



Análise da Formação de Estruturas de Fluxo em Regimes Permanente e Transiente com Base na Teoria Constructal

Thiago A. Teixeira¹, Emanuel da S. D. Estrada², Jeferson A. Souza³

Resumo: Este artigo investiga os fenômenos relacionados à formação e evolução das estruturas de fluxo em sistemas naturais, fundamentando-se nos conceitos da Teoria Constructal. O objetivo principal é explorar as diferenças entre estruturas que se desenvolvem sob regime transiente e aquelas que evoluem em regime permanente em modelos físico-matemáticos. Para ilustrar essas diferenças, foi desenvolvido um algoritmo que implementa uma heurística baseada na Teoria Constructal, capaz de criar caminhos condutivos em ambos os regimes. Os resultados demonstram que a consideração do regime transiente no modelo é crucial, uma vez que o passo de tempo de construção afeta diretamente a eficiência térmica dos caminhos condutivos e exerce uma influência significativa na formação de suas estruturas de fluxo.

Palavras-chave: Teoria Constructal; Caminhos Condutivos; Sistemas Transientes.

¹Doutorando em Modelagem Computacional, FURG, Rio Grande/RS.

²Doutor, Professor de Engenharia de Mecânica, FURG, Rio Grande/RS.

³Doutor, Professor de Engenharia de Computação, FURG, Rio Grande/RS.

1 INTRODUÇÃO

A Teoria Constructal, proposta na década de 1990 pelo professor Adrian Bejan da Duke University nos Estados Unidos, trouxe uma nova perspectiva sobre a origem dos diferentes padrões organizacionais observados na natureza. A Teoria Constructal é uma teoria universal da física que busca explicar os variados padrões de ramificação presentes em um amplo conjunto de sistemas, tanto animados quanto inanimados, que vão desde grandes circulações planetárias até as menores escalas. Exemplos desses padrões podem ser observados em sistemas geofísicos, como correntes oceânicas, descargas elétricas na atmosfera, bacias hidrográficas, cristais dendríticos, entre outros. Assim como, também são encontrados em sistemas biológicos, como nas nervuras de uma folha, nas copas e raízes de árvores, além dos sistemas cardiovascular, respiratório e nervoso dos animais, demonstrando a sua presença em uma vasta diversidade de sistemas vivos e não vivos (Bejan, 1996, 1997, 2020).

A Teoria Constructal trouxe uma abordagem determinística para a compreensão da evolução dos sistemas naturais, propondo que as estruturas que vemos na natureza não são o resultado do acaso, mas sim de um fenômeno universal da física. Um exemplo claro dessa ideia é o comportamento dos raios, ou descargas elétricas atmosféricas. Os raios apresentam uma estrutura ramificada que começa de forma simples, com um único ramo, e se torna mais complexa à medida que se propaga, adquirindo diversos outros ramos. A Teoria Constructal explica que esse comportamento ocorre porque as descargas elétricas dos raios seguem um princípio de busca pelos “caminhos mais fáceis”, formando estruturas que facilitam sua propagação e aumentam seus fluxos quando as resistências locais impostas pela atmosfera são evitadas (Bejan, 1996, 1997, 2020).

Devido ao seu caráter interdisciplinar, a Teoria Constructal tem sido aplicada em diversas áreas do conhecimento, abrangendo ciências naturais, médicas, engenharias, ciências sociais, econômicas, entre outras. Com o potencial para unir a biologia a física, e a Teoria Constructal vem sendo utilizada na busca de sistemas de engenharia eficientes e também para aprofundar o entendimento sobre os processos de formação das diversas estruturas observadas na natureza (Bejan, 2020; Chen, 2012).

Errera e Bejan (1998) publicaram um estudo pioneiro nesse contexto, reproduzindo os padrões observados em bacias hidrográficas. O modelo desenvolvido nesse estudo con-

siste em uma área porosa e homogênea dividida em quadrados de mesmo tamanho, formando uma grade de elementos de área. Um pequeno sumidouro é adicionado em uma das extremidades, criando uma diferença de pressão que causa um escoamento em sua direção. Para construir canais de baixa resistência que direcionam o escoamento, os pesquisadores aplicaram um algoritmo que implementava uma heurística de decisão baseada na Teoria Constructal. Essa heurística seleciona o elemento de área com o maior gradiente de pressão e aumenta sua permeabilidade, diminuindo a resistência ao escoamento. Esse processo de seleção e ajuste formou canais de baixa resistência, cujas estruturas lembram padrões ramificados semelhantes aos observados em sedimentos, demonstrando que os padrões dendríticos em bacias de drenagem fluvial podem ser deduzidos com base no princípio de minimização da resistência global imposta aos fluxos d'água, conforme previsto pela Teoria Constructal.

