

Irracionalidade da constante de Euler: uma demonstração geométrica/topológica

Maxwell Aires da Silva,¹

EMEF Maria das Vitorias Pires Uchoa Queiroz, Campina Grande, PB

Resumo. Neste trabalho apresentamos uma demonstração da irracionalidade da constante de Euler, o número e . Essa demonstração foi publicada originalmente pelo matemático estadunidense Jonathan Sondow (1943 – 2020) em um artigo científico no ano de 2006 [3]. O interessante desse artigo é sua originalidade, pois o Sondow apresenta um argumento bastante engenhoso usando conceitos de topologia da reta para a construção de intervalos convenientes baseados na expansão do número e via séries de Maclaurin. Em seguida, mostra que a constante de Euler pertence ao interior de todos esses intervalos para, enfim, mostrar por meio de redução a um absurdo a irracionalidade desse número.

Palavras-chave. Constante de Euler; Irracionalidade; Geometria/Topologia

1 Introdução

As constantes matemáticas são, sem sombra de dúvidas, de inegável importância no processo de se fazer e entender Matemática. Alguns desses números são bastante famosos e igualmente antigos, como por exemplo, $\pi = 3,14159265358\dots$ muito utilizado na geometria e na trigonometria, e a chamada razão áurea $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots$ bastante conhecida entre os gregos e os renascentistas. Outras constantes são bem mais recentes, do ponto de vista histórico, como por exemplo, a que discutiremos nesse trabalho, a chamada *constante de Euler* $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818284\dots$, assim chamada em homenagem ao matemático suíço **Leonhard Euler** (1707 - 1783).

Desde suas primeiras aparições, por volta do século 17 em um contexto de matemática financeira, mais precisamente, no estudo da expressão $S = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, conforme o valor de n cresce ($n \rightarrow \infty$), pareceu que se tratava apenas de uma curiosidade matemática. No entanto, o trabalho de **Gregoire de Saint Vincent** (1584 - 1667) sobre quadratura da hipérbole apresentou à comunidade matemática da época uma ótima candidata a base universal para os logaritmos. Finalmente, com as pesquisas de Euler em Cálculo Diferencial, especificamente, estudando a função $f(x) = e^x$, percebeu-se que esta função possui derivada igual à própria função, colocando assim o número e em um lugar definitivo de importância para a Matemática. Para mais detalhes, veja [2].

Estabelecido o número e como uma importante constante matemática, os próximos passos seriam entender, com mais acuidade, mais detalhes sobre essa constante. Por exemplo, se este número é racional ou irracional, se existem expressões em séries para ele, etc. Euler foi o primeiro a provar a irracionalidade de e em 1744, veja [1]. **Augustin Louis Cauchy** (1789 - 1857) também provou

¹maxwell.matematico@gmail.com

sua irracionalidade, veja [4] e, ao longo da história, matemáticos provaram de maneiras diferentes esse resultado.

Vamos apresentar aqui uma prova feita pelo matemático estadunidense **Jonathan Sondow** (1943 - 2020), demonstração esta que usa fatos topológicos da reta após uma engenhosa construção de intervalos encaixantes. Por fim, usando o argumento de redução a um absurdo encerra a prova. Para mais detalhes, veja [3].

2 Metodologia

Estabelecido o número e como uma importante constante matemática, os próximos passos seriam entender, com mais acuidade, mais detalhes sobre essa constante. Por exemplo, se este número é racional ou irracional, se existem expressões em séries para ele, etc. Euler foi o primeiro a provar a irracionalidade de e em 1744, veja [1]. **Augustin Louis Cauchy** (1789 - 1857) também provou sua irracionalidade, veja [4] e, ao longo da história, matemáticos provaram de maneiras diferentes esse resultado.

Vamos apresentar aqui uma prova feita pelo matemático estadunidense **Jonathan Sondow** (1943 - 2020), demonstração esta que usa fatos topológicos da reta após uma engenhosa construção de intervalos encaixantes. Por fim, usando o argumento de redução a um absurdo encerra a prova. Para mais detalhes, veja [3].

