A DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

Ruan Pablo Ronson Luqueti[1],Lilian Cordeiro Brambila[2]

RESUMO: A desigualdade isoperimétrica é um resultado matemático que relaciona a área de uma região delimitada por uma curva fechada no plano com seu comprimento. Esse teorema possui diversas demonstrações e aplicações em várias áreas da matemática, e sua origem remonta à lenda da princesa Dido, que precisou cercar a maior área possível com uma quantidade limitada de couro de boi, fundando assim a cidade de Cartago. Com base nessa lenda, o problema de maximizar a área de uma figura fechada, dado o perímetro conhecido, ganhou relevância do ponto de vista matemático. O presente trabalho tem como objetivo estudar uma das demonstrações da desigualdade isoperimétrica, assim como investigar sob quais condições se obtém a maior área para um perímetro fixo. Para isso, foi necessário estudar algumas propriedades e resultados de convergência de séries de funções, como pré-requisito para o estudo das séries de Fourier, suas condições de convergência e seus resultados. A partir desses estudos, diversas proposições e teoremas foram analisados e estudados, tais como a Identidade de Parseval, além do estudo de conceitos de Geometria Diferencial, uma vez que o problema é de natureza geométrica e seu enunciado carrega muitos termos dessa área. Após a compreensão de todos os requisitos para a demonstração da desigualdade isoperimétrica, que garante que $A \leq L^2/4\pi$, onde A é a área delimitada por uma curva simples, plana e fechada, e L é o comprimento dessa curva, concluiu-se que a igualdade só ocorre quando a curva é um círculo. Em outras palavras, entre as figuras planas fechadas com o mesmo perímetro, o círculo é a que possui a maior área.

Palavras-chave: desigualdade isoperimétrica. séries de Fourier. geometria diferencial.

1 INTRODUÇÃO

O problema de Dido é um antigo e importante problema da Matemática. De acordo com uma versão da lenda, a princesa Dido, por volta do século IX a.C., precisou refugiar-se no norte da África após fugir da cidade de Tiro devido a conflitos de poder e ao assassinato de seu marido. Ao chegar nesse novo local com seus súditos, pediu à população para comprar uma área de terra, mas a resposta que obteve foi a seguinte: "Você pode ter tanta terra quanto conseguir cercar com couro de boi"(MOTA, 2018, p. 1). Dido recortou o couro em tiras finas e juntou essas tiras a fim de delimitar uma região ao longo da costa, dando origem à cidade de Cartago. O problema de Dido foi encontrar a melhor maneira de contornar o terreno para obter a maior área limitada possível. A solução encontrada por ela foi dispor as tiras de couro em um semicírculo, perpendicular à orla marinha (MOTA, 2018).

Como já mencionado, existem outras versões dessa lenda. No entanto, motivado por ela, pretendo discutir neste trabalho a solução do problema de Dido, também conhecido como Problema Isoperimétrico. Desse modo, o objetivo é compreender qual curva simples e fechada, com o mesmo perímetro, fornece a maior área, isto é, o teorema da desigualdade isoperimétrica. Para tanto, foi selecionada uma

[1] Discente do curso de Licenciatura em Matemática; ruanpablo@alunos.utfpr.edu.br.
[2] Docente do curso de Licenciatura em Matemática; lilianc@utfpr.edu.br.

demonstração deste teorema que utiliza diversas definições, teoremas e proposições sobre curvas e séries de Fourier. Sendo assim, a seguir será realizada uma breve revisão dos conceitos estudados.

2 METODOLOGIA

Para a realização da presente pesquisa, foi realizada uma revisão de literatura sobre os temas: sequências de funções, séries de Fourier e curvas e apresentação semanal de seminários para discussão dos temas trabalhos. Em particular, as principais referências adotadas foram (LIMA, 2022), (FIGUEIREDO, 2018), (CARMO, 2005) e (MARSDEN; TROMBA, 2001).

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Alguns conceitos são imprescindíveis para compreender o enunciado da desigualdade isoperimétrica. Nesse sentido, serão apresentados os principais conceitos e resultados utilizados no teorema da desigualdade isoperimétrica.

3.1 Séries de Fourier

Definição 3.1. *Uma função $f : I \subseteq \mathbb{R} :\to \mathbb{R}$ é dita **descontínua de primeira espécie** num ponto $a \in I$ se f é descontínua em a e os limites à esquerda e à direita de f em a existem, isto é, são números reais.*

Observação 1. *Note que não há a exigência dos limites laterais coincidirem, a existência é condição necessária e suficiente para f ser descontínua de primeira espécie.*

Definição 3.2. *Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, a **série de Fourier** de f é definida por*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \, cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

em que os coeficientes a_n e b_n são definidos por:

i) $a_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \cdot cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \ n \geq 0;$

ii) $b_n = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x) \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \ n \geq 1.$

*Denotamos a_n e b_n como **coeficientes de Fourier** da série de Fourier de f.*

Note que, em um primeiro momento, não se tem uma igualdade entre a função f e sua série de Fourier. Nesse sentido, deve-se investigar as condições para que a função f seja igual a sua série de Fourier e, mais ainda, que esta série convirja. Para tal, considere as seguintes definições a seguir.

Definição 3.3. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será* ***seccionalmente contínua*** *se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades, de primeira espécie, em qualquer intervalo limitado.*

Observação 2. *Equivalentemente a Definição 3.3, dados $a < b$, existem $a \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b$ tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}), $j = 1, \cdots, n-1$, e existem os limites*

$$f(a_j + 0) := \lim_{x \to a_j^+} f(x) \quad e \quad f(a_j - 0) := \lim_{x \to a_j^-} f(x).$$

Definição 3.4. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será* ***seccionalmente diferenciável*** *se ela e sua derivada primeira f' forem ambas seccionalmente contínuas.*

Agora apresentamos o Teorema de Fourier que fornece hipóteses que garantem quando a série de Fourier de uma função converge.

