

O TEOREMA ESPECTRAL

Emilly Giovana Torquato¹, Lilian Cordeiro Brambila²

RESUMO: O presente trabalho tem como objetivo entender o Teorema Espectral. Esse resultado, amplamente reconhecido e tratado em cursos tradicionais de Álgebra Linear, estabelece que a classe de operadores lineares autoadjuntos é diagonalizável. Isso implica que, dado um operador linear autoadjunto definido em um espaço vetorial real ou complexo de dimensão finita com produto interno, é possível determinar uma base de autovetores para esse espaço. Além disso, o Teorema assegura que essa base de autovetores pode ser escolhida de forma ortonormal. Para atingir esse propósito, foi realizada uma revisão bibliográfica da literatura disponível, com o objetivo de identificar os principais conceitos necessários para compreender o resultado central deste trabalho. Nesse contexto, foi desenvolvido o estudo do conceito de espaço vetorial, apresentando algumas de suas propriedades essenciais, bem como o conceito de transformações lineares, que são funções cujos domínio e contradomínio são espaços vetoriais, de modo que as operações que definem suas estruturas de espaços vetoriais são preservadas por essas funções. Tais funções desempenham um papel crucial neste trabalho, uma vez que operadores lineares são transformações lineares cujos domínio e contradomínio coincidem. Outros conceitos relevantes que surgem ao longo do estudo são os de subespaço vetorial, base, dimensão, matrizes de transformações lineares, autovalores e autovetores. Por fim, foram analisados alguns tipos específicos de operadores lineares, dentre os quais os operadores lineares autoadjuntos. Com base na literatura consultada, identificou-se quais são os fundamentos indispensáveis para compreender a diagonalização desses operadores.

Palavras-chave: Operadores lineares, Autovalores e autovetores, Diagonalização.

1 INTRODUÇÃO

Um dos conceitos mais importantes estudados em Álgebra Linear é o de diagonalização. Isto é, dado um operador linear $T : V \rightarrow V$ definido em um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita V ($\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado), dizemos que T é diagonalizável, se V admite uma base de autovetores de T . Uma pergunta natural que surge é a seguinte: sob quais hipóteses é possível diagonalizar operadores lineares? Uma das respostas apresentada na literatura é o Teorema Espectral, que é o objetivo e tema central desse trabalho que tem o seguinte enunciado:

Teorema 1. *Seja V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita. Se $T \in L(V)$ é auto-adjunto, então existe uma base ortonormal de V cujos vetores são autovetores de T .*

O Teorema Espectral fornece uma base teórica sólida para o estudo de operadores lineares, sendo de extrema importância, especialmente em sistemas físicos e matemáticos complexos. Como consequência do Teorema Espectral, a diagonalização de matrizes simétricas, por exemplo, facilita cálculos como

¹  Licenciatura em Matemática; ✉ emillygiovana@alunos.utfpr.edu.br.

²  Departamento de Matemática; ✉ lilianc@utfpr.edu.br.

determinantes e potências dessas matrizes, além de simplificar o estudo de formas quadráticas envolvendo autovalores e matrizes simétricas. Esses conceitos têm ampla aplicação em diversas áreas da matemática, como a utilização de exponencial de matrizes na resolução de sistemas de equações diferenciais, e no estudo de sistemas dinâmicos, tornando o teorema essencial para o desenvolvimento de técnicas avançadas de análise e modelagem.

2 METODOLOGIA

Para que se consiga entender o Teorema Espectral a metodologia adotada foi de caráter teórico e investigativo, iniciando com uma revisão bibliográfica da literatura para constituir uma base conceitual sólida e embasar as análises subsequentes. Em particular foram utilizadas as referências (COELHO, 2020), (ELON, 2014), (HOFFMAN; KUNZE, 1973) e (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987) bem como seminários semanais, com o intuito de entender os principais pré-requisitos necessários para compreender o resultado principal deste trabalho.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Espaços Vetoriais

Definição 1. Um conjunto não vazio V é chamado **espaço vetorial** sobre um corpo $\mathbb{K}$ se estiverem definidas operações de adição e multiplicação por escalar para cada $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} +: V \times V &\rightarrow V & e & \cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V \\ (v_1, v_2) &\mapsto v_1 + v_2 & (\alpha, v_1) &\mapsto \alpha \cdot v_1 \end{aligned}$$

que satisfazem os seguintes axiomas, para cada $v_1, v_2, v_3 \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

