

Otimização das Bandas Proibidas de Estruturas Fonônicas 1-D Utilizando Algoritmos Genéticos.

Bolsista: Gabriel Pestana de Freitas¹; Orientador: Edson Jansen Pedrosa de Miranda Júnior²; Coorientadora: Dra. Danubia Soares Pires³

Resumo

Este trabalho estuda a estrutura de banda (também conhecida como relação ou diagrama de dispersão) de ondas elásticas se propagando em cristais fonônicos 1D através do método de expansão em ondas planas (PWE) associado à um algoritmo de otimização topológica. A pesquisa analisa os diagramas de dispersão e bandas proibidas de Bragg (do inglês *Bragg-type band gaps*) para CFns compostos por um único material e que possuem variação de área ou compostos por inclusões metálicas em uma matriz poliméricas. O método PWE apresenta eficiência e baixo custo computacional, enquanto o algoritmo genético adaptativo encontra-se em fase de desenvolvimento.

Palavras-chave: Cristais fonônicos; PWE; Diagramas de dispersão; Bandas proibidas de Bragg; Algoritmo genético adaptativo

Introdução

Compósitos periódicos artificiais, conhecidos como cristais fonônicos (CFns), consistindo em uma rede periódica de dispersores imersos em um meio hospedeiro, têm sido bastantes estudados [1,3]. Eles têm recebido bastante atenção, uma vez que exibem bandas proibidas onde existem apenas ondas evanescentes mecânicas (elásticas ou acústicas). Não existem ondas mecânicas propagantes nas bandas proibidas. Esta habilidade de criar bandas proibidas fonônicas é similar às bandas proibidas eletrônicas e fotônicas nos semicondutores/isolantes e cristais fotônicos respectivamente.

A origem física das bandas proibidas fonônicas e fotônicas pode ser entendida em microescala utilizando a teoria de onda clássica para descrever as ressonâncias de Bragg e Mie baseadas no espalhamento das ondas mecânicas e eletromagnéticas se propagando dentro do cristal [8].

Os CFns possuem muitas aplicações, como, por exemplo, controle de vibração [5], barreiras/filtros acústicos [16], dispositivos de supressão de ruído [14], escudos sonoros [2], metamateriais elásticos/acústicos [16], também conhecidos como cristais fonônicos

¹ Graduando em Engenharia Elétrica IFMA Campus Monte Castelo; E-mail: gpestana@acad.ifma.br.

² Professor Dr. do Curso do Departamento de Ensino do Campus Centro Histórico; E-mail: edson.jansen@ifma.edu.br.

³ Professora Dra. do Curso do Departamento de Ensino do Campus Monte Castelo; E-mail: prof.danubiapires@acad.ifma.edu.br.

localmente ressonantes (CFnLRs), dentre outras. Os CFnLRs apresentam as bandas proibidas do tipo localmente ressonantes e podem apresentar ou não as bandas proibidas de Bragg.

As bandas proibidas de Bragg surgem caso exista periodicidade e ocorrem, tipicamente, em comprimentos de onda da ordem do tamanho da célula unitária. A maioria dos estudos envolvendo CFns focam na investigação de ondas mecânicas de volume (bulk mechanical waves) [1]. Os resultados destes estudos têm mostrado que as bandas proibidas podem surgir devido ao contraste entre as propriedades físicas, por exemplo, módulo de elasticidade e densidade, da inclusão e da matriz. Outras variáveis importantes que influenciam a largura das bandas proibidas são a geometria da inclusão, o fator de preenchimento e o tipo de rede.

Alguns estudos têm sido realizados no que diz respeito à utilização de técnicas de otimização topológica aplicadas a CFns [12,17]. Yi e Youn [17] realizaram uma revisão da literatura sobre projeto de CFns utilizando métodos de otimização topológica. No projeto destas estruturas periódicas, os métodos de otimização topológica baseada e não baseada em gradiente.