3 Resultados e Discussão

Esta seção é dedicada à demonstração da irracionalidade do número e baseada em [3]. Antes, porém, vamos apresentar alguns conceitos preliminares que nos serão úteis para um melhor entendimento da demonstração, e vamos apresentá-los em forma de definição ou de lema.

Definição 3.1. A expansão da função exponencial $f(x) = e^x$ em séries de Maclaurin é

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

em que $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $x \in \mathbb{R}$.

Observação 3.1. Para $x = 1$, o número e fica expresso na soma

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Lema 3.1. Seja $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ uma sequência decrescente de intervalos compactos $I_n = [a_n, b_n]$. A intersecção

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

é não-vazia, isto é, existe pelo menos um número real x tal que $x \in I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mais precisamente, tem-se

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b], \text{ em que } a = \sup a_n \text{ e } b = \inf b_n.$$

Baseados nesse Lema 3.1 vamos construir uma série de intervalos que têm relação com a constante de Euler. Inicialmente vamos tomar o intervalo $I_1 = [2, 3]$, pois $e \in I_1$, e a construção dos demais intervalos obedecerá a seguinte lei de formação:

Lei de formação: Para $k \in \mathbb{N}$, o intervalo I_k é dividido em $k + 1$ subintervalos de mesmo comprimento e, tomando o segundo intervalo da esquerda para a direita, este é o intervalo I_{k+1} .

Desse modo, $I_2 = \left[2 + \frac{1}{2}, 3\right]$. Continuando, o terceiro intervalo é $I_3 = \left[2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, 2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{6}\right]$, e para facilitar a dedução dos demais, observe o seguinte:

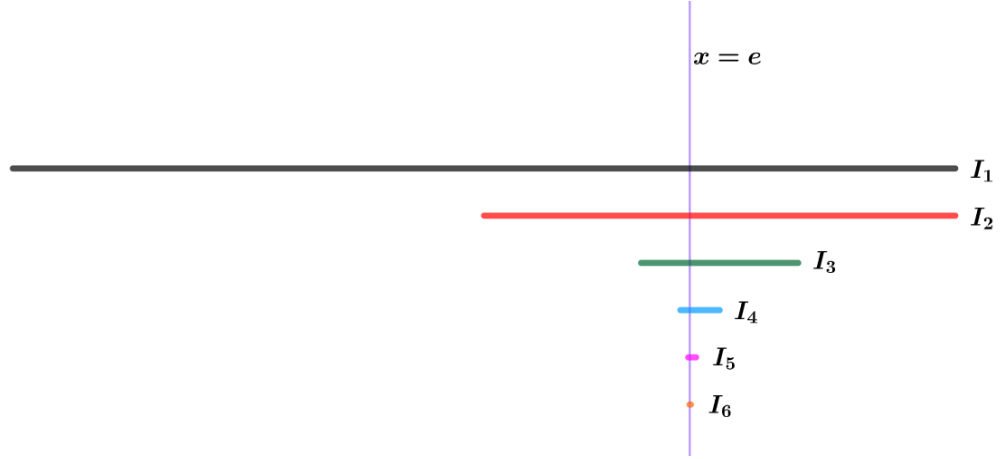
$$\begin{aligned} I_1 = [2, 3] &\Rightarrow I_1 = \left[\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}, \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!}\right]; \\ I_2 = \left[2 + \frac{1}{2}, 3\right] &\Rightarrow I_2 = \left[\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}, \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!}\right]; \\ I_3 = \left[2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, 2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{6}\right] &\Rightarrow I_3 = \left[\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}, \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!}\right]. \end{aligned}$$

Continuando esse processo, o k -ésimo intervalo será da forma:

$$I_k = \left[\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}, \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} + \frac{2}{k!}\right].$$

Note a relação desses intervalos com o número e , conforme a Observação 3.1. A figura a seguir ilustra geometricamente a disposição desses intervalos em relação à reta $x = e$.

