

# Prova e Demonstração: uma proposta de estímulo à produção de provas por meio de atividades investigativas em ambientes de geometria dinâmica no estudo de desigualdades no triângulo.

Pitágoras Vasconcelos dos Anjos<sup>1</sup>  
Mariana Cassol<sup>2</sup>  
PROFMAT UFBA, Salvador, BA

**Resumo.** A demonstração é o fio condutor do conhecimento matemático quer seja como a sua forma de comunicação quer seja como um elemento heurístico. Contudo, na Educação Básica, vemos uma distância, ou até mesmo ausência de práticas que estimulem a produção de provas e demonstrações. Este trabalho apresenta os primeiros resultados de uma dissertação de mestrado que tem como questão norteadora investigar de que modo tarefas de investigação desenvolvidas em ambientes de geometria dinâmica podem contribuir para a construção da prova matemática. Para tal foi desenvolvida uma sequência didática com conteúdos que versam sobre desigualdades no triângulo que está sendo aplicada com um grupo de 5 estudantes da Educação Básica da rede estadual que desenvolvem atividades de monitoria de matemática no Projeto Mais Estudo. Alguns resultados obtidos na primeira sessão de aplicação, que apresentamos nesse trabalho, apontam que as atividades foram eficazes em estimular a criação de conjecturas, na produção de provas tipificadas como empirismo ingênuo e experiência crucial em todos os participantes.

**Palavras-chave.** Prova, Demonstração, Geometria Dinâmica, Tarefas de investigação, Desigualdades no triângulo.

## 1 Introdução

Sob uma abordagem clássica as demonstrações em matemática tem origem com os gregos em 6000 a.C. e é a Tales de Mileto a quem é atribuída a primeira delas. Vários resultados são creditados a ele, muitos dos quais ele apenas formalizou e já eram conhecidos pelos egípcios e mesopotâmicos [17]. Para além de Tales, os matemáticos gregos traçaram, com uso de argumentos baseados na lógica aristotélica, uma linha que separa a forma como a Matemática foi construída no decorrer dos séculos e que perdura até os dias de hoje [17]. A demonstração é a forma pela qual os matemáticos validam o conhecimento construído, mas também é possível dizer que é uma forma de comunicação, explicação, descoberta e invenção da Matemática. A busca pelo argumento que vai garantir a validade de uma asserção é precedida de um intenso processo exploratório, investigativo que contém idas e vindas, verificação empírica dos fatos, construção e refutação de conjecturas até, enfim, emergir a demonstração. Davis e Hersh, em [9], sublinham que um matemático só se põe no processo de efetivamente demonstrar um fato quando ele já está convencido de sua veracidade. Isto é, a demonstração é uma coroação pelo trabalho empreendido.

---

<sup>1</sup>pvda\_15@hotmail.com

<sup>2</sup>mcassol@ufba.br

Pensar o lugar que a demonstração ocupa na Matemática, que é central, lança questões sobre o lugar que a demonstração tem na matemática escolar. Por exemplo, qual seria a função da prova na matemática escolar se a veracidade dos fatos já está assegurada pela matemática acadêmica? A função de explicação, de descoberta?

Destacamos que no nosso entendimento a palavra prova não é sinônimo de demonstração. Nos alinhamos com a perspectiva de Balacheff,[4], para o qual a prova se caracteriza em função da concordância da validade de uma explicação sobre uma asserção por um grupo, uma comunidade mesmo que essa aceitação não seja definitiva. Já a demonstração é uma série de declarações que segue uma organização previamente definida e socialmente aceita pela comunidade matemática. Nessa perspectiva, a prova pode ser tipificada, conforme [3], do seguinte modo: empirismo ingênuo, experimento crucial, exemplo genérico e experiência mental.

Documentos norteadores trazem orientações ligadas a prova e a demonstração. Os Parâmetros Curriculares Nacionais, [7], sublinham a relevância da percepção empírica dos fatos e da argumentação como etapas que antecedem a demonstração formal e requerem atenção na Educação Básica. Já a Base Nacional Comum Curricular,[6], traz expressamente que “[...] é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática.” (p. 527).