Xu et al. (2007) desenvolveram um modelo semelhante, aplicando um “algoritmo heurístico de construção” para construir caminhos condutivos em um dispositivo teórico de arrefecimento de pacotes eletrônicos miniaturizados. Assim como no estudo anterior, as estruturas resultantes apresentaram padrões ramificados típicos, quando o princípio de maximização do acesso aos fluxos de calor foi aplicado.

Vianna et al. (2018) também publicaram um estudo semelhante, onde um algoritmo heurístico foi utilizado para construir cavidades isotérmicas — um modelo teórico que representa a cavidade entre as aletas de dispositivos de arrefecimento. Novamente, as estruturas resultantes apresentaram padrões de ramificação.

Diversos outros estudos presentes literatura científica aplicam algoritmos de construção semelhantes, baseados na minimização das resistências globais impostas, para maximizar o acesso a fluxos de matéria, energia ou informação em sistemas específicos. Em muitos casos, as estruturas resultantes também apresentam configurações ramificadas semelhantes às encontradas na natureza, sugerindo que a perspectiva determinística proposta pela Teoria Constructal pode estar correta e reforçando a importância de estudar a evolução das estruturas de fluxo em sistemas naturais e de engenharia (Chen, 2012).

Neste estudo, assim como nos anteriormente citados, busca-se otimizar estruturas em sistemas de engenharia e compreender melhor os processos de formação dessas estruturas do ponto de vista fenomenológico. No entanto, o algoritmo desenvolvido aqui — aplicado ao modelo teórico dos caminhos condutivos — diferencia-se por considerar o tempo no

processo de formação das estruturas condutoras. O objetivo principal deste estudo é avaliar se existem diferenças entre as estruturas construídas em regime permanente e as construídas em regime transiente, investigando se a velocidade ou ritmo de formação dos sistemas influencia ou não na configuração de suas estruturas de fluxo. Este é um aspecto importante previsto pela Teoria Constructal que ainda não foi amplamente explorado na literatura científica (Bejan, 1996, 1997, 2020).

2 DESCRIÇÃO DO ESTUDO

O modelo dos caminhos condutivos representa uma abordagem teórica para resolver o problema de arrefecimento em pacotes eletrônicos miniaturizados, cuja densidade crescente tem resultado em quantidades significativas de calor interno. À medida que os métodos tradicionais de resfriamento por convecção forçada se tornam ineficazes, este modelo foca exclusivamente na condução térmica, utilizando materiais de alta condutividade, como diamante ou grafeno, para direcionar o calor gerado pelos componentes internos desses dispositivos até um ponto dissipador externo (Xu et al., 2007).

A escolha da configuração e da quantidade de material condutor a ser utilizada para construir esses caminhos de alta condutividade é um desafio de otimização, especialmente considerando as limitações de espaço nos dispositivos miniaturizados e o alto custo dos materiais envolvidos. Portanto, a avaliação das formas e estruturas para a construção de caminhos condutivos é fundamental, e tem sido uma área explorada dentro do escopo da Teoria Constructal (Xu et al., 2007).

Entretanto, o objetivo deste trabalho não é explorar todas as diferentes configurações possíveis para os caminhos condutivos ou identificar suas formas ótimas. Em vez disso, o foco é utilizar esse problema amplamente estudado na literatura científica como uma ferramenta para investigar o comportamento evolutivo das estruturas em um sistema de fluxo termodinâmico no regime transiente, levando em conta o tempo.