A1) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ (comutativa da soma);

A2) $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ (associativa da soma);

A3) $0 + v_1 = v_1, \forall v_1 \in V$ (elemento neutro da soma);

A4) $\forall v_1 \in V, \exists -v_1 \in V$ tal que $v_1 + (-v_1) = 0$ (elemento oposto);

M1) $(\alpha\beta) \cdot v_1 = \alpha \cdot (\beta \cdot v_1)$ (associativa da multiplicação);

M2) $1 \cdot v_1 = v_1$ (elemento neutro da multiplicação);

D1) $\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2$ (distributiva de vetores);

D2) $(\alpha + \beta) \cdot v_1 = v_1 \cdot \alpha + v_1 \cdot \beta$ (distributiva de escalares).

A seguir, vamos estudar um tipo importante de subconjunto de um espaço vetorial que é o subespaço vetorial. Considere a seguinte definição.

Definição 2. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um subconjunto W de V é um **subespaço vetorial** de V se a restrição de operações de V a W torna este conjunto um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial.*

Um conceito fundamental no nosso estudo é o da base, que será analisado a seguir. Nosso objetivo é explorar algumas definições e propriedades relevantes dentro desse contexto. Para começar, podemos iniciar nossa análise com a seguinte definição:

Definição 3. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$.*

- i) *Um vetor $v \in V$ é uma **combinação linear** dos vetores $v_1, \dots, v_n \in V$ se existirem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que*

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

- ii) *Dizemos que $B \subseteq V$ é um **conjunto gerador** de V (ou que B **gera** V) se todo elemento de V for uma combinação linear de elementos de B .*

Em seguida, vamos analisar as definições de independência e dependência linear. Esses conceitos são cruciais e são frequentemente utilizados em resultados significativos no estudo dos espaços vetoriais.

Definição 4. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ um subconjunto de V .*

- i) *Dizemos que B é **linearmente independente** (ou **LI**) se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ para $v_i \in B$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$, se, e somente se, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.*
- ii) *O conjunto B é chamado **linearmente dependente** (ou **LD**) se não for linearmente independente.*

As definições apresentadas até o momento nos preparam matematicamente para, finalmente, abordar o conceito de base.

Definição 5. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que um subconjunto B de V é uma **base** de V se*

- i) *B for um conjunto gerador de V ;*
- ii) *B for linearmente independente.*

O conceito a ser estudado a seguir é o de Espaços Vetoriais Finitamente Gerados, que são fundamentais na Álgebra Linear e consistem de espaços vetoriais gerados por um conjunto finito de vetores, ou seja, esses espaços possuem uma base finita. Iniciamos esse estudo abordando a seguinte Definição:

Definição 6. *Dizemos que um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ é **finitamente gerado** se possuir um conjunto finito gerador.*

Finalmente, apresentamos o Completamento de Base.

Teorema 2 (Completamento de Base). *Seja V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Todo subconjunto LI de V pode ser completado a uma base V .*

3.2 Transformações Lineares

Em seguida, vamos abordar o assunto das transformações lineares, que são funções entre espaços vetoriais que preservam as suas estruturas de adição e multiplicação escalar. Elas desempenham um papel fundamental em Álgebra Linear. Vamos analisar algumas de suas propriedades e conceitos importantes envolvidos, como o núcleo e a imagem de uma transformação linear.

Definição 7. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma função $T : U \rightarrow V$ é uma **transformação linear** se para cada $u, u_1, u_2 \in U$ e $\alpha \in \mathbb{K}$*

$$i) \quad T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2);$$

$$ii) \quad T(\alpha u) = \alpha T(u).$$

Uma transformação linear que tem como domínio e contra-domínio o mesmo $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V é chamada de **operador linear** em V . Denotaremos por $L(V)$ o conjunto dos operadores lineares definidos em V .

Sejam $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear, $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $B' = \{v_1, \dots, v_m\}$ bases de U e V , respectivamente. Definimos $[T]_{B,B'}$, a **matriz de transformação linear** T , como a matriz cuja j -ésima coluna é o vetor $[T(u_j)]_{B'}$.