Neste contexto, surgem questionamentos tais quais: têm sido desenvolvidas atividades na sala de aula com objetivo de estimular o desenvolvimento de processos argumentativos? Existe material didático disponível para que os professores ponham em prática aquilo que é preconizado pelos documentos norteadores? Qual o papel da prova matemática na sala de aula da Educação Básica, qual lugar ela tem e qual lugar deveria ou poderia ter? Qual a concepção do professor acerca do papel da prova na sala de aula da Educação Básica? Existem abordagens metodológicas que de algum modo possam favorecer processos de argumentação?

Algumas destas questões e outras correlatas já foram investigadas por pesquisadores como [14], [10], [4], [1]. Em especial, com relação à última problemática, há relevante produção científica especializada que aponta alternativas didáticas que podem favorecer a produção de provas e demonstrações: os ambientes de geometria dinâmica (GD) como podemos notar em [11], [13], [12] e [10]; e as tarefas de investigação matemática como observado em [16], [8] e [15].

Um estudo teórico que explicita as potencialidades das tarefas de investigação desenvolvidas em ambientes de GD para a construção da prova já foi tema de estudo do primeiro autor deste trabalho. Uma das conclusões obtidas foi que estas atividades “[...] funcionam como agente catalisador do processo de experimentação devido a sua capacidade de simulação dinâmica, isso permite que rapidamente conjecturas sejam levantadas, provadas ou refutadas permitindo que o usuário siga para uma nova etapa de exploração” [2] (p. 31). O estudo, no entanto, não apresenta caminhos ou evidencia processos que possam contribuir para a estimular a construção da prova matemática. É exatamente nesta lacuna que nosso trabalho de dissertação se coloca ao propor uma pesquisa empírica que propõe investigar *de que modo sequências didáticas produzidas em ambientes de geometria dinâmica podem contribuir para a construção da prova matemática?*

Nossa pesquisa tem como objetivo analisar de que modo tarefas de natureza investigativa desenvolvidas em ambientes de geometria dinâmica podem contribuir para a construção da prova matemática em problemas relativos às desigualdades no triângulo. Para tal vamos: distinguir, discutir e analisar os tipos de prova matemática e os respectivos ambientes aos quais elas são pertinentes; descrever e explicitar mecanismos presentes nos *softwares* de geometria dinâmica e nas atividades de investigação que podem auxiliar no processo de construção de argumentos; desenvolver tarefas investigativas em ambientes de geometria dinâmica e aplicá-las. Os dois primeiros objetivos específicos essencialmente auxiliaram a compor a fundamentação do trabalho, o terceiro é o que se refere mais objetivamente ao Recurso Educacional (RE) e será o nosso foco neste trabalho

como veremos no que segue.

## 2 Metodologia

A leitura de [5] nos leva a entender que o trabalho em desenvolvimento é uma pesquisa de abordagem qualitativa, devido à sua natureza descritiva e ao interesse por questões subjetivas relacionadas ao quadro teórico escolhido pelos pesquisadores e, consequentemente, às suas visões de mundo. Para além, a abordagem qualitativa ainda é reafirmada em razão dos procedimentos utilizados: pesquisa de campo com dados coletados por meio da observação participante, da captação de áudio e da análise de materiais escritos pelos estudantes nas atividades propostas. Nossa pesquisa tem natureza aplicada, pois tem como interesse a produção de saberes e recursos que permitem a aplicação prática dos conhecimentos desenvolvidos. Já no que tange os objetivos ela pode ser caracterizada como explicativa uma vez que tem como pretensão explicitar as razões pelas quais um determinado fenômeno ocorre.

