Título:Ferramentas Matemáticas para a Resolução de Sistemas de Equações Não Lineares no Ensino Médio

Mirray Victor Lima Oliveira[1], Rogério Azevedo Rocha[2]

Resumo Este trabalho discute a importância da introdução de sistemas de equações não lineares no ensino médio, um tema que, apesar de ser fundamental para a compreensão mais ampla da matemática, carece de material bibliográfico voltado para este público. O objetivo central da pesquisa é preencher essa lacuna, fornecendo um conteúdo acessível tanto para alunos quanto para professores. Apresentamos exemplos que podem ser resolvidos algebricamente utilizando ferramentas clássicas da matemática, como as Relações de Girard, as Somas de Newton, a Desigualdade das Médias e os Números Complexos. Esses exemplos são aplicados de maneira didática e adaptados à realidade dos alunos de ensino médio, promovendo o desenvolvimento de habilidades analíticas e raciocínio lógico, fundamentais para o estudo avançado da matemática.

Palavras-chave. Sistemas de Equações Não-Lineares; Resolução Algébrica; Ensino Médio

1 Introdução

A resolução de sistemas de equações não-lineares é uma área fundamental da matemática que apresenta desafios significativos para alunos e professores do ensino médio. Apesar da complexidade inerente a esses sistemas, existem técnicas algébricas que podem ser aplicadas para encontrar soluções eficazes. Este estudo se dedica a explorar essas técnicas, utilizando ferramentas matemáticas clássicas que são acessíveis e compreensíveis para estudantes desse nível, como as Relações de Girard, que relacionam raízes e coeficientes de polinômios, as Somas de Newton, que lidam com somas de potências de raízes de equações polinomiais, e a Desigualdade das Médias, aplicada em problemas de otimização. Além disso, o uso dos Números Complexos também é abordado para a resolução de determinados sistemas de equações não lineares.

O principal objetivo deste trabalho é apresentar técnicas alternativas e estratégias eficazes para a resolução de sistemas de equações não lineares no ensino médio. Ao introduzir essas técnicas, buscamos não apenas fornecer soluções, mas também promover um pensamento crítico e criativo entre os estudantes. O domínio dessas técnicas permitirá que os alunos apliquem conceitos matemáticos de maneira mais ampla, preparando-os melhor para enfrentar problemas complexos tanto em contextos acadêmicos quanto em competições (olímpiadas de matemática, vestibulares militares, etc.)

É notável a escassez de materiais didáticos que tratam de forma detalhada e acessível essas técnicas algébricas no contexto do ensino médio, deixando uma lacuna significativa no material de estudo disponível. Em geral, as bibliografias de matemática relacionadas ao ensino médio focam predominantemente, por serem mais simples de se entender, nos sistemas de equações lineares (conferir, por exemplo, [2], [3] e [4]). Essa pesquisa, juntamente com o artigo [7], é fruto da dissertação de mestrado [6], que apresenta uma proposta para a aplicação das equações não lineares no ensino médio. A dissertação [6], além de explorar um campo de estudo com grande relevância, abriu novas possibilidades para o desenvolvimento de materiais didáticos voltados para a educação básica, buscando aprimorar o ensino de conceitos matemáticos complexos de forma acessível.

[1]mirraywictorhotmail.com; SEMED, Imperatriz-MA.
[2]azevedo@uft.edu.br; UFT - Curso de Ciência da Computação e PROFMAT; Palmas-TO.

2 Metodologia

Esta pesquisa adota uma abordagem metodológica baseada na revisão bibliográfica, consultando livros acadêmicos e artigos científicos relevantes. A revisão é adaptada para atender à proposta didática destinada a alunos do ensino médio. A metodologia empregada tem como objetivo apresentar e aplicar conteúdos matemáticos apropriados para essa faixa etária, com foco especial em sistemas de equações não-lineares.

A proposta didática utiliza métodos alternativos e estratégias eficazes para a resolução de sistemas de equações, enfatizando a integração entre diferentes áreas da matemática. O objetivo é consolidar o aprendizado dos alunos, promovendo a criatividade e o pensamento crítico. A metodologia se concentra na resolução de execícios práticos que desenvolvem habilidades para aplicar conceitos matemáticos em diversos contextos, visando um entendimento mais profundo e abrangente dos conteúdos.