Zhao e Wei [19] estudaram as bandas proibidas de Bragg em CFns 1D com viscoelasticidade. Estes autores utilizaram para resolver o problema de autovalor e autovetor o método de expansão em ondas planas e teoria de onda de Floquet-Bloch em uma estrutura periódica. Eles observaram que as constantes viscoelásticas, como, por exemplo, tempo de relaxação, módulo de elasticidade estático inicial e final do material hospedeiro, influencia não apenas a localização, mas também a largura das bandas proibidas. Xie *et al.* [15] desenvolveram um método de expansão em ondas planas (*plane wave expansion – PWE method*) melhorado para obtenção das estruturas de banda de CFns. Eles também utilizaram um algoritmo genético adaptativo para otimizar a topologia estrutural de CFns para modos de onda no plano.

Este trabalho tem como principal objetivo estudar as estruturas de banda CFns 1D utilizando algoritmos de otimização topológica para controle passivo de vibração mecânica. Os objetivos específicos consistem em estudar a influência do tipo de inclusão e de rede na formação das bandas proibidas de Bragg, modelar os CFns 1D do PWE associado com um algoritmo genético adaptativo, comparar os resultados da modelagem numérica dos CFns através do PWE e do PWE melhorado, aplicar a formulação para estruturas periódicas (utilizando o teorema de Floquet-Bloch), através do PWE, para o estudo da teoria elementar de barra simples no projeto do CFn 1D, obtenção das estruturas

de banda de CFns 1D contendo inclusões com geometrias complexas e formação de bandas proibidas largas e com alta atenuação.

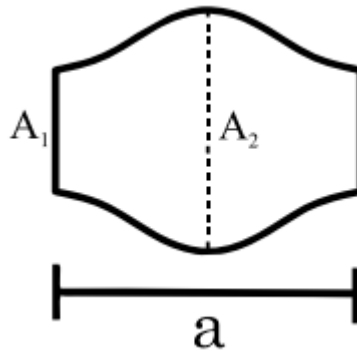
Metodologia

Na metodologia de estudo deste trabalho foram realizadas análises teóricas sobre o método de modelagem semi-analítico de expansão em ondas planas (PWE) para cálculo da estrutura de banda e de CFns viscoelásticos. A formulação deste método pode ser encontrada facilmente na literatura [11-17].

Na modelagem dos CFns viscoelásticos 1D, mais especificamente para obtenção de suas estruturas de banda, devem ser utilizados o teorema de Floquet-Bloch e as condições de contorno periódicas de Floquet-Bloch.

Tal método de expansão em ondas planas foi explorado na pesquisa desenvolvida por Miranda Jr., ao aplicá-lo na equação diferencial que rege o movimento de vibrações forçadas longitudinais em uma barra homogênea, considerado uma variação de área para o caso unidimensional (Figura 1), que pode ser representada pela expressão abaixo:

Figura 1. Forma de célula simétrica com área de seção transversal senoidal.



Fonte: Assis et al. (2018).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EA(x) \frac{\partial \hat{u}(x, \omega)}{\partial x} \right] + \omega^2 \rho A(x) \hat{u}(x, \omega) = 0 \quad (1)$$

Onde: E : módulo de elasticidade do material da barra; ρ : massa específica do material da barra; A : área da seção transversal ao deslocamento; \hat{u} : deslocamento da barra; ω : frequência ou modo de vibrar da barra;

Segundo Edson, para o desenvolvimento do método, assume-se que a área da seção transversal da barra varia periodicamente, dado por $A(x) = A(x + a)$, onde a é o parâmetro da rede, isto é, o comprimento da célula unitária.

Em seguida, devido a periodicidade, são aplicadas as condições periódicas de Floquet-Bloch para o deslocamento e depois expande-se em série de Fourier, considerando uma propagação de onda unidimensional:

$$\hat{u}(x) = \tilde{u}(x)e^{jkx} \quad (2)$$

A amplitude de onda de Bloch $\tilde{u}(x)$ é periódica e seu período é a , ou seja, $\tilde{u}(x + a) = \tilde{u}(x)$, k é o vetor de onda de Bloch, também conhecido como número de onda. O valor do vetor de onda está dentro da primeira zona irredutível de Brillouin, no espaço recíproco, $[0, \pi/a]$, ou dentro da primeira zona de Brillouin (FBZ), $[-\pi/a, \pi/a]$, que diz respeito à menor e suficiente região em que se pode caracterizar o problema de propagação de ondas do material, para esse caso 1D. Expandindo a amplitude de onda de Bloch $\tilde{u}(x)$ em série de Fourier no espaço recíproco, obtém -se:

$$\hat{u}(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_m e^{j(k+g_m)x} \quad (3)$$