Na Figura 1a, está ilustrado modelo de caminhos condutivos adaptado ao problema deste estudo, onde o sólido quadrado de volume V , em m^3 , representa o volume de um pacote eletrônico miniaturizado, com largura e altura D , em m . Para simplificar, a espessura é considerada $W = 1m$, tornando o modelo bidimensional. A área total A , em m^2 , é dividida em duas regiões isotrópicas, A_l e A_h , que correspondem aos materiais de baixa e alta condutividade térmica (*low* e *high*, respectivamente). O modelo é termicamente

isolado, exceto na extremidade onde está localizado o dissipador térmico, que possui dimensão $d = 0.2D$ e mantém uma temperatura constante. O problema é descrito pela equação do calor, resolvida para ambos os materiais.

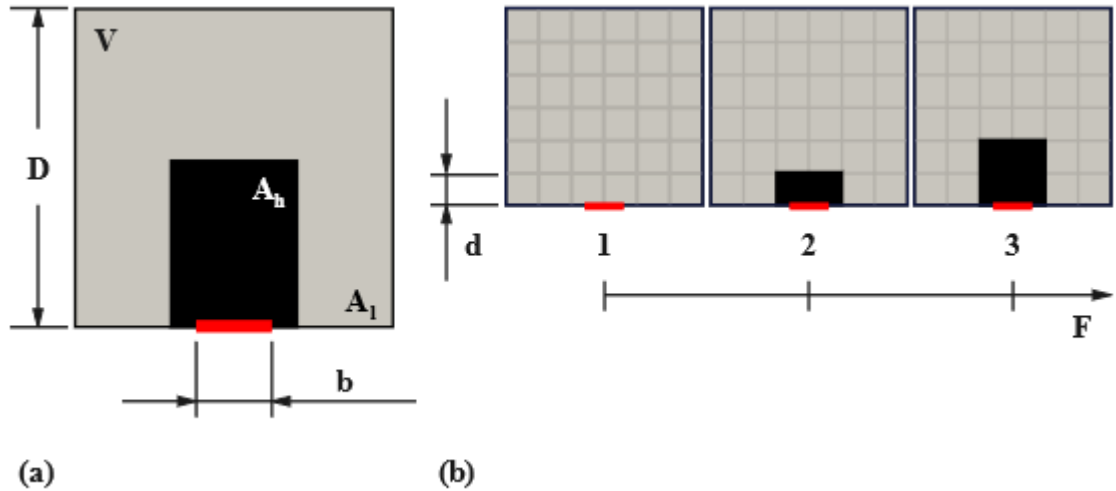


Figura 1: Descrição do problema: (a) esquema básico do modelo físico de um caminho condutivo, e (b) ilustração exemplificando o comportamento do algoritmo e da heurística de construção proposta.

As Equações 1 e 2 representam, respectivamente, o comportamento térmico do material de baixa condutividade térmica e do material de alta condutividade térmica.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_l \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{Q}{\rho_l c_l (A - A_h) W} \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_h \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

Nas Equações 1 e 2, as variáveis α , ρ e c representam, respectivamente, a difusividade térmica, a massa específica e o calor específico dos materiais, em unidades de m^2/s , kg/m^3 e J/kgK , respectivamente. As variáveis com índice l se referem ao material de baixa condutividade térmica, enquanto as com índice h se referem ao material de alta condutividade térmica, assim como A_l e A_h . A variável $T = T(x, y, t)$ representa a temperatura em K , t o tempo em segundos, e x e y são as coordenadas cartesianas em metros.

A geração de calor interna no pacote eletrônico, representada por Q em W , é considerada apenas na região de baixa condutividade térmica, conforme usual na literatura.

Além disso, é comum na literatura científica adotar modelos adimensionais para abordar problemas desse tipo. Neste estudo, as equações são adimensionalizadas, resultando nas Equações 3 e 4, correspondentes às Equações 1 e 2.

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial F} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial F} = \eta \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \frac{1}{1 - \phi} \quad (4)$$

As variáveis adimensionais usadas são: $\tilde{T} = k_l W (T - T_0) / Q$ para a temperatura, onde T_0 representa a temperatura do volume; $F = \alpha_l t / A$ para o tempo (Número de Fourier); e, $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y) / \sqrt{A}$ para as Coordenadas Cartesianas. As variáveis $\phi = A_h / A$ e $\eta = \alpha_l / \alpha_h$ representam as razões entre as áreas e as difusividades térmicas dos materiais, respectivamente.