O *locus* de nossa pesquisa foi o Colégio Estadual de Tempo Integral Antônio da Costa Brito, uma escola do interior da Bahia de grande porte que conta com aproximadamente 800 estudantes e oferta Ensino Médio regular em tempo integral e parcial. A sequência didática construída está sendo aplicada com um grupo de 5 estudantes de 16 a 18 anos que cursam o 2º e 3º anos do Ensino Médio. Foram escolhidos estudantes que fazem parte de um projeto de monitoria de ensino denominado Mais Estudo que contempla estudantes com bom desempenho em matemática com uma bolsa em troca da realização de atividades de reforço com os colegas no contraturno. A escolha desses estudantes que em tese têm mais habilidades consolidadas em matemática que os colegas se dá em razão da já conhecida complexidade das tarefas investigativas como destaca [15] e do notório interesse desses pelo componente curricular. Importante destacar que no currículo da unidade escolar em questão só há conteúdos relacionados a geometria plana no 3º ano do Ensino Médio, contudo, os objetos de conhecimento matemáticos presentes nas tarefas desenvolvidas no âmbito desta pesquisa não foram objeto de estudos dos estudantes na unidade escolar.

As tarefas investigativas que compõem a sequência didática foram desenvolvidas transformando resultados já conhecidos como o teorema do ângulo externo e a desigualdade triangular em tarefas de investigação e foram armazenadas no site do Geogebra (GGB), espaço no qual, inclusive, os estudantes têm acesso para realizar as suas investigações durante as sessões de aplicação da sequência didática.

As sessões com as tarefas devem durar por volta de 2 horas cada e serão 3 sendo que a primeira delas contém, além da tarefa investigativa, uma breve “revisão” sobre os tópicos desigualdades de números reais e congruência de triângulos. Foram abordadas as propriedades transitiva, a tricotomia e a monotonicidade da relação de desigualdade e os casos de congruência. As demais sessões contarão apenas com as tarefas investigativas. Relevante destacar que as tarefas das sessões 1 e 2 têm essencialmente o objetivo de familiarizar os estudantes com as tarefas de investigação e criar repertório para a construção de provas, em especial na última sessão – o fato descoberto na sessão 1 é relevante para a construção da prova do resultado da sessão 2 e idem para os resultados das sessões 2 e 3. Nosso planejamento contempla que as sessões fossem divididas em 4 etapas de trabalho: apresentação da tarefa, análise e investigação da situação pela dupla e pelo trio de modo independente, socialização e discussão das conclusões entre os estudantes e, por fim, após a conclusão dos estudantes sobre os fatos observados, a demonstração do resultado pelo professor.

As informações obtidas durante as atividades foram coletadas por meio de formulários de papel, arquivos de imagem com registro das telas (*print screen*) dos *tablets* em que os estudantes interagiram com a tarefa e os registros de observação do pesquisador durante e após a realização de cada atividade. As sessões também foram gravadas em áudio e a transcrição desse material comporá o material de análise. No momento da escrita deste trabalho, concluímos a primeira sessão de

aplicação, e alguns dos resultados obtidos serão analisados a seguir.

### 3 Resultados e Discussão

A primeira sessão<sup>3</sup> contou com a presença de três estudantes que não foram organizados em grupo como inicialmente planejado, eles trabalharam ora individualmente, ora em colaboração, por iniciativa própria ou do professor. Cada estudante teve acesso a um *tablet* com o qual acessou a atividade que estava hospedada no site do GGB. Para além, um computador conectado a TV exibia o *applet* no ambiente do GGB com a finalidade de auxiliar a exibição de configurações do triângulo que necessitassem de discussões com o grupo. Essas discussões foram dominantes na aplicação. Vamos apresentar alguns resultados dessa primeira sessão de aplicação seguindo três momentos de uma aula de investigação conforme [16].

A introdução da tarefa é um momento no qual os estudantes devem ser motivados a desenvolver a investigação e ter ciência do seu papel enquanto formuladores dos problemas e objetivos bem como as escolhas dos caminhos e ferramentas usadas. Neste momento, os estudantes também devem ter ciência do produto derivado dessa atividade: um processo de argumentação sobre os fatos observados [16]. Os estudantes foram orientados sobre o tipo de atividade e a postura que era esperada deles. Notamos que estavam empolgados, gostaram da ideia de participar de uma pesquisa e demonstraram motivação em razão do trabalho ser desenvolvido em ambiente informatizado. Alguns deles, ao iniciar, classificaram a atividade como “legal” e “bacana”. Muito rapidamente esses se lançaram no processo de exploração.