Em que u_m são os coeficientes da série de Fourier de $\tilde{u}(x)$ e $g_m = 2\pi m/a$ é o vetor da rede recíproca. Neste caso unidimensional g_m é constante. Além disso, é necessário fazer a expansão da área de seção transversal em série de Fourier no espaço recíproco. Vale ressaltar que não é necessário aplicar as condições periódicas de Floquet-Bloch, pois nesse caso está sendo lidado com propriedade geométrica. Desse modo, tem-se:

$$A(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_n e^{-jg_n x} \quad (4)$$

Sabendo que o intuito é apresentar o resultado da pesquisa, algumas etapas do processo de obtenção da solução para o desenvolvimento do software não serão desenvolvidas.

Em seguida, substituem-se as equações (4), que equivale a integral da série de Fourier, e (3) na equação (1), tal como:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} EA_{r-m}(k + g_m)(k + g_r)u_m = \lambda \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \rho A_{r-m}u_m, \quad \lambda = \omega^2 \quad (5)$$

A expressão (5) é um sistema com uma quantidade infinita de equações, logo, para resolvê-lo é necessário truncar a série de Fourier para os primeiros M termos, ou seja, r e $m \in [-M, \dots, M] \in \mathbb{z}$, em que (5) ainda pode ser reescrita como:

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{C}\mathbf{u} \quad (6)$$

Onde os coeficientes do vetor \mathbf{u} são u_m e os coeficientes das matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} são dados por:

$$B_{r-m} = EA_{r-m}(k + g_m)(k + g_r), \quad C_{r-m} = \rho A_{r-m}$$

A equação (6) representa de maneira generalizada o problema de autovalor sobre λ e sua solução deve levar em conta cada k , da primeira zona de Brillouin ou da primeira zona irreduzível de Brillouin.

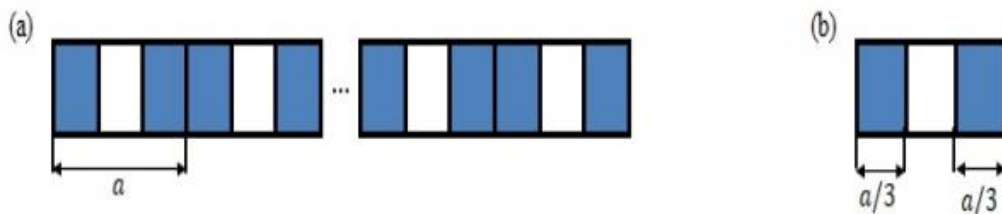
Por conta do limite de páginas e palavras não foi possível apresentar toda a parte metodológica do trabalho. O método utilizado para solucionar os problemas de autovalores e autovetores incluiu o emprego de um algoritmo computacional desenvolvido no software MATLAB. Além disso, o algoritmo genético adaptativo encontra-se em fase de desenvolvimento.

Resultados e Discussão

Também foram analisados, com base na pesquisa de Miranda Jr. [6,7], os resultados obtidos a partir da aplicação do método PWE em uma barra unidimensional infinita de PnC composto por alumínio e epoxy. Tais resultados são semelhantes aos obtidos no caso de variação de área. O PnC foi representado na figura abaixo, em que as cores azul e branco correspondem ao epoxy e alumínio, respectivamente.

Figura 2: Representação esquemática da barra de PnC 1D com células unitárias de alumínio(branco) e epoxy (azul) (a). A célula unitária da barra de PnC é ilustrada em

(b).



Fonte: Miranda Jr. (2018).