Teorema 1 (Fourier)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então, a série de Fourier da função f converge para $\frac{1}{2} \cdot [f(x+0) + f(x-0)]$ em todos os ponto $x \in \mathbb{R}$, isto é,*

$$\frac{1}{2} \cdot [f(x+0) + f(x-0)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right).$$

Por fim, antes de abordar curvas, é necessário compreender a Identidade de Parseval, uma vez que tal identidade garante resultados-chave na demonstração da desigualdade isoperimétrica.

Teorema 2 (Identidade de Parseval)**.** *Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, onde $f, |f|$ e $|f|^2$ são integráveis, então os coeficientes de Fourier a_n e b_n podem ser calculados e*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} |f(x)|^2.$$

3.2 Curvas

Como a desigualdade isoperimétrica é um problema geométrico, alguns conceitos de geometria tem sua apresentação indispensável para compreensão do trabalho. Desse modo, realiza-se uma breve revisão desses conceitos.

Definição 3.5. *Um* ***caminho*** *é uma função contínua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. Deste modo, um caminho γ é dito* ***fechado*** *se $\gamma(a) = \gamma(b)$; e é dito* ***simples*** *se $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, para $a < t_1 < t_2 < b$.*

Definição 3.6. *Seja γ um caminho. O conjunto C dos pontos imagens do caminho γ, é chamado de uma* ***curva****: $C = \{\gamma(t) = (x(t), y(t)) \mid t \in [a,b]\}$. Além disso, uma curva C é fechada ou simples se ela corresponder a uma caminho γ fechado ou simples, respectivamente.*

Observação 3. *Note que cada caminho γ corresponde a uma curva C. Todavia, uma curva pode ser determinada por caminhos diferentes.*

Definição 3.7. *Cada um dos caminhos que determina a curva C é chamado de uma* ***parametrização*** *da curva.*

Definição 3.8. *Uma curva C é* ***diferenciável*** *se ela tiver uma parametrização $(x(t),y(t))$, onde as funções coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são diferenciáveis.*

De forma análoga,

Definição 3.9. *Uma curva C é* ***seccionalmente diferenciável*** *se ela tiver uma parametrização $(x(t),y(t))$, onde as funções coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são seccionalmente diferenciáveis.*

Definição 3.10. *Sejam $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ um caminho diferenciável, $\mathscr{P}$ o conjunto das partições de $[a, b]$ e $L(\alpha,P) = \sum_{i=0}^{n-1} ||\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)||$. O* ***comprimento de arco*** *de α é dado por*

$$L(\alpha) = \sup\{L(\alpha,P) \mid P \in \mathscr{P}\}.$$

Observação 4. *Note que, para qualquer partição $P \in \mathscr{P}$, têm-se*

$$L(\alpha,P) \leq \int_a^b ||\alpha'(t)||\,dt.$$

Sendo assim, tem-se o seguinte resultado que une a definição de comprimento com a observação anterior.

Teorema 3. *Dada uma curva C seccionalmente diferenciável e $\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ um caminho que define esta curva. O comprimento de arco da curva C é dado por*

$$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\,dt.$$

Definição 3.11. *Dada uma função $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, ela é dita uma função de variação limitada, quando existe uma constante $K > 0$, tal que, para qualquer partição $a \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ do intervalo $[a,b]$, tem-se que $\sum_{n=1}^{n} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|| \leq K$.*

Definição 3.12. *Uma curva C é* ***retificável*** *se a função que corresponde a um caminho $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ é uma função de variação limitada.*

Observação 5. *A menor constante K que serve para esse propósito é o* ***comprimento*** *L da curva C.*

Por fim, obtém-se o seguinte resultado para a área de curvas simples e fechadas, como consequência do Teorema de Green (MARSDEN; TROMBA, 2001).

Teorema 4. *Seja C uma curva simples fechada que limita uma região à qual se aplica o Teorema de Green, então a área da região D limitada por $C = \partial D$ é:*

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx.$$

3.3 A desigualdade isoperimétrica

Como consequência de toda a discussão feita previamente, temos o principal resultado deste trabalho, enunciado a seguir.

Teorema 5 (A desigualdade isoperimétrica)**.** *A área A englobada por qualquer curva simples plana fechada retificável C, de comprimento L, satisfaz a desigualdade*

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi};$$

além disso, a igualdade ocorre, se e só se, C for um círculo.

A demonstração desse resultado é realizada a partir dos conceitos e resultados apresentados nesta seção, além de outros resultados complementares. A demonstração completa estudada encontra-se em (FIGUEIREDO, 2018).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pode-se concluir através da Desigualdade Isoperimétrica que a circunferência é, dentre todas as curvas simples e fechadas com mesmo perímetro, a que fornece a maior área.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da UTFPR, Universidade Tecnológica Federal do Paraná — Brasil (Edital UTFPR/PROPPG n.º 05/2023 — PIVIC).

REFERÊNCIAS

CARMO, Manfredo P. do. **Geometria Diferencial de Curvas e Superícies**. Rio de Jameiro: SBM, 2005.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.** 5. ed. Rio de Jameiro: IMPA, 2018.

LIMA, Elon Lages. **curso de análise vol. 1.** 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2022. Volume 1.

MARSDEN, Jerrold Eldon; TROMBA, Anthony Joseph. **Cálculo Vetorial**. 1. ed. São Paulo: Editora Blucher, 2001.

MOTA, Wélisson Martins. **Investigando a Desigualdade Isoperimétrica.** Campina Grande: Anais X EPBEM e V ECMAT. Realize Editora, 2018.