

Trabalhando o Conceito de Infinito no Ensino Médio

Pierre S. F. Vieira,¹ Luis A. D'Afonseca² Sandra M. A. Jorge³

PROFMAT CEFET-MG, Belo Horizonte, MG

Resumo. Este trabalho visa apresentar uma apostila destinada a alunos e professores do Ensino Médio, abordando o conceito de infinito em sala de aula. A apostila foi desenvolvida por Pierre Simon de Fermat Vieira como produto educacional de sua dissertação no PROFMAT (CEFET-MG). Para fundamentar o conteúdo, analisamos a BNCC e livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio, a fim de identificar como o tema é tratado. Também revisamos dissertações sobre o ensino do infinito para mapear iniciativas acadêmicas relevantes.

Palavras-chave. Infinito, Produto Educacional, Ensino Médio.

1 Introdução

O interesse humano pelo infinito surgiu provavelmente com suas reflexões sobre sua origem e existência. Ao longo da história, diversos pensadores exploraram esse tema. Na matemática, Euclides (século III a.C.), de forma indireta, e estudiosos dos séculos XVIII e XIX, como Bolzano (1781-1848), Cauchy (1789-1857), Weierstrass (1815-1897), Dedekind (1831-1916), Cantor (1845-1918) e Hilbert (1862-1943), fizeram contribuições significativas para o entendimento e a construção do conceito de infinito, sendo Cantor, talvez, o que mais se aproximou de explicá-lo sob a perspectiva matemática.

O conceito de números infinitos continuou deixando os matemáticos perplexos até a última parte do século XIX. Foi então que, numa série de artigos publicados entre 1874 e 1884, o matemático alemão George Cantor mostrou que a infinidade podia de fato ser tratada de uma maneira matemática rigorosa. (MORRIS, 1998, p. 19)[17].

No Ensino Básico, o conceito de infinito não é tratado com rigor matemático, embora apareça frequentemente nos textos, o que acaba levando a interpretações subjetivas e, muitas vezes, equivocadas. Um exemplo comum ocorre quando se compara a cardinalidade dos conjuntos de números naturais e inteiros, onde é provável que um aluno afirme que o conjunto dos inteiros é maior, considerando a existência de inteiros negativos correspondentes aos naturais. Situações como essa motivaram a criação da apostila apresentada, que busca introduzir definições e resultados sobre o infinito aos alunos do Ensino Médio, explorando teorias e construções lógicas de maneira acessível. Para mais informações, recomendamos a dissertação de Pierre Simon de Fermat Vieira [10].

2 Metodologia

Para fundamentar nossa proposta e avaliar o que já foi discutido sobre o ensino do infinito, realizamos uma pesquisa em três níveis: a legislação brasileira, livros didáticos e dissertações acadêmicas.

¹pierre.matematica@hotmail.com

²luis.dafonseca@cefetmg.br

³sandramara@cefetmg.br

Primeiramente, analisamos a BNCC, documento normativo que orienta a elaboração dos currículos e propostas pedagógicas da educação básica no Brasil, cujas observações estão na Seção 3. Em seguida, examinamos livros didáticos, avaliando como o tema do infinito é apresentado (Seção 4). Por fim, buscamos trabalhos acadêmicos que abordam temas semelhantes, analisando suas propostas e sugestões, conforme discutido na Seção 5.

3 Infinito na BNCC

A BNCC não aborda explicitamente o tema “Infinito”. No entanto, ao analisarmos as descrições das habilidades, encontramos referências indiretas ao conceito. Por exemplo, a habilidade EF06MA01 menciona “Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica”. Embora não se refira diretamente ao infinito, o uso do termo “finita” e a sugestão de utilizar a reta numérica indicam a possibilidade de representação de conjuntos numéricos infinitos. Situações semelhantes ocorrem nas habilidades EF06MA08, EF07MA03 e EF07MA10.

Além disso, a habilidade EF08MA05, que trata da obtenção de frações geratrizes para dízimas periódicas, envolve representações decimais infinitas. O tema se torna mais explícito na habilidade EF09MA02, que diz: “Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica”. Essa é a única ocorrência de uma derivação da palavra “infinito” nas descrições de habilidades.