A realização da investigação, o segundo momento da aula, é o processo no qual efetivamente a investigação é realizada. Como sinalizado por [16], os estudantes passaram um tempo considerável tentando entender o que deveria ser feito. As primeiras afirmações só surgiram depois que os estudantes leram a primeira dica, a partir de então passaram a listar fatos sobre triângulos que eles já conheciam, como ilustrado na Figura 1.

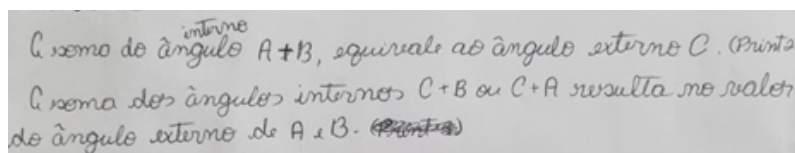


Figura 1: Listagem de propriedades feita pelo estudante B. Fonte: dos autores.

Não houve por parte do professor estímulo a seguir investigações sobre esses resultados já conhecidos, a escolha pelo objeto matemático desigualdades no triângulo se deu exatamente com a finalidade de usar nas atividades fatos novos para evitar a reprodução de argumentos já, igualmente sabidos. Diante dessa situação, o professor questionou os estudantes se eles já tinham esse conhecimento dos fatos que listavam ou se concluíram a partir da interação com o *applet* no GGB, eles responderam que já sabiam e o professor sugeriu que eles buscassem relações novas, outras que eles ainda não soubessem, mas que pudessem encontrar por meio do movimento da figura no GGB. Eles aceitaram o convite e novas conjecturas começaram a emergir.

Uma delas é uma forma similar ao resultado: a medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes. A Figura 2 abaixo exhibe a anotação do estudante B. Relevante destacar que o enunciado do problema é acompanhado com uma tentativa de validação da afirmação, na tipologia de provas de [3], um empirismo ingênuo,

<sup>3</sup>Link para acesso a tarefa aplicada na primeira sessão: <https://www.geogebra.org/m/fynpvsnj>

aquelas provas que se limitam a verificar a validade de uma certa propriedade em um ou poucos casos particulares.

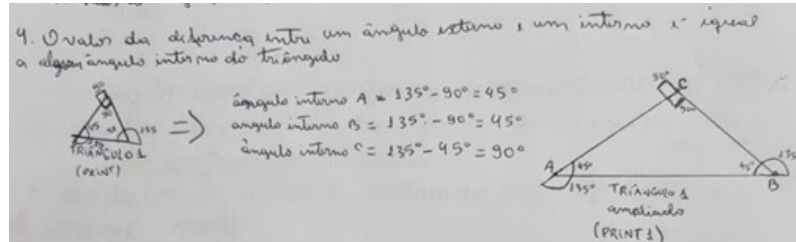


Figura 2: Estudante B enuncia resultado e faz uma verificação empírica. Fonte: dos autores.

Outras conjecturas surgiram, mas a partir da intervenção do professor. Como vemos na transcrição abaixo.

**Professor:** Vocês conseguiriam perceber alguma relação de desigualdade aí? (...)  
 Entre os ângulos internos e os ângulos externos?  
**Estudante A:** Desigualdade?  
**Estudante C:** Geralmente os internos são menores.  
**Professor:** Qual? (...)  
**Estudante C:** Geralmente os internos são menores do que os externos.  
**Professor:** Os internos são menores do que os externos?  
**Estudante A:** Não. Porque se movimentar, a depender do movimento, o externo, ele fica menor do que o interno.  
**Estudante C:** Aqui não. (...)  
**Estudante A:** Eu fiz um movimento que teve um lado[ângulo] do externo menor do que o interno.

