

Um outro olhar para o desenvolvimento do Binômio de Newton

Luis Havelange Soares¹, Maxwell Aires da Silva²

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, Campina Grande, Paraíba
EMEF Maria das Vitorias Pires Uchoa Queiroz, Campina Grande, PB

Resumo. Todo professor de matemática comprometido com o processo de ensino e de aprendizagem busca, para cada objeto de estudo a ser ensinado, um conjunto de possibilidades de representações, tendo em vista, as recomendações já consensuais das pesquisas sobre aprendizagem, que indicam melhores resultados quando o processo de ensino de um tema é feito a partir de diferentes espectros representativos. Nesse texto apresentamos os resultados de uma investigação nascida da motivação de determinar um processo de desenvolvimento para o binômio de Newton que fosse diferente daquele que é apresentado nos livros de Matemática. A proposta construída, extraída de Santos [6], relaciona a aritmética e a álgebra na exploração do binômio, tem base no conceito de recorrência linear de primeira ordem. Tal perspectiva, do ponto de vista do ensino, é caracterizada como uma transposição didática, tendo em vista que transforma um saber científico (binômio de Newton), num saber a ser ensinado, visando à facilitação da construção conceitual pelo aluno. Dentre os fatores relevantes desse estudo, destacamos a não dependência da análise combinatória no desenvolvimento do binômio, a possibilidade de estudo por estudantes dos anos finais do ensino fundamental e a compreensão por parte do professor da necessidade de um olhar reflexivo para os conteúdos matemáticos buscando perspectivas metodológicas diferentes daquelas já expostas nos livros.

Palavras-chave. Transposição Didática; Binômio de Newton; Recorrência.

1 Introdução

O binômio de Newton é um conteúdo da Matemática possuidor de um conjunto de especificidades que o demarcam com significativa relevância, uma vez que está na interseção de alguns temas da Matemática, que parecem completamente dissociados, como as potências de expressões algébricas, a análise combinatória e o triângulo de Pascal. Além disso, serve de base para o estudo de diversas áreas da Matemática, como no estudo dos “produtos notáveis”, dos números complexos, do cálculo diferencial e integral e, também, no estudo de séries.

Para quem não lidam cotidianamente com o conhecimento matemático, os elos entre o binômio de Newton e a análise combinatória podem levar a uma inquietude delineada a partir de perguntas da seguinte natureza: Como pode que no desenvolvimento de uma potência de uma adição/ (ou subtração), ou seja, potências da forma $(a \pm b)^n$, haja uma ordem demarcada com números calculados através da análise combinatória, através de combinações simples? Como é possível que os números binomiais, arranjados numa estrutura triangular, possam conter os coeficientes de qualquer potência da forma $(a + b)^n$?

Estudamos na educação básica, desde os anos iniciais do ensino fundamental II, que o desenvolvimento de uma potência se dá a partir das multiplicações sucessivas de uma mesma base. Essa concepção de potenciação apresenta limitações quando adentrarmos em potências com expoentes

¹luis.soares@ifpb.edu.br

²maxwell.matematico@gmail.com

não inteiros. No entanto, entendemos que, para explorações matemáticas que se inserem no contexto da educação básica, ela possui um apelo didático relevante no estudo dessa operação. Daí, ao desenvolvermos as potências do binômio $(a + b)^n$, fazendo o expoente variar nos números naturais, tem-se (Figura 1):

Figura 1: Binômio de Newton

$$\begin{aligned}
 n = 0 &\rightarrow (a + b)^0 = 1 \\
 n = 1 &\rightarrow (a + b)^1 = a + b \\
 n = 2 &\rightarrow (a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2 \\
 n = 3 &\rightarrow (a + b)^3 = (a + b)^2 \cdot (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 n = 4 &\rightarrow (a + b)^4 = (a + b)^3 \cdot (a + b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
 &\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots
 \end{aligned}$$

Fonte: Elaborada pelos autores

Esse modo de desenvolver tais potências, com essa representatividade genérica, deve ser precedido, nas aulas de Matemática, de explorações aritméticas para que sejam construídas as bases compreensivas do processo dedutivo posterior, e após as explorações numéricas as incógnitas podem ser inseridas nos binômios para então, a partir de um processo dedutivo, pode-se constatar que nos coeficientes dos desenvolvimentos dessas potências surgem os números binomiais.