3 Resultados e Discussões

Na seção 3.1 abordaremos as Relações de Girard, as Somas de Newton e a Desigualdade das Médias. Essas ferramentas clássicas da matemática, juntamente com os Números Complexos, serão fundamentais para a resolução dos diversos sistemas de equações não lineares que serão apresentados na seção 3.2. Exemplos relacionados a essas ferramentas e mais exemplos de sistemas de equações não lineares podem ser encontrados em [6].

3.1 Ferramentas Clássicas

3.1.1 Relações de Girard

As Relações de Girard oferecem uma maneira elegante de relacionar os coeficientes de um polinômio às somas e produtos de suas raízes, sem a necessidade de encontrá-las explicitamente. Essas relações são amplamente utilizadas em diversos contextos matemáticos, incluindo a resolução de sistemas de equações não lineares.

Proposição 3.1.1.1 (Relações de Girard)**.** *Considere* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *tal que* $a_i \in \mathbb{R};\ i = 1, ..., n$ *e* $a_n \neq 0$*, um polinômio de grau* n *e suas respectivas raízes complexas* $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n$*. Temos as seguintes relações:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n & = & \frac{-a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n & = & \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_1x_2x_n + x_1x_3x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n & = & \frac{-a_{n-3}}{a_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2x_3\ldots.x_n & = & (-1)^n.\frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Demonstração. Conferir [3]. □

Observação 3.1.1.1. *O lado esquerdo da segunda equação do sistema representa a soma de todos os possíveis produtos de duas das raízes do polinômio; o lado esquerdo da terceira equação representa a soma de todos os possíveis produtos de três das raízes do polinômio, e assim por diante, até o lado esquerdo da última equação que representa o produto de todas as raízes do polinômio.*

3.1.2 Somas de Newton

As somas de Newton, ou identidades de Newton-Girard, são fórmulas fundamentais na Álgebra que relacionam os coeficientes de um polinômio com as somas das potências das raízes desse polinômio.

Proposição 3.1.2.1. *Considere*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0$$

um polinômio de grau $n > 0$ cujas as raízes são $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Defina,

$$S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + ... + x_n^k; \quad k \in \mathbb{Z}$$

*(As somas S_k são conhecidas como **Somas de Newton**). Então, para $k \geq n$,*

$$a_n S_k + a_{n-1}S_{k-1} + a_{n-2}S_{k-2} + ... + a_0 S_{k-n} = 0.$$

Demonstração. Conferir [5]. □

3.1.3 Desigualdades das Médias

A Desigualdade das Médias estabelece relações importantes entre as médias Aritmética, Geometrica e Harmônica. Ela afirma que a Média Aritmética é maior ou igual à Média Geométrica que é maior ou igual à Média Harmônica.

Definição 3.1.3.1. *Considere uma lista com n números $x_1, x_2, ..., x_n$.*
a) *A **Média Aritmética** dos números dessa lista é definida por*

$$Ma = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n};$$

b) *Para $x_1, x_2, ..., x_n > 0$, a **Média Geométrica** dos números dessa lista é definida por*

$$Mg = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n};$$

c) *A **Média Harmônica** dos números dessa lista é dada por*

$$Mh = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}},$$

Proposição 3.1.3.1. *(Des. das Médias) Considere uma lista de n números positivos $x_1, x_2, ...x_n$. Então, $Ma \geq Mg \geq Mh$. Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.*

Demonstração. Conferir [1]. □

3.2 Sistemas de Equações não Lineares

Nesta seção, apresentamos exemplos de sistemas de equações não lineares cujas respectivas soluções fazem uso das ferramentas matemáticas clássicas discutidas na seção 3.1 e dos números complexos.

No exemplo seguinte, utilizamos as **Relações de Girard** (Prop. 3.1.1.1) para construir um polinômio cujas raízes são as soluções do sistema dado.

Exemplo 3.2.1. *Resolva o sistema de equações*

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ xy+xz+yz=27 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1. \end{cases} \tag{1}$$

Solução: Da terceira equação, obtemos

$$\frac{yz+xz+xy}{xyz}=1. \tag{2}$$

Logo, substituindo a segunda equação do sistema (1) na igualdade (2), obtemos

$$xyz=27.$$

Deste modo, temos:

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ xy+xz+yz=27 \\ xyz=27 \end{cases}$$

Assim, pelas Relações de Girard (conf. Seção 3.1.1.1), x, y e z são as raízes do seguinte polinômio de grau 3

$$t^3-9t^2+27t-27=0,$$

ou ainda, de forma fatorada,

$$(t-3)^3=0,$$

que possui $t=3$ como raíz de multiplicidade 3. Portanto, as soluções do sistema (1) são

$$x=3,\ y=3 \text{ e } z=3.$$

□

O exemplo seguinte pode ser resolvido como aplicação das **Relações de Girard** (Prop. 3.1.1.1) em conjunto com as fórmulas de **Soma de Newton** (Prop. 3.1.2.1).