O estudante mostrou aos demais colegas que a propriedade não se verificava usando um argumento próprio do ambiente de GD, o movimento. Gravina, [12], destaca que as atividades desenvolvidas nesse ambiente permitem o teste de muitas possibilidades favorecendo, desse modo, a verificação de conjecturas e, por conseguinte, o seu refino. Foi o que aconteceu, eles ajustaram a conjectura.

Os estudantes se voltaram a esse problema e após algum tempo produziram uma nova conjectura ao perceberem que o ângulo externo de um triângulo é sempre maior que os internos não adjacentes. Abaixo, na Figura 3, o registro do estudante B acerca dessa discussão. Já o estudante A enunciou do seguinte modo "O ângulo externo só será menor que o interno, só será menor que o seu ângulo adjacente. Ele, ele comparado aos outros ângulos [aos internos não adjacentes], ele será sempre maior".

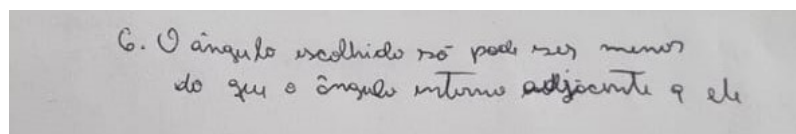


Figura 3: Estudante B enuncia resultado equivalente ao teorema do ângulo externo. Fonte: dos autores.

Embora a conjectura tenha sido construída satisfatoriamente, o argumento para justificar a validade foi baseado nos testes, mais uma vez, uma prova pragmática, o empirismo ingênuo. Contudo, quando o professor interpelou os estudantes como eles poderiam garantir a validade da afirmação para os casos que não foram testados o seguinte diálogo mostra que os estudantes perceberam a limitação do próprio argumento.

**Professor:** Então, como é que você garante que não existe algum caso em que isso fura?

**Estudante B:** Eu não garanto.

**Professor:** Você não garante?

**Estudante B:** Não.

**Estudante A:** Então diria que seria tipo 98%. Ainda é um número alto. Eu garanto que é altíssimo.

**Estudante B:** Eu garanto que no triângulo em que eu estou resolvendo essa regra se aplica para. Agora, para os outros, eu já não sei.

Eles não consideram que o argumento dos testes seja definitivo mesmo tendo feito uma grande quantidade de verificações. Em outros momentos os estudantes apontaram que uma prova que fosse definitiva não poderia ter números nas medidas dos ângulos, um claro indício de que percebem a necessidade de um processo de generalização, além disso o estudante A investiu algum tempo buscando um argumento que fosse comum a todos os triângulos e fez a seguinte afirmação:

*(...) o que faz com que o ângulo externo fique menor que o interno é exatamente aaa... Não é bem a extremidade, mas a forma como nós colocamos ele. Só que para poder o interno ficar maior que o externo, a gente precisa dar mais espaço para o interno e diminuir o espaço no externo. Mas não é bem esse argumento.*

Muito embora o argumento esteja confuso é possível notar a busca por algo que seja comum aos triângulos que ele visualizou nas telas e a procura pelo argumento perpassa, mais uma vez, pelo movimento dos objetos.

Apesar dos estudantes não terem produzido um texto para justificar a conjectura, consideramos os elementos presentes na oralização suficientes para considerar que eles buscavam uma prova do tipo experimento crucial, uma prova que se afasta das características particulares do objeto e o compreende como um representante de classe, conforme a tipologia de [3].

A terceira e última fase listada por [16] para uma tarefa de investigação em sala de aula, a discussão dos resultados, não teve um momento dedicado especificamente para ela como o planejado dada a ausência de parte dos estudantes que inviabilizou a formação de grupos. Contudo, a discussão sempre esteve presente na aula, à medida em que a exploração ocorria os estudantes comunicavam uns aos outros as suas conclusões e respondiam a questionamentos dos colegas e do professor criando um ambiente de socialização, crítica e argumentação sobre os fatos descobertos. Nesta sessão a discussão dos resultados ocorreu de modo contínuo na aula.

A sessão foi encerrada com o professor apresentando uma demonstração para a conjectura “a medida do ângulo externo é sempre maior do que a medida dos ângulos internos não adjacentes a ele”. Neste momento da sessão notamos os estudantes reagindo com expressões de incredulidade e afirmando que não pensariam naquela linha de argumentação.