Figura 2: Triângulo de Pascal: (A) Coeficientes binomiais; (B) Representação binomial.

(A) $ \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ & 1 & 3 & & 3 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} $	(B) $ \begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\ & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} $
---	--

Fonte: Elaborada pelos autores

O fato do desenvolvimento geral do binômio depender das combinações simples, que é um tópico inserido no contexto da análise combinatória, sempre nos inquietou. Daí, a origem da seguinte indagação: É possível desenvolver um binômio da forma $(a + b)^n$ sem que se utilize o conhecimento de números binomiais e sem fazer uso da multiplicação sucessiva do fator $(a + b)$?

Nesse texto, fazemos uso de uma ferramenta da didática da Matemática - a **transposição didática**, numa proposta de desenvolvimento (que tem consequências diretas para o ensino) do binômio de Newton sem a dependência do conteúdo de análise combinatória. Com essa transposição didática objetiva-se oportunizar aos discentes do ensino médio, como também aos alunos dos

anos finais do ensino fundamental, um processo de desenvolvimento do binômio, distinto daqueles constantes até então nos textos de Matemática. Essa perspectiva abre possibilidades para outras interpretações do desenvolvimento binomial favorecendo, inclusive a exploração de situações contextualizadas inerentes ao tema em estudo.

Transposição didática, segundo D'amore [3] (2007, p.225), é uma forma de “adaptação do conhecimento matemático para transformá-lo em ‘conhecimento para ser ensinado’”. Ou seja, fazer uma transposição didática é tomar um conteúdo a ser ensinado em uma determinada turma e, conhecendo seus alunos, adaptá-lo para que estes consigam construí-lo, compreendê-lo. Em outras palavras, é possibilitar a exploração do conceito a partir de representações e linguagem adequadas, com definições e exemplos apropriados para que o processo de ensino e aprendizagem seja realizado de maneira efetiva e eficaz.

2 A Epistemologia de um Binômio

A superficialidade epistemológica com que se estudam os temas da Matemática na educação básica, se avançando apenas em especificidades aritméticas, algébricas e geométricas que constituem os objetos matemáticos, impede que façamos reflexões significativas sobre a construção histórica de cada conceito e, assim, passamos a identificá-lo, nomeá-lo, rotulá-lo como sendo uma construção ou ideia, unicamente de algum sujeito, que em algum momento da história contribuiu para o seu desenvolvimento.

Um dos exemplos mais marcantes desse fato, para quem já teve vivência como docente de Matemática, diz respeito ao caso do “Teorema de Pitágoras”, que quando questionamos os discentes sobre o teorema ser mesmo de Pitágoras, vemos o semblante de espanto, de “estranheza”, de perplexidade dos alunos. É como se aquele objeto matemático em estudo houvesse sido concebido, criado, se constituído, apenas a partir (ou por intermédio) daquele sujeito que lhe dá nome.

É assim também o caso do “Binômio de Newton”. Muitas pessoas, até àquelas inseridas no contexto do estudo da Matemática - alunos e mesmo professores, têm um entendimento desse tema associado a apenas os estudos de Newton, como se o processo de construção desse conhecimento tivesse começado com ele. Desse modo, desconsidera-se uma trajetória epistemológica rica de construção e desenvolvimento matemático, deixam-se à margem muitas outras pessoas e povos que também foram significativos no percurso evolutivo do conhecimento desse tema.