Definição 8. *Sejam V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e $T : V \rightarrow V$ um operador linear.*

i) Um **autovalor** de T é um elemento $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe um vetor não nulo $v \in V$ com $T(v) = \lambda v$.

ii) Se λ é um autovalor de T , então todo vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ é chamado **autovetor de T associado a λ** . Denotaremos por $\text{Aut}_T(\lambda)$ o subespaço de V gerado por todos os autovetores associados a λ , também conhecido como **autoespaço** associado a λ .

Definição 9. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Suponha que $\dim_{\mathbb{K}} V = n < \infty$. Dizemos que T é **diagonalizável** se existir uma base B tal que $[T]_B$ é diagonal, o que é equivalente a dizer que existe uma base formada por autovetores de T para V .*

3.3 Espaço com Produto Interno

Um espaço com produto interno é um espaço vetorial que mantém muitas características do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, sendo de alguma forma uma generalização desse espaço. Nesta seção o corpo de base $\mathbb{K}$ de um espaço vetorial será sempre igual a $\mathbb{R}$ ou a $\mathbb{C}$.

Definição 10. Seja V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Um **Produto Interno** sobre V é uma função

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle : \quad & V \times V \rightarrow \mathbb{K} \\ (u, v) & \mapsto \langle u, v \rangle\end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades, para cada $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$P1) \quad \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle;$$

$$P2) \quad \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle;$$

$$P3) \quad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle};$$

$$P4) \quad \langle u, u \rangle \geq 0, \text{ se } u \neq 0.$$

Definição 11. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno e $v_1, v_2 \in V$. Dizemos que v_1, v_2 são **ortogonais** se $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

Definição 12. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V

i) Dizemos que B é **ortogonal** se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para cada $i, j = 1, \dots, n$, com $i \neq j$;

ii) Dizemos que B é **ortonormal** se B é ortogonal e $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ for uma base ortonormal de um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com produto interno V , qualquer vetor $v \in V$ pode ser expresso como:

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i.$$

Com as ideias apresentadas até então, podemos definir o subespaço ortogonal.

Definição 13. Dado um subespaço W de um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V com produto interno, o **subespaço ortogonal** $W^\perp$ é o conjunto de todos os vetores $u \in V$ que são ortogonais a todos os vetores de W , isto é:

$$W^\perp = \{u \in V \mid \langle u, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\}.$$

3.4 Operadores autoadjuntos e diagonalização

Nesta seção final, faremos a discussão sobre o adjunto de um operador linear, bem como quando temos operadores autoadjuntos e qual é a relação desses tipos de operadores com o conceito de diagonalização.

Definição 14. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em V . Dado um operador linear $T : V \rightarrow V$, o **operador adjunto** T^* é o operador linear tal que:*

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle \quad \text{para todos } u, v \in V.$$

É importante observar que o operador adjunto associado a um operador linear é único.

Definição 15. *O operador T é **autoadjunto** se é igual ao seu adjunto, ou seja:*

$$T = T^*.$$

Os próximos passos que daremos na teoria prepararão o terreno para um dos principais resultados estudados em Álgebra Linear, objetivo final deste trabalho, que é o Teorema Espectral. Como veremos, precisamos primeiro garantir a existência de autovalores para operadores autoadjuntos.

Teorema 3. *Seja V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Se $T \in L(V)$ é autoadjunto, então T possui um autovetor.*

Podemos finalmente enunciar o resultado principal deste trabalho:

Teorema 4 (Teorema Espectral). *Seja V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Se $T \in L(V)$ é autoadjunto, então existe uma base ortonormal de V cujos vetores são autovetores de T .*

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Teorema Espectral mostra que dado um operador linear autoadjunto em um espaço vetorial de dimensão finita, é possível diagonalizar esse operador. Em outras palavras, a matriz associada a esse operador linear será semelhante a uma matriz diagonal, o que pode facilitar, por exemplo, o cálculo de determinante e de potências dessa matriz. Tais fatos tem diversas aplicações em outras áreas da matemática.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da UTFPR, — Brasil (Edital UTFPR/PROPPG n.º 05/2023 — PIVIC).

REFERÊNCIAS

COELHO, Flávio Ulhoa. **Um Curso de Álgebra Linear**. São Paulo: Edusp, 2020.

ELON, Lages Lima. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Rav. **Linear Álgebra**. [S.l.]: Prentice-Hall Hispanoamericana, 1973.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear**. São Paulo: Pearson/Makron Books, 1987.