As condições iniciais e de contorno do modelo são definidas como segue: a temperatura mínima em todo o domínio computacional ($\tilde{T}_0 = 0$ para $F = 0$, ou seja, tempo adimensional 0), uma condição de Dirichlet para o dissipador, que mantém a temperatura constante ($\tilde{T}_d = 0$, no ponto dissipador destacado em vermelho nas Figuras 1a e 1b), e a condição de Neumann para o sólido, que é sempre adiabático. A simetria do modelo garante que a construção dos caminhos condutivos será idêntica em ambos os lados.

O domínio é dividido em vários elementos de área que representam os materiais de baixa e alta condutividade térmica, conforme mostrado na Figura 1b. A resolução do modelo é definida pelo número de divisões $R \times R$ no domínio. Inicialmente, todos os elementos são de baixa condutividade térmica, e, a cada integração no tempo $\Delta F'$, dois elementos de baixa condutividade são substituídos por elementos de alta condutividade para construir o caminho condutivo simetricamente, gerando os volumes 1, 2, 3, como mostrado na Figura 1b até o final da construção.

O critério para a substituição dos materiais é baseado no maior gradiente de temperatura nas direções x ou y , seguindo no estudo de Souza e Ordonez (2013). A construção é

continua até que o valor máximo de ϕ seja atingido, completando a estrutura do caminho condutivo.

Este modelo compartilha semelhanças com os modelos de Ledezma et al. (1997), Souza e Ordonez (2013), Xu et al. (2007), Hajmohammadi e Rezaei (2019), dentre outros. O principal diferencial do presente estudo é a consideração do tempo, representado pelo Número de Fourier, o que permite a análise da evolução temporal das estruturas de fluxo e uma visão mais completa da dinâmica desses sistemas.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

A solução do modelo matemático foi implementada utilizando o OpenFOAM,⁴ v7, que é um software amplamente utilizado em Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD, do inglês *Computational Fluid Dynamics*). O solucionador, programado em C++, incorporou o algoritmo necessário para resolver o problema matemático por meio do método dos volumes finitos, implementado nas diversas rotinas da biblioteca OpenFOAM.

Para isso, foi necessário construir a geometria do modelo, realizar sua discretização em volumes finitos e exportar a malha computacional utilizada na solução. Esse processo foi conduzido com o auxílio do software Gmsh⁵, v4.

A resolução da malha computacional é definida pela discretização do domínio, que é dividido em $(R \times R)$ elementos de área para formar os caminhos condutivos. Por exemplo, para uma resolução $(R = 10)$, a malha conterá (10×10) elementos de área. Supondo que cada elemento de área seja subdividido em (16×16) volumes finitos, a malha computacional totalizará 25600 volumes finitos.

A validação do modelo foi realizada reproduzindo o estudo de Horbach et al. (2014). As diferenças percentuais obtidas entre as temperaturas adimensionais máximas e médias foram inferiores a 0.1%, indicando uma excelente concordância com os resultados reportados na literatura. Essa pequena diferença é considerada aceitável, confirmando a validade do modelo desenvolvido neste estudo.

⁴<https://openfoam.org>

⁵<https://gmsh.info>

4 RESULTADOS DE DISCUSSÕES

Neste estudo, investigou-se a formação e evolução das estruturas de fluxo em sistemas naturais dentro do contexto da Teoria Constructal, com foco em regimes transientes. O projeto dos caminhos condutivos foi utilizado como ferramenta para compreender como essas estruturas se desenvolvem ao longo do tempo. As análises envolveram a identificação de padrões e outras características relevantes que ajudam a elucidar esses processos fenomenológicos.

Antes de apresentar os resultados, é importante destacar que foram feitas algumas simplificações para facilitar as análises.

Primeiramente, dado que o foco é avaliar a formação e evolução dos caminhos condutivos em regime transiente, decidiu-se não considerar as diversas variações e combinações possíveis entre as áreas e difusividades. Essa escolha foi motivada pela necessidade de se realizar um grande número de simulações numéricas para explorar todas as variações, o que extrapolaria o escopo deste estudo. Em vez disso, optou-se por valores pré-definidos para essas variáveis, sendo $\phi = 0.1$ e $\eta = 10$. Esses valores são amplamente utilizados em estudos sobre a otimização de caminhos condutivos (Souza e Ordóñez, 2013).