Assim, mesmo que a BNCC não inclua formalmente o estudo do infinito no Ensino Básico, ela acaba fazendo referências indiretas ao conceito em várias de suas habilidades.

4 Infinito nos Livros Didáticos

Entre os livros do Ensino Fundamental II, escolhemos a coleção “Teláris Matemática” (3ª ed., 2018, Editora Ática), de Luiz Roberto Dante. Como esperado, os livros não apresentam diretamente o conceito de infinito, mas o tema aparece em várias passagens. A dissertação de Vieira [10] discute esses pontos em mais detalhes, enquanto aqui destacamos algumas referências relevantes.

No livro do 6º ano [4], o conceito de infinito é introduzido no primeiro capítulo (p. 25), na seção “Números Naturais – Sequência dos números naturais”, com a afirmação “Como todo número natural tem um sucessor, a sequência dos números naturais é *infinita*. Isso é representado na sequência pelas reticências (...)”. O autor também sugere uma correspondência biunívoca entre os números naturais e os subconjuntos de números pares e ímpares, como podemos verificar nas afirmações: “A cada número natural corresponde um único número par, ou seja, cada número par é dado em função de determinado número natural” e “A cada número natural corresponde um único número ímpar. Cada número ímpar é dado em função de determinado número natural”.

No livro do 7º ano [5], no Capítulo 1, a sequência dos números inteiros é apresentada com a notação $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, onde as reticências indicam infinitude. Além disso, a distinção entre sequências finitas e infinitas é abordada, por exemplo, no trecho (p. 40): “Essa sequência dos dias de uma semana é finita, pois tem um número finito de termos (7 termos). Há também sequências que são *infinitas*, pois tem *infinitos* termos, como a sequência dos números naturais (0, 1, 2, 3, 4, 5, ...)”.

No 8º ano [6], as dízimas periódicas infinitas são trabalhadas como uma representação de números racionais no Capítulo 1, “Números, dos Naturais aos Racionais, e Sequências” (p. 21). No Capítulo 2, “Lugares Geométricos e Construções Geométricas” (p. 69), o autor afirma: “Dada uma reta r , existem no mesmo plano *infinitas* retas paralelas a ela”.

No livro do 9º ano [7], no Capítulo 1, “Números Reais” (p. 13), o autor introduz os números irracionais afirmando: “Existem números cuja representação decimal é *infinita* e não periódica e que por isso, não são racionais”. Logo abaixo, define: “Número irracional é todo número cuja representação decimal é *infinita* e não periódica”.

Para o Ensino Médio, escolhemos a coleção “Matemática em Contextos” [3], escrita por Luiz Roberto Dante e Fernando César de Abreu Viana (editora Ática, 2020). A coleção é composta por seis volumes organizados por conteúdo, que podem ser trabalhados em qualquer ordem.

No livro “Função Exponencial, Função Logarítmica e Sequências” [2], ao explorar o gráfico da função $f(x) = 2^x$ (p. 44), os autores afirmam: “Os valores da função são sempre positivos e não existe valor máximo; conforme aumentamos o valor de x , o valor correspondente de $f(x)$ cresce *infinitamente*” e acrescentam: “Então $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$ ou $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$, ou, ainda $\text{Im}(f) = (0, \infty)$ em que ∞ é o símbolo de *infinito*”.

No capítulo sobre sequências, os autores fazem várias referências às “sequências *infinitas*” e, na seção “Explorando a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita”, utilizam a notação de limites, conforme ilustrado na Figura 1.

Formalizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita

De modo geral, nas progressões geométricas infinitas em que a razão q está entre -1 e 1 (ou seja, $-1 < q < 1$), a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando n é suficientemente grande, ou seja, quando n tende a infinito. Nesse caso, q^n aproxima-se de 0 quando n é suficientemente grande, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Então, escrevemos assim:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = a_1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}, \text{ ou seja, } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

No exemplo da PG infinita $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \right)$ dada acima, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Fique atento

$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$

Lemos: Limite de q^n quando n tende ao infinito.