É necessário lembrar que a Matemática ao longo da história nunca se formatou de forma instantânea, e sim sempre foi moldada aos pedaços, com diversas colaborações de grandes matemáticos. Assim foi com as equações algébricas, geometria analítica, o cálculo, etc. Dessa forma devemos citar alguns pedaços dessa composição elegante da álgebra, a qual chamamos de Binômio de Newton (Tognato II, 2013, p.4). [5]

O que hoje chamamos de “Binômio de Newton”, por muito tempo foi tratado como “Teorema Binomial”, que era conhecido pelo menos desde o século IV a.C., quando Euclides apresentou o caso especial do teorema para potências de segunda ordem (Coolidge, 2017) [2]. Há registros também, de acordo com Boyer (2012) [1], de estudos do teorema na Índia, por volta dos séculos XII e XIII e na China, no século XIII. Para mais detalhes acerca dessa discussão, veja Santos [6].

3 Uma transposição didática para o Binômio de Newton

Apresentar o Binômio de Newton, com o seu desenvolvimento completo, para turmas dos anos finais do Ensino Fundamental, que têm nos conteúdos curriculares o estudo dos produtos notáveis, tais como $(x \pm y)^2$ e $(x \pm y)^3$, possivelmente seria uma decepção do ponto de vista didático.

É necessário entender que cada turma e cada etapa da vida escolar do aluno têm seus próprios desafios, com currículos previamente definidos. Mas, é pertinente que se pense esse currículo de modo holístico, buscando-se as relações entre conteúdos e combatendo a ideia de cadeia linear de conhecimentos que não dialogam. Nessa perspectiva, em cada etapa da formação educativa, convém construir conceitos que não estejam previstos nas definições curriculares, desde que apresentem relações afins com os temas daquela etapa.

Explorar o desenvolvimento de potências da forma $(x \pm y)^n$ em que $n \in \mathbb{N}$, a partir do teorema binomial apresentado nos textos de Matemática da educação básica, não é uma tarefa fácil, quando os estudantes não possuem saberes prévios relativos à análise combinatória. Um conteúdo a ser ministrado em uma turma, qualquer que seja, precisa ser adaptado ao seu público alvo, ou seja, ao seu alunado. Baseado nessa ideia lança-se a pergunta: É possível fazer uma transposição didática, isto é, uma adaptação no conteúdo binômio de Newton para que este possa ser ministrado em turmas dos anos finais do ensino fundamental, que não estudaram análise combinatória?

Respondemos a essa pergunta com um enfático sim. O objetivo desse artigo é justamente desenvolver essa *transposição didática* a fim de justificar nossa afirmação e apresentar uma proposta de abordagem desse conteúdo, o binômio de Newton, distinta do que consta em todos os textos didáticos de Matemática.

Estamos enfatizando a possibilidade de exploração em turmas dos anos finais do ensino fundamental por entendermos ser desnecessário argumentar a importância dessa transposição para turmas do ensino médio. Conforme sabemos de Duval (2011) [4], quanto mais possibilidades de representação de um objeto matemático, maiores serão as possibilidades de aprendizagem. Nesse sentido, outra forma de explorar o binômio trará contribuições relevantes para o estudo desse tema em turmas do ensino médio.

O desenvolvimento do binômio de Newton, de acordo com os textos de Matemática, exige do estudante o conhecimento de conceitos próprios da análise combinatória, que são *fatorial* e *número binomial*. Vamos apresentá-los a seguir, de maneira breve e, na sequência expomos uma transposição didática visando a não exigência desses conhecimentos para o desenvolvimento do binômio.

Definição 3.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$, define-se o **fatorial** de n , denotado por $n!$, pelas seguintes igualdades:*

$$0! = 1! = 1, \quad e \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Além disso, tem-se a relação fundamental:

$$n! = n \cdot (n-1)!.$$

Definição 3.2. *Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, com $k \leq n$. Define-se o **número binomial** por*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Esses dois conceitos, associados a algumas propriedades que lhes são derivadas, são a base de todos os desenvolvimentos dos binômios da forma $(x+y)^n$. Com isso, apresenta-se e demonstra-se, o seguinte teorema:

Teorema 3.1 (Teorema Binomial). *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Então,*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Essa é a maneira de desenvolver o binômio $(x + y)^n$ que é apresentada nos livros de Matemática. Ela depende dos conhecimentos de números binomiais. Dessa forma, fica inviável explorar o binômio numa sala de aula caso os discentes não possuam esses conhecimentos prévios. É a partir do desejo de apresentar uma forma de explorar o binômio, que não dependa dos saberes da análise combinatória, que propomos uma transposição didática, nesse caso, caracterizada como uma transposição dentro do âmbito do próprio conhecimento matemático.