Além disso, foi necessário definir a resolução utilizada para a largura e altura da área do modelo matemático. Como este estudo é uma análise preliminar, escolheu-se uma única resolução de $R = 40$, ou seja, 40×40 elementos de área. Cada elemento de área foi subdividido em 8×8 volumes finitos, resultando em uma malha computacional com um total de 102400 volumes finitos. Essas escolhas foram fundamentais para viabilizar a análise proposta.

Também foi necessário definir os valores a serem utilizados para o intervalo de tempo de construção $\Delta F'$. Optou-se por escolher valores múltiplos do intervalo de tempo de integração ΔF (passo de tempo), incrementados em múltiplos de dez unidades. Diversos testes foram realizados para determinar o valor adequado para ΔF , que foi fixado em $\Delta F = 0.00001$. Esse valor é independente do modelo computacional, não influenciando nos resultados nem no tamanho dos volumes finitos.

Vale ressaltar que, devido à natureza da modelagem numérica, não é possível avaliar o modelo em um intervalo de tempo infinito ($\Delta F' \rightarrow \infty$). Na prática, para obter resultados em regime permanente e compará-los com o regime transiente, a avaliação foi realizada até um valor máximo para $\Delta F'$, cujo resultado é equivalente ao regime permanente. Após

analisar os resultados de várias simulações, determinou-se que o valor de $\Delta F'$ que produz um resultado equivalente ao regime permanente é $\Delta F' = 0.1$, para $\phi = 0.1$ e $\eta = 10$.

Com todas as considerações definidas, na Tabela 1 são apresentados os resultados das temperaturas máximas e médias ($\tilde{T}_{m\acute{a}x}$ e $\tilde{T}_{m\acute{e}d}$) em função dos intervalos de formação ($\Delta F'$) dos caminhos condutivos.

Além disso, nas Figuras 2 e 3 são mostrados gráficos que relacionam os resultados apresentados na Tabela 1, assim como as diferentes estruturas que foram construídas durante as simulações numéricas.

Tabela 1: Resultados das temperaturas máximas e médias ($\tilde{T}_{m\acute{a}x}$ e $\tilde{T}_{m\acute{e}d}$) em função dos intervalos de formação ($\Delta F'$) dos caminhos condutivos construídos.

$\Delta F'$	$\tilde{T}_{m\acute{a}x}$	$\tilde{T}_{m\acute{e}d}$
0.00001	0.41186	0.25734
0.00010	0.36550	0.22225
0.00020	0.35962	0.21848
0.00050	0.34625	0.21148
0.00130	0.33183	0.20665
0.00450	0.30765	0.20259

A análise dos resultados apresentados na Figura 3 revela como as estruturas se modificam ao longo do tempo. Nessa figura, são mostrados as estruturas construídas e os respectivos campos de temperatura, da esquerda para a direita, sempre que há uma mudança significativa na configuração. É possível observar que ocorrem seis variações de forma até que $\Delta F'$ atinja o regime permanente, sendo a sexta forma associada a esse regime.

A Figura 3 mostra que o passo de tempo de construção influencia diretamente a formação das estruturas dos caminhos condutivos, bem como nas temperaturas finais alcançadas. À medida que o valor de $\Delta F'$ aumenta, as estruturas tendem a se ramificar menos e a se aproximar das estruturas observadas em regime permanente. Estruturas formadas com passos de construção maiores ocupam uma área maior no sentido vertical, assumindo uma forma semelhante a um “I”, com maior eficiência em termos de temperaturas máximas e médias, conforme mostrado no gráfico da Figura 2. Em contraste, passos de construção menores geram estruturas mais ramificadas e com menor eficiência térmica, que se espalham melhor pelo volume.

A comparação das estruturas formadas durante o regime transiente com aquelas formadas no regime permanente evidencia que o regime transiente tende a produzir caminhos condutivos mais complexos e com maior ramificação, especialmente nos primeiros estágios de formação. Essa complexidade, embora aumente o acesso dos fluxos, também introduz imperfeições locais que podem comprometer a eficiência térmica.