A tabela a seguir apresenta as propriedades geométricas material da barra de PnC:

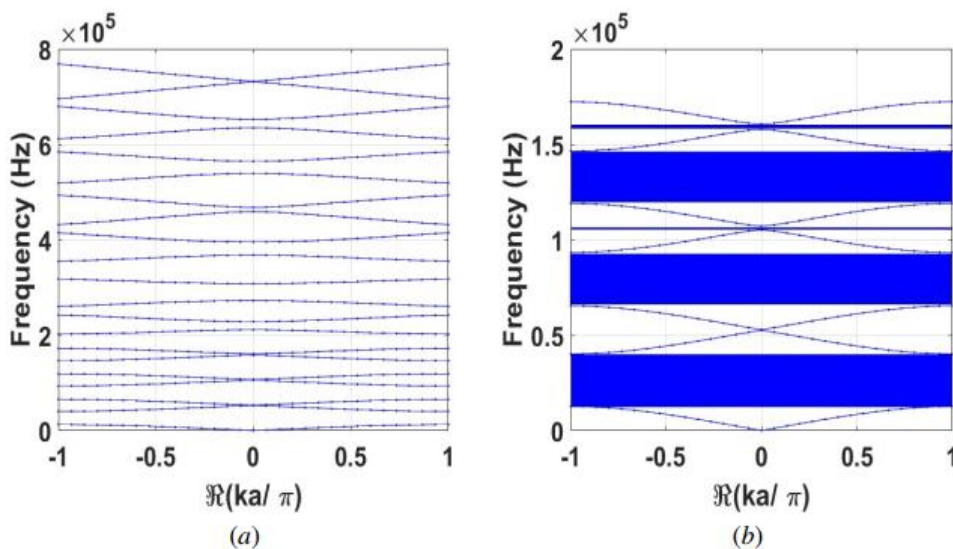
Tabela 1: Propriedades geométricas e materiais da barra de PnC. (2018)

Geometry/Property	Value
Unit-cell length (a)	0.07 m
Square cross section area ($S = b \times h$)	$0.01 \times 0.01 \text{ m}^2$
Young's modulus (E_A, E_B)	$77.6 \times 10^9 \text{ N/m}^2, 4.35 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
Mass density (ρ_A, ρ_B)	$2730 \text{ kg/m}^3, 1180 \text{ kg/m}^3$

Fonte: Miranda Jr.

A pesquisa de Miranda Jr., indica resultados que podem ser visualizados na Figura 3, onde é ilustrada a estrutura de banda, isto é, a parte real do vetor de onda de Bloch reduzido em função da frequência. Tais resultados são obtidos através de um código computacional desenvolvido pelo autor no MatLab, usando os princípios e conveniência da formulação matemática acima. Para tal, foi usado $M = 10$, que indica a quantidade de harmônicos na expansão da série de Fourier. Escolhendo $M = 10$, tem-se $m = \bar{m} = [-10, \dots, 10]$, que por sua vez implica em $2M + 1 = 21$ ondas planas. Os band gaps de Bragg, são ilustrados na Figura 4 (b), por regiões taxadas em azul.

Figura 3. Estrutura de banda da barra de PnC 1D pelo método do PWE, considerando 21 ondas planas (a). Os primeiros ramos da estrutura de banda o primeiro band gap de Bragg são ilustrados por regiões sombreadas em azul (b).



Fonte: Miranda Jr. (2018).

No caso em que a barra de PnC é homogênea, isto é, se ela é composta apenas de um material, alumínio ou epoxy, implica na inexistência de dispersão de Bragg e os band gaps não são abertos, como é apresentado nas Figuras 3 (a) e (b). Nestas figuras, a expansão da série de Fourier é feita levando em consideração 21 ondas planas. É importante ressaltar que se deve ter atenção nos valores do vetor de onda de Bloch, pois na abordagem do método PWE ele possui valores apenas dentro da primeira zona de Brillouin.

Agradecimentos

Manifesto minha sincera gratidão ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro concedido através da bolsa PIBIC. Também expresse meus agradecimentos ao professor Edson Jansen pelo inestimável suporte técnico e científico prestado ao longo da pesquisa. Suas orientações foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Conclusão

O método PWE apresenta algumas vantagens, como a obtenção de estruturas de banda ou diagramas de dispersão de forma simples, com um código de fácil implementação e que não demanda grande esforço computacional. A pesquisa desenvolvida evidencia que o método PWE proporciona uma resposta eficaz na redução de vibrações em estruturas periódicas. No entanto, o PWE possui limitações, sendo capaz de operar apenas no domínio real das soluções da equação (1) e não fornece informações a respeito ondas evanescentes. Além disso, em alguns casos específicos, é necessária uma grande quantidade de ondas planas para a convergência da série de Fourier, então o método aprimorado de expansão em ondas planas (IPWE) possui vantagens em relação ao PWE tradicional.