Exemplo 3.2.2. *A partir de*

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases} \tag{3}$$

o valor de $\dfrac{4}{x^4+y^4+z^4}$ *é igual a:*

Solução: Observe que,

$$(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=x^2+y^2+z^2. \tag{4}$$

Assim, substituindo a primeira e a segunda equação do sistema (3) na igualdade (4), obtemos

$$xy+xz+yz=-4. \tag{5}$$

Suponha que x, y, z sejam as raízes do polinômio

$$t^3+at^2+bt+c=0. \tag{6}$$

Então, pelas Relações de Girad, temos: $x+y+z=-a$ e $xy+xz+yz=b$. Assim, pela primeira equação do sistema (3) e por (5), $a=-1$ e $b=-4$. Logo, a equação polinomial (6) passa a ser

$$t^3-t^2-4t+c=0. \tag{7}$$

Considere $S_n=x^n+y^n+z^n$ a soma das $n-$ésimas pontências das raízes da equação polinomial (7), isto é, a soma n de Newton (conf. Seção 3.1.2) das raízes de (7). Logo, Pelo Teorema 3.1.2.1 (Somas de Newton), temos:

$$S_3-S_2-4S_1+3c=0. \tag{8}$$

Pelas equações que compõe o sistema (3), temos: $S_3=1$, $S_2=9$ e $S_1=1$. Logo, por (8),

$$1-9-4.1+3c=0. \tag{9}$$

Assim, $c=4$. Portanto, x, y e z são raízes da seguinte equação polinomial: $t^3-t^2-4t+4=0$. Logo, pelo Teorema 3.1.2.1 (Somas de Newton),

$$S_4-S_3-4S_2+4S_1=0 \tag{10}$$

e, então, desde que $S_3=1$, $S_2=9$ e $S_1=1$, encontramos $S_4=33$. Portanto,

$$\frac{4}{x^4+x^4+z^4}=\frac{4}{S_4}=\frac{4}{33}. \tag{11}$$

□

Observação 3.2.1. *Desde que as soluções do sistema (3) são as raízes da equação polinomial $t^3-t^2-4t+4=0$, as soluções do sistema (3) são $x=-2$, $y=1$ e $z=2$ e suas respectivas permutações.*

O exemplo seguinte pode ser resolvido com o auxílio da desiguadade das médias.

Exemplo 3.2.3. *Resolva o sistema de equações*

$$\begin{cases} x+\dfrac{2}{x}=2y \\ y+\dfrac{2}{y}=2z \\ z+\dfrac{2}{z}=2x \end{cases} \tag{12}$$

Solução: Inicialmente, observamos que i) x,y e z são não nulos; ii) x,y e z são ambos positivos ou x,y e z são ambos negativos e iii) Se (x,y,z) é solução do sistema (12), então $(-x,-y,-z)$ também é solução. Suponha, então, sem perda de generalidades que $x,y,z>0$. Somando as três equações do sistema (12), obtemos

$$x+y+z+2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=2(x+y+z). \tag{13}$$

Como $Ma\geq Mg$ (ver (3.1.3.1)), temos

$$\frac{x+\dfrac{2}{x}}{2}\geq\sqrt{x\frac{2}{x}}, \qquad \frac{y+\dfrac{2}{y}}{2}\geq\sqrt{y\frac{2}{y}} \quad \text{e} \quad \frac{z+\dfrac{2}{z}}{2}\geq\sqrt{z\frac{2}{z}} \tag{14}$$

ou ainda, de posse das equações do sistema (12),

$$2y = x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2}, \qquad 2z = y + \frac{2}{y} \geq 2\sqrt{2} \quad \text{e} \quad 2x = z + \frac{2}{z} \geq 2\sqrt{2} \tag{15}$$

e, então,

$$x \geq \sqrt{2}, \quad y \geq \sqrt{2} \quad \text{e} \quad z \geq \sqrt{2}. \tag{16}$$

Em seguida, somando as 3(três) desigualdades de (15), obtemos

$$x + y + z + 2(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \geq 6\sqrt{2}. \tag{17}$$

Então, substituindo (13) em (17), obtemos $2(x + y + z) \geq 6\sqrt{2}$ ou ainda,

$$x + y + z \geq 3\sqrt{2}. \tag{18}$$

Como vale (16), a igualdade se verifica quando $x = y = z = \sqrt{2}$. Pelo sistema (12), se x, y, z são positivos e solução, então $-x, -y, -z$ também é. Logo, as soluções do sistema (12) são

$$x = y = z = \sqrt{2} \ \text{ e } \ x = y = z = -\sqrt{2}.$$

O próximo exemplo pode ser resolvido como aplicação dos números complexos.

