = 2P_0 \times \left(\frac{3}{2}\right)^1$	$A_1 = A_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1$
Nível 2	$2P_2 = 2P_0 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2$	$A_2 = A_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$
Nível 3	$2P_3 = 2P_0 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$	$A_3 = A_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Nível n	$2P_n = 2P_0 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$	$A_n = A_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Tabela 1: Área e perímetro do Triângulo de Sierpinski.

Estamos diante de duas sequências geométricas com razões $\frac{3}{4}$ (< 1) e $\frac{3}{2}$ (> 1), respectivamente. Isso indica que à medida que n se aproxima do infinito, a área do Triângulo de Sierpinski tende a zero, enquanto o perímetro tende para infinito.

Construção Tridimensional do Triângulo de Sierpinski

Essa atividade foi cuidadosamente escolhida por ser uma forma descontraída e interessante de sintetizar o que foi visto sobre fractais. Ao construir o Triângulo de Sierpinski em três dimensões, os alunos têm a oportunidade de aplicar conceitos matemáticos de uma maneira prática e divertida, o que facilita a compreensão e o engajamento com o conteúdo.

Durante a atividade, utilizamos papel sulfite e tesoura para a construção do Triângulo de Sierpinski. A visualização do processo ajuda os alunos a compreenderem melhor as propriedades auto-similares dos fractais e a lógica recursiva envolvida na sua criação.

Apesar das dificuldades apresentadas, os alunos conseguiram construir o Triângulo de Sierpinski proposto. Eles demonstraram persistência e dedicação ao longo do processo, superando os desafios de visualização e precisão. A seguir, a Figura 7 mostra a beleza de um cartão fractal construído por um dos alunos, evidenciando a aplicação prática e estética do conceito aprendido.



Figura 7: Construção do Triângulo de Sierpinski tridimensional por um aluno. Fonte: Autor (2024)

Essa abordagem didática demonstra que a matemática pode ser explorada de maneiras criativas e envolventes, estimulando o interesse dos alunos e promovendo um aprendizado significativo. A construção tridimensional do Triângulo de Sierpinski é, portanto, uma estratégia eficaz para ensinar fractais, combinando teoria e prática de uma forma que torna o aprendizado prazeroso e memorável.

Construção do Triângulo de Sierpinski com GeoGebra

O Geogebra permite a construção de objetos geométricos como pontos, retas, segmentos de retas, circunferências, ponto médio de segmentos, retas paralelas e perpendiculares. Esses objetos podem ser movimentados livremente pela tela e editados com diferentes cores e traçados contínuos ou tracejados.

Além disso, o software permite calcular distâncias entre pontos, medir ângulos, áreas de polígonos e circunferências, e determinar lugares geométricos de pontos e retas. Além dessas funcionalidades aplicáveis no estudo da Geometria Euclidiana, o Geogebra oferece recursos para introdução ao estudo da Geometria Fractal, permitindo definir elementos sobre os quais são aplicadas transformações que, por meio de processos repetitivos, geram fractais.

O uso da tecnologia na sala de aula, especialmente nas aulas de matemática, é essencial para potencializar o ensino e a aprendizagem. Ferramentas tecnológicas interativas, como softwares de geometria dinâmica, tornam as aulas mais envolventes e motivadoras. Elas permitem a visualização concreta de conceitos abstratos, oferecem atividades personalizadas e feedback imediato, além de tornar o aprendizado mais dinâmico e interativo, capturando a atenção dos alunos e mantendo-os engajados.

Recapitulação e preenchimento do questionário

Após essa revisão prática, os alunos foram convidados a participar de uma avaliação por meio de um questionário que tinham como objetivo consolidar os conceitos discutidos anteriormente e avaliar a compreensão dos alunos sobre a construção e as propriedades matemáticas do Triângulo de Sierpinski. Foi explicado aos alunos que o questionário consistia em cinco questões, cada uma focando em diferentes aspectos do Triângulo de Sierpinski e das propriedades dos fractais.

No quinto item ao serem questionados “explique como o perímetro do Triângulo de Sierpinski se comporta após um número infinito de iterações. Ele é finito ou infinito? Justifique sua resposta”, alguns alunos tiveram dificuldades em justificar matematicamente a resposta, indicando a necessidade de reforçar no letramento matemático, porém a maioria dos alunos compreenderam que o perímetro se torna infinito, demonstrando entendimento sobre a natureza dos fractais. Conforme Figura 8 a seguir.

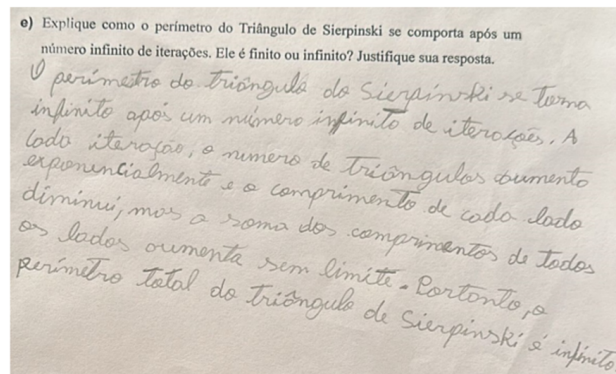


Figura 8: Explicação de um aluno de como o perímetro do Triângulo de Sierpinski se comporta após infinitas iterações. Fonte: Autor (2024)

A aula foi concluída com uma discussão sobre as respostas dos alunos e as dificuldades encontradas. Foi enfatizado o comportamento dos fractais e a aplicação das progressões geométricas no cálculo de perímetro e área.

4 Considerações Finais

A exploração da relação entre o perímetro e a área do triângulo de Sierpinski, através do estudo de progressões geométricas, revelou-se uma ferramenta eficaz para o ensino de conceitos matemáticos abstratos de forma visual e dinâmica. A utilização da geometria fractal permitiu que os alunos compreendessem de maneira intuitiva como as progressões geométricas se manifestam em figuras complexas, além de reforçar a conexão entre a geometria e a aritmética.

A implementação de atividades práticas e o uso de tecnologias, como o software Geogebra, contribuíram para uma experiência de aprendizagem mais rica, na qual os alunos puderam observar e manipular os conceitos, consolidando o entendimento sobre o crescimento do perímetro e a diminuição da área em cada iteração do triângulo de Sierpinski. Isso destacou o potencial da geometria fractal como uma abordagem pedagógica inovadora no ensino de progressões geométricas e outros temas matemáticos avançados.

Conclui-se que a geometria fractal, e em especial o triângulo de Sierpinski, oferece uma oportunidade valiosa para conectar conteúdos matemáticos teóricos com exemplos visuais práticos, tornando o ensino de progressões geométricas mais acessível e envolvente. Esse estudo reforça a aplicabilidade desse método no contexto educacional, abrindo caminhos para a utilização de outras figuras fractais em diversas áreas do conhecimento matemático.

Referências

- [1] R. M. Barbosa. **Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- [2] M. Janos. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2018.
- [3] Mei Li, Lew Sterling Jr, Jimin Khim e Arron Kau. **Fractals**. 2024. URL: <https://brilliant.org/wiki/fractals/>.
- [4] J. A. Sobrinho. "A Geometria Fractal na construção de figuras planas envolvendo Progressões Geométricas". Dissertação de mestrado. Palmas, TO, 2024.