Refleta //////////////

O que acontece com a soma dos termos de uma PG infinita de termos positivos e razão q maior do que 1?

Figura 1: Utilização da notação de limite na página 146 do livro “Função Exponencial, Função Logarítmica e Sequências” [2].

Assim como na BNCC, os livros analisados não abordam o conceito de infinito, mas o tema é recorrente, com os autores chegando a apresentar as notações de infinito e limite.

5 Infinito em Dissertações

A busca textual pela palavra-chave “infinito” na área de Ciências Exatas e da Terra, realizada no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES (catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses) entre os anos de 2012 e 2022, resultou em 57 dissertações. No caso das dissertações do PROFMAT (<https://profmatsbm.org.br/dissertacoes>), entre março de 2013 e dezembro de 2022, foram encontradas 18 dissertações.

Após uma seleção baseada em relevância e similaridade com a proposta deste trabalho, escolhemos onze dissertações do PROFMAT e três de outros programas para análise mais detalhada. A discussão aprofundada de cada uma dessas dissertações pode ser encontrada em Vieira [10]. Aqui, apresentamos apenas informações gerais sobre cada trabalho. A Tabela 1 lista as onze dissertações do PROFMAT selecionadas e a Tabela 2 apresenta as dissertações de outros programas.

Diversos trabalhos utilizam abordagens semelhantes à que propomos. Contudo, nenhum apresenta um produto educacional completo, como a apostila que desenvolvemos.

Tabela 1: Dissertações sobre o Infinito defendidas no Profmat.

Ano	Autor(a)	Título	Instituição
2013	F. L. Baccarin	Conjuntos infinitos e suas surpresas: uma sequência de atividades [1]	UEL
2015	H. S. Delfino	O conceito de infinito: uma abordagem para a Educação Básica [8]	UFV
2015	T. S. L. Santos	O conceito de infinito: uma abordagem a partir da resolução de problemas [21]	UFBA
2016	L. B. S. Teixeira	O infinito matemático [22]	UERJ
2016	R. L. da Silva	Oficina sobre o infinito: uma proposta didática para os alunos das séries finais do Ensino Fundamental II e Ensino Médio [20]	UFES
2016	W. M. L. Silva	Um estudo sobre o infinito: enumerabilidade e densidade dos conjuntos numéricos [13]	UFTM
2017	M. A. Ortiz	A geometria e o infinito [18]	UFABC
2019	A. E. Santo	Conjuntos infinitos e funções bijetivas: uma abordagem no Ensino Básico [9]	UTFPR
2019	G. R. de Lisboa	O infinito em dois fragmentos: Arte e Matemática [14]	UFCAT
2019	J. A. de Lima	Sobre o conceito de infinito e aplicações [12]	UFCA
2022	T. Moreira	Existem infinitos maiores que outros infinitos? [16]	UNESP

Tabela 2: Dissertações sobre o Infinito defendidas em outros programas.

Ano	Autor(a)	Título	Instituição – Programa
2013	L. C. S. Monteiro	O desenvolvimento das metáforas do conceito de infinito na educação matemática [15]	UFPE – Mestrado em Psicologia Cognitiva
2016	L. M. C. Pereira	A noção de infinito na educação básica: reflexões e proposta [19]	Unigranrio – Mestrado Profissional Ensino das Ciências na Educação Básica
2019	A. P. Gonçalves	Perguntas e histórias sobre o infinito matemático: o que os estudantes da educação básica desejam saber acerca da história cultural do infinito? [11]	UFRJ – Programa de Mestrado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia

6 Resultados e Discussão

Sob a perspectiva dos estudos realizados e diante da carência de materiais didáticos que considerássemos adequados, elaboramos uma apostila cujo objetivo é auxiliar alunos e professores do Ensino Médio na compreensão e exploração do infinito. O material disponibilizado busca subsidiar estudos mais avançados, apresentando as construções lógicas, definições e teoremas necessários para uma abordagem completa sobre o infinito, respeitando as limitações inerentes ao nível de ensino. A Figura 2 apresenta a capa e o sumário da apostila “Quem disse que $0,999\dots = 1$?” que pode ser baixada em <https://sites.google.com/view/prof-luis-dafonseca/ensino-b\%C3%A1sico/infinito>.