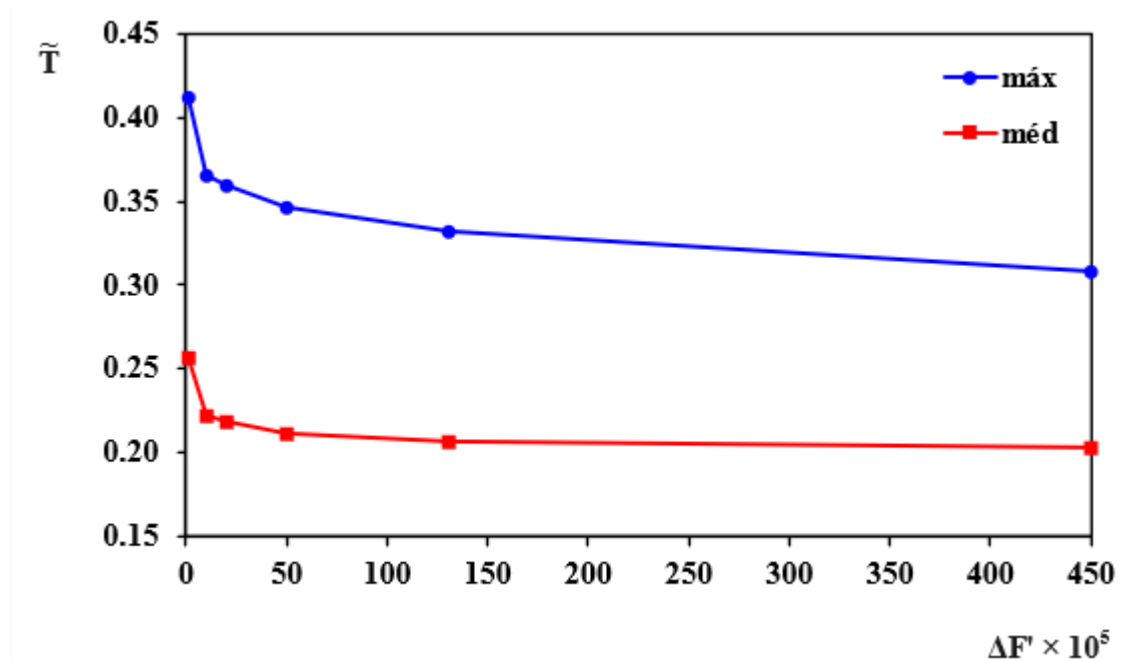


Figura 2: Gráfico das temperaturas máximas e médias ($\tilde{T}_{máx}$ e $\tilde{T}_{méd}$) em função dos intervalos de formação ($\Delta F'$) dos caminhos condutivos.

Adicionalmente, os resultados também sugerem que o regime transiente permite uma maior adaptabilidade das estruturas às mudanças rápidas no ambiente, o que pode ser vantajoso em sistemas naturais onde as condições são dinâmicas e imprevisíveis. Contudo, do ponto de vista da engenharia, onde a simplicidade e a eficiência são frequentemente prioritárias, a tendência de formar estruturas mais complexas e ramificadas pode não ser desejável. Neste contexto, os passos de construção maiores, que resultam em estruturas mais simples e eficientes, podem ser preferíveis para aplicações práticas.

Essa diferença entre sistemas naturais e sistemas de engenharia reflete a distinta natureza dos objetivos e restrições em cada contexto. Nos sistemas naturais, a capacidade de adaptação rápida a mudanças no ambiente é uma característica evolutiva essencial. As estruturas que surgem em regime transiente, com sua complexidade e ramificação, são

exemplos de como a natureza equilibra eficiência e resiliência diante de variáveis imprevisíveis, como flutuações de temperatura, pressão, ou disponibilidade de recursos. Essa complexidade permite que os sistemas naturais maximizem o acesso aos fluxos, mesmo em ambientes em constante mutação.