No desenvolvimento que propomos, utilizamos o conceito de Recorrências Lineares, que são técnicas matemáticas que nos permitem construir sequências numéricas, desde que se tenham algumas ferramentas para tal. Nesse caso, para que exista uma relação de recorrência é necessário conhecer:

- (1) O primeiro termo da sequência;
- (2) Uma regra, ou lei de formação, que permite calcular o termo seguinte da sequência a partir do antecessor.

As recorrências são instrumentos importantes na resolução de problemas, e quando utilizadas em situações apropriadas e da maneira correta, podem facilitar os processos algébricos e aritméticos envolvidos. Utilizamos como base o conceito de “Recorrência linear de primeira ordem”, que é uma sequência de números reais em que um termo da sequência é dado e, para que se descubra um termo de ordem i , é necessário que se saiba o termo anterior, o qual é apresentado por meio de uma lei de formação.

O desenvolvimento do Binômio que será apresentado é feito de maneira construtiva seguindo a ideia de uma recorrência, ou seja, conhecendo o primeiro termo e a lei de formação, podemos determinar todos os demais termos. É importante salientar que a sequência que vamos construir é a sequência dos coeficientes do desenvolvimento do Binômio. Para isso, notemos o seguinte:

$$(x \pm y)^n = [(1 \cdot x) \pm (1 \cdot y)]^n$$

e como $1^n = 1$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, segue que o primeiro termo da sequência é $\alpha_0 = 1$.

Agora que obtivemos o primeiro termo, para determinar os demais, é necessária uma lei de formação (1) que nos permita determinar, a partir de α_0 os demais termos, que são $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. e desenvolver o binômio.

Teorema 3.2. *Se $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha_0 = 1$. então o desenvolvimento do binômio $(x + y)^n$ é dado por*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^{n-k} y^k = x^n + \alpha_1 \cdot x^{n-1} \cdot y + \alpha_2 \cdot x^{n-2} \cdot y^2 + \dots + \alpha_n y^n,$$

em que cada α_k é determinado por

$$\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k \cdot (n - k)}{k + 1}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (1)$$

Precisamos mostrar a veracidade apenas da equação (1), uma vez que ela determina os coeficientes do binômio. Vamos apresentar duas maneiras de demonstrar esse resultado, uma usando o método de indução finita e uma segunda resolvendo a recorrência linear e mostrando que a solução da recorrência é, exatamente, o número binomial, ou seja,

$$\alpha_k = \binom{n}{k}.$$

Contudo, neste momento faz-se necessário explicar, em outras palavras, como é obtido o termo seguinte da sequência conhecendo-se o anterior. O teorema nos afirma que:

$$\alpha_{k+1} = \frac{\alpha_k \cdot (n - k)}{k + 1}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Note que α_{k+1} é o **termo a ser obtido**, enquanto que α_k é o **termo anterior da sequência**. Além disso, $n - k$ é, exatamente, o **expoente do x** e por fim, o termo no denominador $k + 1$ é o **número de termos da sequência**. Desse modo, podemos escrever:

$$\alpha_k = \frac{(\text{coeficiente do termo de ordem } k) \cdot (\text{número que é expoente do } x)}{\text{número de termos}}$$

Feita a afirmação e a explicação, passemos à demonstração.