Referências

- [1] ANJOS, V.; ARANTES, A. Phononic band structure in carbon microtube composites. **RSC Advances**, 5, p. 11248-11253, 2015.
- [2] GORISHNYY, T.; ULLAL, C.K.; MALDOVAN, M.; FYTAS, G.; THOMAS, E.L. Hypersonic phononic crystals. **Physical Review Letters**, 94(115501), p. 1-4, 2005.
- [3] HEPPELSTONE, S.P.; SRIVASTAVA, G.P. Hypersonic modes in nanophononic semiconductors. **Physical Review Letters**, 101(105502), p. 1-4, 2008.

- [4] HUANG, J.; SHI, Z. Attenuation zones of periodic pile barriers and its application in vibration reduction for plane waves. **Journal of Sound and Vibration**, 332, p. 4423-4439, 2013.
- [5] JENSEN, J.S. Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass-spring structures. **Journal of Sound and Vibration**, 266, p. 1053-1078, 2003.
- [6] MIRANDA JR., E.J.P.; DOS SANTOS, J.M.C. Complete band gaps in nanopiezoelectric phononic crystals. **Materials Research**, Epub October 30, 2017. <https://dx.doi.org/10.1590/1980-5373-mr-2017-0298>.
- [7] MIRANDA JR., E.J.P.; DOS SANTOS, J.M.C. Flexural wave band gaps in phononic crystal Euler-Bernoulli beams using wave finite element and plane wave expansion methods. **Materials Research**, Epub Jan 08, 2018. <https://dx.doi.org/10.1590/1980-5373-mr-2016-0877>.
- [8] OLSSON III, R.H.; EL-KADY, I. Microfabricated phononic crystal devices and applications. **Measurement Science and Technology**, 20(012002), p. 1-13, 2009.
- [9] ORR, L.-A.; MULHOLLAND, A.J.; O'LEARY, R.L.; HAYWARD, G. Harmonic analysis of lossy, piezoelectric composite transducers using the plane wave expansion method. **Ultrasonics**, 48, p. 652-663, 2008.
- [10] PENNEC, Y.; VASSEUR, J.O.; DJAFARI-ROUHANI, B.; DOBRZYŃSKI, L.; DEYMIER, P.A. Two-dimensional phononic crystals: Examples and applications. **Surface Science Reports**, 65, p. 229-291, 2010.
- [11] SRIKANTHA, P.; HUSSEIN, M.I. **Dynamics of Lattice Materials**. John Wiley & Sons Ltd., 2017.
- [12] WEI, P.J.; ZHAO, Y.P. The influence of viscosity on band gaps of 2D phononic crystal. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, 17, p. 383-392, 2010.
- [13] WANG, Y.-F.; WANG, Y.-S.; LAUDE, V. Wave propagation in two-dimensional viscoelastic metamaterials. **Physical Review B**, 92(104110), p. 1-14, 2015.
- [14] XIAO, Y.; WEN, J.; WEN, X. Sound transmission loss of metamaterial-based thin plates with multiple subwavelength arrays of attached resonators. **Journal of Sound and Vibration**, 331, p. 5408-5423, 2012.
- [15] XIE, L.; XIA, B.; LIU, J.; HUANG, G.; LEI, J. An improved fast plane wave expansion method for topology optimization of phononic crystals. **International Journal of Mechanical Sciences**, 120, p. 171-181, 2017

- [16] YANG, Z.; DAI, H.M.; CHAN, N.H.; MA, G.C. Acoustic metamaterial panels for sound attenuation in the 50-1000 Hz regime. **Applied Physics Letters**, 96(041906), p. 1-3, 2010.
- [17] YI, G.; YOUN, B.D. A comprehensive survey on topology optimization of phononic crystals. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 54, p. 1315-1344, 2016.
- [18] YU, K.; CHEN, T.; WANG, X. Band gaps in the low-frequency range based on the two-dimensional phononic crystals plates composed of rubber matrix with periodic steel stubs. **Physica B**, 416, p. 12-16, 2013.
- [19] ZHAO, Y.P.; WEI, P.J. The band gap of 1D viscoelastic phononic crystal. **Computational Materials Science**, 46, p. 603-606, 2009.