Sumário	
Prefácio	1
1 O Infinito	3
1.1 O que é o infinito?	3
1.2 Grécia Antiga	5
1.3 Idade Média	10
1.4 Idade Moderna	13
1.5 Idade Contemporânea	16
2 Números Para Contar	21
2.1 Como contar matematicamente?	21
2.2 Conjuntos	22
2.3 Operações entre Conjuntos	30
2.4 Funções	35
2.5 Conjuntos Finitos	43
2.6 Conjuntos Infinitos	51
3 Números Para Medir	58
3.1 Por que medir?	58
3.2 Números Racionais	59
3.3 Números Reais	68

Figura 2: Capa e sumário da apostila “Quem disse que $0,999\dots = 1$?”.

A apostila está organizada em quatro capítulos, além do prefácio e das considerações finais. O Capítulo 1, “O que é o Infinito”, apresenta uma análise histórica da evolução do conceito de infinito desde a Antiga Grécia até os dias atuais. No Capítulo 2, “Números Para Contar”, começa a “matemática” da apostila. Nosso objetivo nesse capítulo é apresentar o que chamamos de “infinitamente grande”, ou seja, a noção de um conjunto com infinitos elementos. No Capítulo 3, “Números Para Medir”, discutimos o que denominamos “infinitamente pequeno”. Nele, exploramos a construção dos conjuntos dos números racionais e reais, que são os números utilizados para preencher os espaços existentes na reta entre os números inteiros. No Capítulo 4, “Calculando o Infinito”, apresentamos sequências e séries, explorando alguns exemplos e contra-exemplos. Para familiarizar o aluno com o tema, inicialmente abordamos as sequências já conhecidas por eles, ou seja, as progressões aritméticas e as progressões geométricas. Em seguida, ilustramos o conteúdo



Figura 3: Personagens utilizados na apostila: o Curioso e o Provocador.

com exemplos interessantes, como a soma dos termos $a_n = 1/2^n$ e o cálculo do valor de π . Posteriormente, apresentamos a definição de limite e verificamos a convergência de algumas sequências. Por fim, direcionamos o aluno à resposta da questão que intitula a apostila.

A fim de nos aproximarmos do leitor, criamos dois personagens: o Curioso e o Provocador (Figura 3), que interagem constantemente com o texto. O primeiro levanta questões e reflexões que incentivam o aluno a pensar, enquanto o segundo agrega um toque de leveza e humor ao texto.

7 Considerações Finais

Embora a BNCC não inclua o infinito em suas propostas, esse conceito aparece frequentemente nos livros didáticos, como discutido anteriormente. Não sugerimos mudanças no conteúdo programático do Ensino Básico; em vez disso, apresentamos um material didático que consideramos adequado para ser utilizado em atividades extras com alunos interessados. A criação de uma apostila com um tratamento formal do infinito visa servir de suporte para discussões mais profundas e enriquecedoras em sala de aula, além de ajudar a reduzir a lacuna entre o Ensino Médio e o Superior, especialmente em disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral, comum nos cursos de ciências exatas.