Figura 1: Ilustração da construção dos intervalos I_k



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Agora, perceba que os comprimentos desses intervalos valem $|I_k| = \frac{1}{k!}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e chamando

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = \frac{A_k}{k!}$$

e

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} + \frac{2}{k!} = \frac{B_k}{k!},$$

em que $A_k, B_k \in \mathbb{Z}$, tem-se: $I_k = \left[\frac{A_k}{k!}, \frac{B_k}{k!} \right]$, e como $|I_k| = \frac{1}{k!}$, obtém-se $B_k = A_k + 1$. Por meio de tal construção, tem-se uma cadeia decrescente de intervalos compactos $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ e assim, pelo Lema 3.1, existe um $\theta \in \mathbb{R}$, tal que

$$\theta \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Vale salientar que, nesse caso, a interseção é um intervalo degenerado (contendo apenas um ponto) pois $\lim_{k \rightarrow \infty} |I_k| = 0$. Daí, podemos enunciar o seguinte:

Lema 3.2. $e \in I_k, \forall k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. De fato, note que $e > \frac{A_k}{k!}$, uma vez que

$$\begin{aligned} e &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n n \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &> \sum_{k=0}^n n \frac{1}{k!} \\ &= \frac{A_k}{k!}. \end{aligned}$$

Por outro lado, note o seguinte: para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} e &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} e &= \frac{A_n}{n!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{A_n}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\ &= \frac{A_n}{n!} + \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \right] \\ &< \frac{A_n}{n!} + \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \right] \\ &= \frac{A_n}{n!} + \frac{1}{n!} \\ &= \frac{A_n + 1}{n!}. \end{aligned}$$

Daí, $e \in I_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, e em particular, $e \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$, provando assim o resultado.

Agora estamos em condições de demonstrar nosso resultado principal. Vejamos:

Teorema 3.1. *O número e é irracional.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $e \in \mathbb{Q}$, então existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $e = \frac{p}{q}$ com $\text{mdc}(p, q) = 1$. Desse modo, como $e \in I_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, então $e \in I_q$, em que q é o possível denominador do e . Desse modo, tem-se:

$$\frac{A_q}{q!} < e < \frac{A_q + 1}{q!},$$

e como $e = \frac{p}{q}$, vem

$$\frac{A_q}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{A_q + 1}{q!},$$

pode-se ainda escrever $\frac{p}{q}$ da seguinte forma:

$$\frac{p}{q} = \frac{p(q-1)!}{q!},$$

e disto tem-se

$$\frac{A_q}{q!} < \frac{p(q-1)!}{q!} < \frac{A_q + 1}{q!},$$

ou ainda

$$A_q < \underbrace{p(q-1)!}_{\in \mathbb{Z}} < A_q + 1.$$

Encontrando assim um inteiro $p(q-1)!$ entre dois inteiros consecutivos A_q e $A_q + 1$ o que é um absurdo. Logo, $e \notin \mathbb{Q}$. ■

4 Considerações Finais

A demonstração de um resultado, mesmo que já conhecido, usando novas técnicas/estratégias mostra-se uma forte ferramenta de ensino, pesquisa e aprendizagem em Matemática nos mais diversos níveis, pois apresenta ao professor/pesquisador novos pontos de vista que podem servir de fonte de inspiração para futuras gerações de professores e/ou pesquisadores.

Referências

- [1] Leonhard Euler. “De fractionibus continuis dissertatio”. Em: **Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae** 9 (1744), pp. 98–137.
- [2] Eli Maor. **e: a história de um número**. Rio de Janeiro: Record, 2008.
- [3] Jonathan Sondow. “A geometric proof that e is irrational and a new measure of its irrationality”. Em: **Amer. Math. Monthly** 113 (2006), pp. 637–641.
- [4] Janot de Stainville. “Mélanges d’Analyse Algébrique et de Géométrie”. Em: **Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae** 1 (1815), pp. 340–341.