Demonstração. Para a prova desse resultado, basta resolver a recorrência linear de primeira ordem apresentada no resultado, ou seja, determinar em função de k quem seria o α_k . A recorrência nos diz o seguinte:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 \\ \alpha_{k+1} &= \frac{\alpha_k \cdot (n - k)}{k + 1} \end{aligned}$$

Substituindo os valores de k , obtém-se as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\alpha_0 \cdot n}{1} \\ \alpha_2 &= \frac{\alpha_1 \cdot (n - 1)}{2} \\ \alpha_3 &= \frac{\alpha_2 \cdot (n - 2)}{3} \\ \vdots &= \vdots \\ \alpha_k &= \frac{\alpha_{k-1} \cdot (n - k + 1)}{k}. \end{aligned}$$

Agora, multiplicando essas k igualdades, obtém-se:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_k = \frac{\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_{k-1} \cdot n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1)}{k!}$$

Fazendo as simplificações convenientes, ficamos com:

$$\alpha_k = \frac{\alpha_0 \cdot n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1)}{k!};$$

Por fim, perceba que

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1)}{k!} \\ &= \frac{n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1) \cdot (n - k)!}{k!(n - k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n - k)!} \\ &= \binom{n}{k}, \end{aligned}$$

e isto prova o resultado, pois a solução da recorrência é, exatamente, o *número binomial*. Logo, o resultado é válido.

Com esse resultado, para desenvolvermos, por exemplo, o binômio $(x + y)^5$ fazemos:

$$\begin{aligned}(x + y)^5 &= x^5y^0 + \frac{1 \cdot 5}{1}x^4y^1 + \frac{5 \cdot 4}{2}x^3y^2 + \frac{10 \cdot 3}{3}x^2y^3 + \frac{10 \cdot 2}{4}x^1y^4 + \frac{5 \cdot 1}{5}x^0y^5 \\ &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.\end{aligned}$$

Vejamos mais um exemplo, o desenvolvimento de $(x + y)^8$.

$$\begin{aligned}(x + y)^8 &= x^8y^0 + \frac{1 \cdot 8}{1}x^7y^1 + \frac{8 \cdot 7}{2}x^6y^2 + \frac{28 \cdot 6}{3}x^5y^3 + \frac{56 \cdot 5}{4}x^4y^4 \\ &+ \frac{70 \cdot 4}{5}x^3y^5 + \frac{56 \cdot 3}{6}x^2y^6 + \frac{28 \cdot 2}{7}x^1y^7 + y^8 \\ &= x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8x^1y^7 + y^8.\end{aligned}$$

4 Considerações Finais

O teorema que demonstramos, indicando outra forma de desenvolver potências de binômios, possui substancial relevância no que concerne a, pelo menos, dois aspectos. No contexto do ensino de Matemática há que se ressaltar a importância desse resultado tendo em vista possibilitar o estudo (exploração, desenvolvimento, análise de propriedades, conjecturas) de binômios desde os anos finais do ensino fundamental, como no caso dos “produtos notáveis” de potências de segunda e terceira ordem.

O que apresentamos é mais uma maneira de desenvolver tais potências, pois compreendemos a importância das diferentes formas de exploração (desenvolvimento) do objeto matemático. Cada caminho fará uso de um processo de transposição didática que deve ter como objetivo maior a construção conceitual por parte do aluno. Essa transposição pode ocorrer em diferentes perspectivas, seja no campo da representatividade, da simbologia, da linguagem, dentre outros.

Referências

- [1] Uta Caecilia Merzabach Carl Benjamim Boyer. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Blucher, 2012.
- [2] Julian Lowell Coolidge. “The Story of the Binomial Theorem”. Em: **The American Mathematical Monthly** 56 (1949), pp. 147–157.
- [3] Bruno Damore. **Elementos de didática da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.
- [4] Raymond Duval. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. São Paulo: PROEM, 2011.
- [5] José Osvaldo Tognato II. **O binômio de Newton**. Curitiba: Trabalho de Conclusão de Curso(Artigo). Departamento de Matemática - UFPR., 2013.
- [6] José Jorge Casimiro dos Santos Rômulo Tonyathy da Silva Manguiera. **Educação Matemática como Subversão**. Porto Alegre: Livrológica, 2024.