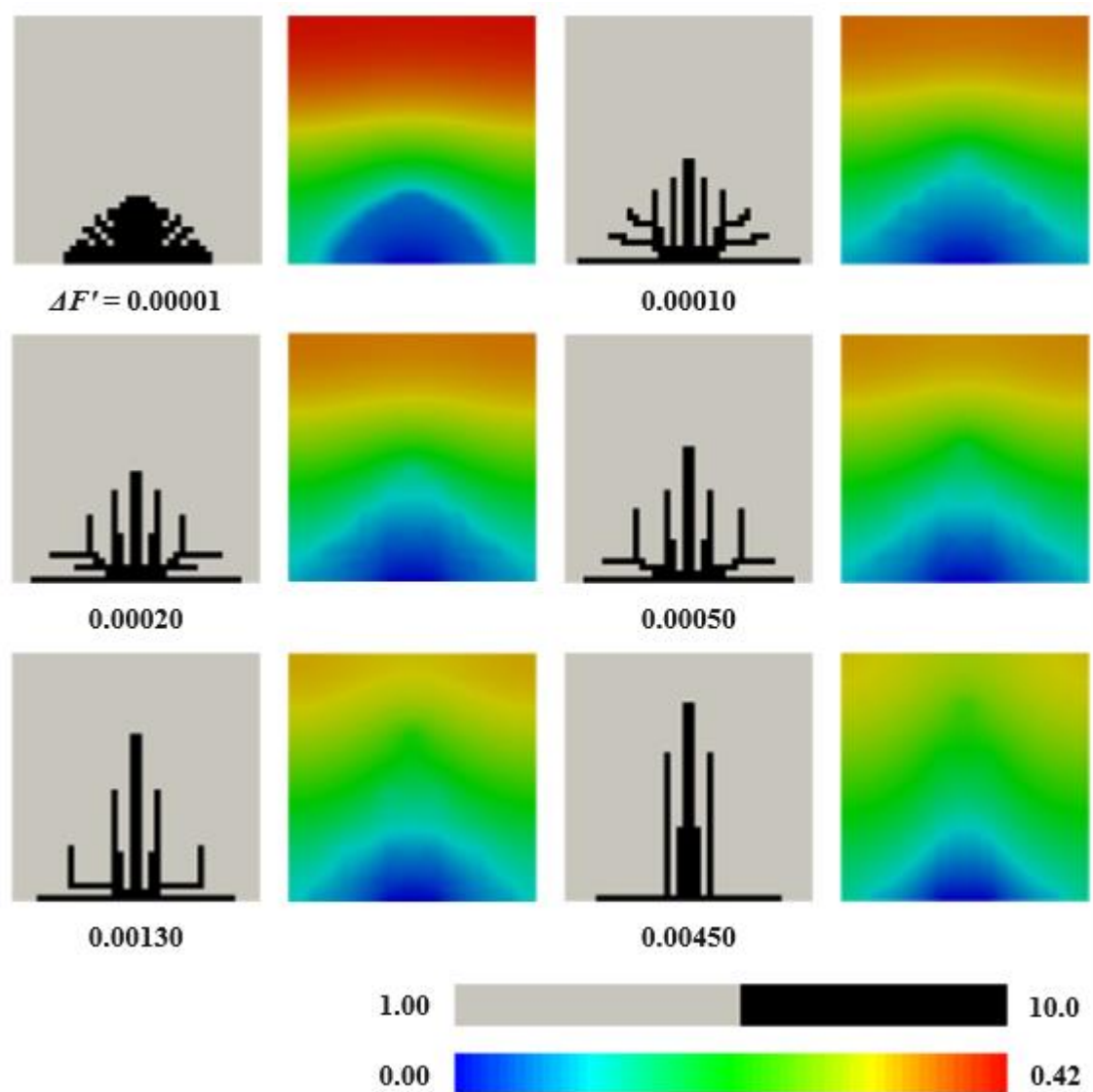


Figura 3: Estruturas construídas para os caminhos condutivos.

Em contraste, os sistemas de engenharia são geralmente projetados para operar em condições controladas e previsíveis, onde a eficiência e a simplicidade de operação são cruciais. A tendência de minimizar imperfeições e complexidade em prol de um desempenho otimizado significa que as estruturas ramificadas, características dos regimes transientes, podem ser vistas como desvantajosas. Em aplicações de engenharia, estruturas

mais simples, resultantes dos passos de construção maiores, são preferíveis, pois oferecem maior previsibilidade, facilidade de manutenção e menor custo de produção. Assim, enquanto a natureza valoriza a complexidade como um meio de sobrevivência e adaptabilidade, a engenharia busca o equilíbrio entre eficiência e simplicidade para alcançar soluções práticas e economicamente viáveis.