Exemplo 3.2.4. *Encontre os reais x e y, tais que:*

$$\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Solução: Multiplicando a segunda equação por i e somando com a primeira equação, obtemos

$$x + iy + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} - i\frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 3$$

ou ainda,

$$x + iy + \frac{3(x - iy) - (y + ix)}{x^2 + y^2} = 3.$$

Assim,

$$x + iy + \frac{3(x - iy) - i(x - iy)}{x^2 + y^2} = 3. \tag{20}$$

Desde modo, fazendo $z = x + iy$ em (20), temos

$$z + \frac{3\overline{z} - i\overline{z}}{z.\overline{z}} = 3$$

ou ainda,

$$z + \frac{\overline{z}(3 - i)}{z.\overline{z}} = 3$$

e, então,

$$z + \frac{3 - i}{z} = 3.$$

Assim,

$$z^2 - 3z + 3 - i = 0. \tag{21}$$

Logo, de (21), $z = 2 + i$ ou $z = 1 - i$. Portanto, desde que $z = x + iy$, as solução do sistema (19) são os pares ordenados $(x, y) = (2, 1)$ e $(x, y) = (1, -1)$.

4 Considerações Finais

A presente pesquisa teve como objetivo central a apresentação de exemplos de sistemas de equações não lineares que podem ser resolvidos utilizando ferramentas matemáticas acessíveis ao nível do ensino médio, como as Relações de Girard, Somas de Newton, Desigualdade das Médias e Números Complexos. Essas ferramentas, quando bem compreendidas e aplicadas, proporcionam aos alunos uma visão mais profunda da resolução de sistemas de equações, ampliando seus horizontes matemáticos e consolidando a importância de conceitos avançados no contexto da educação básica.

Um dos principais desafios identificados ao longo deste trabalho foi a escassez de materiais didáticos que tratem de sistemas de equações não lineares de forma adequada para o ensino médio. A carência de abordagens mais acessíveis para esse tema reflete uma lacuna significativa na educação matemática nesse nível de ensino, tanto para alunos quanto para professores. Com isso, esperamos que este trabalho contribua para preencher essa lacuna, fornecendo um material de apoio que não só enriqueça as práticas pedagógicas, mas também promova um maior engajamento e compreensão dos estudantes sobre a importância e aplicabilidade de temas mais avançados em matemática.

Por fim, sugerimos como trabalho futuro o estudo das soluções numéricas para sistemas de equações não lineares que não podem ser resolvidos algebricamente. A introdução de técnicas numéricas no ensino médio, de forma didática e acessível, pode abrir novas perspectivas para o aprendizado e demonstrar a importância da matemática computacional. Dessa forma, vislumbramos que a abordagem numérica venha complementar os conhecimentos adquiridos, proporcionando uma visão mais ampla e aplicada das equações não lineares no contexto educacional.

Referências

[1] C. Augusto et al. **Matemática Discreta**. 4ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2023.

[2] L. R. Dante. **Matemática: Contexto e Aplicações - Vol. 2**. 2ª ed. São Paulo: Ática, 2013.

[3] G. Iezzi et al. **Fundamentos de matemática elementar, 6: complexos, polinômios, equações**. 9ª ed. São Apulo: Atual, 2013.

[4] Aurélio Silva de Aquino Marco. "Metodos de Resolução de Sistemas Lineares". Em: **Dissertação PROFMAT-São Luis-MA** (2021).

[5] A. C. Muniz Neto. **Matemática Elementar - Polinômios - Vol. 6**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM - Coleção do Professor de Matemática, 2016.

[6] M. V. L. Oliveira. "Sistemas de Equações Não Lineares no Ensino Médio: Um Estudo Significativo". Em: **Dissertação PROFMAT -Palmas-TO** (2024).

[7] M. V. L. Oliveira e R A. Rocha. "Explorando Sistemas de Equações Não Lineares no Contexto do Ensino Médio". Em: **Professor de Matemática Online - Submetido** (2024).