## 4 Considerações Finais

Consideramos positiva a primeira sessão, não tínhamos a expectativa de ver indícios de prova do tipo experimento crucial e isso nos animou para as próximas aplicações. Avaliamos de modo positivo o uso de uma atividade de investigação mais estruturada, com dicas escritas no *applet* e verbalizadas pelo professor. Como ponderou [8], elas auxiliam no desenvolvimento das atividades em especial quando se trata de estudantes neófitos nesses tipos de tarefas. Em relação ao nosso objetivo, notamos que essa tarefa foi eficaz em criar um cenário propício para a investigação e também para a construção de provas, como mostramos na seção anterior. Contudo avaliar as razões pelas quais especificamente essa primeira sessão teve para tal efeito requer uma investigação mais ampla em todo material coletado, tarefa esta que será empreendida no trabalho completo quando também analisaremos o efeito da sequência didática como um todo.

## Referências

- [1] S. A. Almouloud. **Prova e Demonstração em matemática: problemática de seu processo de ensino e aprendizagem**. Online. Acessado em 29/06/2023, <https://www.anped.org.br/sites/default/files/gt19-2957-int.pdf>. 2007.
- [2] P. V. dos Anjos. **Atividades de Investigação Matemática em Ambientes de Geometria Dinâmica: suas potencialidades para a construção da prova matemática**. Monografia de Especialização. Universidade do Estado da Bahia. 2016.
- [3] N. Balacheff. “A argumentação matemática: um precursor problemático da demonstração.” Em: **Educação Matemática Pesquisa**. Vol. 24. Acessado em 24/03/2016, <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/57664/39411>. 2000, pp. 5–23.
- [4] N. Balacheff. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas**. Online. Acessado em 10/04/2024, <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/52/01/33/PDF/Balacheff2000Proceso.pdf>.
- [5] M. C. Borba. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Online. Acessado em 23/09/2024, [https://www.researchgate.net/publication/228889292\\_A\\_PESQUISA\\_QUALITATIVA\\_EM\\_EDUCACAO\\_MATEMATICA](https://www.researchgate.net/publication/228889292_A_PESQUISA_QUALITATIVA_EM_EDUCACAO_MATEMATICA).
- [6] Brasil. **Base Nacional Comum Curricular**. Secretaria de Educação Básica. Brasília-DF: MEC/SEB, 2018.
- [7] Brasil. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília-DF: MEC/SEF, 1998.
- [8] J. Brocado. “As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8º ano”. Tese de doutorado. Universidade de Lisboa, 2001.
- [9] P. J. Davis e R. A. Hersh. **A Experiência Matemática**. Francisco Alves, 1985.
- [10] M. D. De Villiers. **Para uma diferente compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica**. Online. Acessado em 14/02/2016, <https://www.researchgate.net/publication/280526956>.
- [11] M. A. Gravina. “Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o ensino”. Em: **Anais do IV Congresso Brasileiro de Informática na Educação**. 1996.
- [12] M. A. Gravina. “Os Ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético-dedutivo”. Tese de doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001.
- [13] M. A. Gravina e L. M. Santarosa. “A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados”. Em: **Anais do IV congresso Brasileiro de informática na educação**. 1998.
- [14] G. Hanna. “Proof, Explanation and Exploration: An Overview”. Em: **Educational Studies in Mathematics** 44 (dez. de 2000), pp. 5–23. DOI: 10.1023/A:1012737223465.
- [15] J. P. Ponte. “Explorar e investigar matemática: uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem”. Em: **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. Vol. 21. 2010, pp. 13–30.
- [16] J. P. Ponte, J. Brocardo e H. Oliveira. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Autêntica, 2019. ISBN: 978-8551305850.
- [17] D.A. Reid e C. Knipping. **Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching**. Brill, 2010. ISBN: 9789460912467. URL: <https://books.google.com.br/books?id=kX0fEAAAQBAJ>.