Em resumo, os resultados sugerem que os intervalos de construção ($\Delta F'$) têm um impacto significativo nas características e na eficiência dos caminhos condutivos formados. Passos de construção maiores resultam em estruturas mais eficientes em termos de temperaturas máximas e médias, enquanto passos menores levam a estruturas mais distribuídas e ramificadas, mais próximas das observadas na natureza.

5 CONCLUSÕES

As simulações realizadas demonstraram que o regime transiente tem um impacto direto na evolução das estruturas dos caminhos condutivos e, conseqüentemente, nos resultados das temperaturas máximas e médias associadas a esses caminhos.

Do ponto de vista do fenômeno evolutivo, observou-se que a ramificação das estruturas se intensifica à medida que a velocidade de formação aumenta (i.e., quando $\Delta F'$ é menor). Isso pode ser explicado pela dinâmica do sistema físico: quanto mais rápido o sistema evolui, mais suas estruturas tendem a se ramificar para maximizar a eficiência e melhorar o acesso dos fluxos. Em contraste, em condições próximas ao regime permanente, ou quando o passo de construção se aproxima desse regime, as estruturas tendem a ser menos ramificadas e apresentam menos imperfeições locais.

No que diz respeito à otimização, as estruturas formadas em regime permanente demonstraram ser mais eficientes do que aquelas desenvolvidas em regime transiente. Isso pode estar relacionado às imperfeições locais e ao maior espalhamento das estruturas quando formadas em regime transiente.

A principal conclusão e recomendação deste trabalho é que, ao estudar a formação de estruturas de fluxo, o regime transiente deve sempre ser considerado tanto no modelo quanto no algoritmo heurístico de construção. O regime transiente tende a gerar estruturas ramificadas que se assemelham às observadas na natureza. No entanto, do ponto de vista da engenharia e da otimização, é crucial ponderar se é viável reproduzir as complexidades da natureza em sistemas artificiais, levando em conta até mesmo as imperfeições. Em contextos de engenharia, pode ser mais vantajoso buscar um ponto de equilíbrio, onde a

otimização do sistema seja alcançada com uma configuração estrutural que permaneça simples, de fácil implementação em sistemas reais, e com baixo custo de produção.

AGRADECIMENTO

O presente trabalho foi realizado com os apoios da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico).

REFERÊNCIAS

Bejan, A. (1996). Street network theory of organization in nature. *Journal of Advanced Transportation*, 30(2), 85–107.
<https://doi.org/10.1002/atr.5670300207>

Bejan, A. (1997). Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(4), 799–816.
[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(96\)00175-5](https://doi.org/10.1016/0017-9310(96)00175-5)

Bejan, A. (2020). *Freedom and evolution: Hierarchy in nature, society and science* (1st ed.). Springer Nature.

Chen, L. (2012). Progress in study on constructal theory and its applications. *Science China Technological Sciences*, 55(3), 802–820.
<https://doi.org/10.1007/s11431-011-4701-9>

Errera, M. R., & Bejan, A. (1998). Deterministic tree networks for river drainage basins. *Fractals*, 6(3), 245–261.
<https://doi.org/10.1142/S0218348X98000298>

Ledezma, G. A., Bejan, A., & Errera, M. R. (1997). Constructal tree networks for heat transfer. *Journal of Applied Physics*, 82(1), 89–100.
<https://doi.org/10.1063/1.365853>

Souza, J. A., & Ordóñez, J. C. (2013). Constructal design of high-conductivity inserts. In A. Bejan & S. Lorente (Eds.), *Constructal law and the unifying principle of design* (pp. 91–111). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5049-8_6

Vianna, J. C. B., et al. (2018). A new constructal theory based algorithm applied to thermal problems. *International Journal of Thermal Sciences*, 126, 118–124.
<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2017.12.023>

Hajmohammadi, M. R., & Rezaei, E. (2019). Proposing a new algorithm for the optimization of conduction pathways based on a recursive localization. *Applied Thermal Engineering*, 151, 146–153.

<https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2019.01.109>

Horbach, C. S., Vianna, J. C. B., & Alves, P. S. (2014). Constructal design of Y-shaped conductive pathways for cooling a heat-generating body. *Defect and Diffusion Forum*, 348, 245–260.

<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/DDF.348.245>

Xu, X., et al. (2007). Optimization of heat conduction using combinatorial optimization algorithms. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50(9-10), 1675–1682.

<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2006.10.037>