Referências

- [1] Fabio Luis Baccarin. “Conjuntos infinitos e suas surpresas: uma sequência de atividades”. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual de Londrina (UEL), 15 de mar. de 2013. URL: https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=68&id2=44976.
- [2] L.R. Dante e F. Viana. **Matemática em Contextos: função exponencial, função logarítmica e sequências**. Ática, 2020.
- [3] L.R. Dante e F. Viana. **Matemática: Contexto & aplicações**. Matemática contexto e aplicações. Ática Didáticos, 2018. ISBN: 9788508190034. URL: <https://books.google.com.br/books?id=OUj8zwEACAAJ>.
- [4] Luiz Roberto Dante. **Teláris Matemática – 6º Ano**. Ática, 2018. ISBN: 9788508191130.
- [5] Luiz Roberto Dante. **Teláris Matemática – 7º Ano**. Ática, 2018. ISBN: 9788508191154.
- [6] Luiz Roberto Dante. **Teláris Matemática – 8º Ano**. Ática, 2018. ISBN: 9788508191178.
- [7] Luiz Roberto Dante. **Teláris Matemática – 9º Ano**. Ática, 2018. ISBN: 9788508191192.
- [8] Hudson Sathler Delfino. “O conceito de infinito: uma abordagem para a Educação Básica”. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Viçosa (UFV), 14 de dez. de 2015. URL: https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=3027&id2=80458.
- [9] Andressa do Espírito Santo. “Conjuntos Infinitos e funções bijetivas: uma abordagem na educação básica”. Dissertação de mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), 30 de abr. de 2019. URL: https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4628&id2=160640959.
- [10] Pierre Simon de Fermat Vieira. “Elaboração de uma apostila para apresentar o Infinito no Ensino Médio”. Dissertação de mestrado. CEFET-MG, 30 de ago. de 2023. URL: https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7335&id2=171056290.
- [11] Ana Paula Gonçalves. “Perguntas e histórias sobre o infinito matemático: O que os estudantes da educação básica desejam saber acerca da história cultural do infinito?” Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), 11 de dez. de 2019. URL: http://146.164.248.81/hcte/docs/dissertacoes/2019/ana_paula_goncalves.pdf.

- [12] Josevanio Alcantara de Lima. “Sobre o conceito de infinito e aplicações”. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Cariri (UFCA), 19 de jul. de 2019. URL: https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=5076&id2=170170491.
- [13] Wysner Max de Lima Silva. “Um estudo sobre o infinito: enumerabilidade e densidade dos conjuntos numéricos”. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFMT), 24 de jun. de 2016. URL: https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=2809&id2=95501.
- [14] Gustavo Rodrigues de Lisboa. “O infinito em dois fragmentos: arte e Matemática”. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Catalão (UFG), 12 de abr. de 2019. URL: https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=4676&id2=160300589.
- [15] Lúcia Cristina Silbveira Monteiro. “O Desenvolvimento das Metáforas do Conceito de Infinito na Educação Matemática”. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), 18 de jun. de 2003. URL: <http://www.liber.ufpe.br/teses/arquivo/20040616152524.pdf>.
- [16] Talita Moreira. “Existem infinitos maiores que outros infinitos?” Dissertação de mestrado. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 4 de out. de 2022. URL: https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=6795&id2=171055608.
- [17] Richard Morris. **Uma Breve História do Infinito: Dos paradoxos de Zenão ao universo quântico**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998, p. 229. ISBN: 8571104778.
- [18] Miguel Albuquerque Ortiz. “A geometria e o infinito”. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do ABC (UFABC), 21 de ago. de 2017. URL: https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=3655&id2=150530697.
- [19] Luiz Marcos Cavalcanti Pereira. “A noção de infinito na educação básica: reflexões e propostas”. Dissertação de mestrado. Universidade do Grande Rio (UNIGRANRIO), 26 de fev. de 2015. URL: <https://tede.unigranrio.edu.br/bitstream/tede/262/5/Luiz%20Marcos%20Cavalcanti%20Pereira.pdf>.
- [20] Robson Luiz da Silva. “Oficina sobre o infinito: Uma proposta didática para os alunos das séries finais do ensino fundamental II e ensino médio”. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Espírito Santo, 2016. URL: <https://repositorio.ufes.br/bitstream/10/7542/1/ROBSONLUIZDASILVA-2016-trabalho.pdf>.
- [21] Tatiana de Souza Lima Santos. “O conceito de infinito: uma abordagem a partir da resolução de problemas”. Dissertação de mestrado. Universidade Federal da Bahia (UFBA), 10 de abr. de 2015. URL: https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=1768&id2=1447.
- [22] Leandro Borges Salgado Teixeira. “O infinito matemático”. Dissertação de mestrado. Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), 26 de ago. de 2016. URL: https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=3401&id2=83804.