

Números Repunidades e sua relação com Números Quaserepunidades e Permúltiplos

Fernando Soares de Carvalho¹
PROFMAT, UFT, Arraias, TO

Resumo. Este trabalho investiga uma classe de números naturais denominados *repunidades*, que são formados exclusivamente pelo dígito 1. Exploramos a relação entre essas *repunidades* e outras duas classes de números inteiros: as *quaserepunidades* e os *permúltiplos*. O objetivo principal é demonstrar como a compreensão da interconexão de conceitos matemáticos fundamentais, como representações numéricas em uma base específica, primalidade e divisibilidade, pode ser utilizada para aprofundar a compreensão de conceitos matemáticos mais complexos.

Palavras-chave. Números Repunidades, Números Permúltiplos, Números Quaserepunidades.

1 Introdução

Os números *Repunidades* [1, Ch. 9] são uma classe especial de números naturais que têm uma estrutura muito simples, são formados apenas pelo dígito 1 em sua representação decimal. De forma geral, esses números podem ser definidos da seguinte forma:

Definição 1.1. Um número R_n na base B é chamado de *Repunidade* quando pode ser escrito da forma:

$$R_n = \frac{b^n - 1}{b - 1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Note que na base $b = 10$ tem-se,

$$R_1 = 1 = \frac{10^1 - 1}{10 - 1}, \quad (2)$$

$$R_2 = 11 = \frac{10^2 - 1}{10 - 1}, \quad (3)$$

...

...

$$R_n = \underbrace{11 \dots 1}_n = \frac{10^n - 1}{10 - 1}. \quad (4)$$

Vale destacar que poucos números *Repunidades* primos são conhecidos [6], a saber, R_2 , R_{19} , R_{23} , R_{317} e R_{1031} . Sabe-se também que R_{49081} , R_{86453} , R_{109297} e R_{270343} são prováveis números primos [5], ou seja, passam por diversos testes de primalidade. A Tabela 1 apresenta a decomposição em fatores primos de alguns números *Repunidades*. Observa-se ainda que, pela dificuldade computacional para fatoração de um número, não sabemos se o conjunto de números primos que são *Repunidades* é finito ou não.

¹fscarvalho@uft.edu.br

⁴Universidade Federal do Tocantins, Arraias, Tocantins.

Tabela 1: Decomposição em fatores primos de R_n .

n	R_n	Fatoração
2	11	primo
3	111	3×37
4	1111	11×101
5	11111	41×271
6	111111	$3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$
...	...	...
19	$\underbrace{11\dots1}_{19}$	primo
...	...	...
53	$\underbrace{11\dots1}_{53}$	$107 \times 1659431 \times 1325815267337711173 \times 47198858799491425660200071$

Algumas propriedades sobre os números *Repunidades* podem ser vistas em [2]. Vamos apresentar aqui 5 afirmações de fácil verificação:

1. R_n , com $n \in \mathbb{N}$ é múltiplo de 3 se, somente se, n também o é.
2. Se $n \in \mathbb{N}$ é par, então R_n é múltiplo de 11.
3. Se $n \in \mathbb{N}$ é múltiplo 6, então R_n é múltiplo de 3, 7, 11 e 13.
4. Para quaisquer $a, n \in \mathbb{N}$, se a divide n , então R_a divide R_n .
5. Seja $n > 3$ é um número primo, então n divide R_{n-1} .

Neste trabalho vamos ressaltar a relação dos números *Repunidades* com outras classes de números, que são definidos nas subseções 3.1 e 3.2.

2 Metodologia

A teoria elementar dos números refere-se ao estudo de números inteiros (ou classes de números inteiros) e suas propriedades básicas, tais como primalidade, divisibilidade, congruências e as relações entre números inteiros.

Neste trabalho introdutório o foco é apresentar algumas dessas relações matemáticas relacionadas a três classes de números inteiros. Observa-se que as propriedades dos números inteiros formam uma base para a aritmética e álgebra. Entender relações entre números primos, compostos e suas divisões ajuda a desenvolver conceitos básicos em Matemática.

3 Resultados e Discussão

Nesta seção vamos apresentar os principais resultados que relacionam os números *Repunidades* com os números *Quaserepunidades* e *Permúltiplos*.

3.1 Relação entre Repunidades e Quasemonodígitos

Os números *monodígitos* (*repdígitos*), que são números formados pela repetição de um mesmo algarismo, assim como os números *palindrômicos*, que têm a mesma representação decimal quando lido tanto da direita para a esquerda como da esquerda para a direita, são bastante conhecidos na *matemática recreativa*. Duas propriedades fáceis de observar: (I) os *monodígitos* são *palindrômicos*. (II) os *monodígitos* com mais de um dígito, não *Repunidades*, são números compostos e múltiplos de *Repunidades*. De fato, se M_n é um *monodígitos* com $n \geq 2$ e $a \in \{2, 3, \dots, 8, 9\}$, então $M_n = \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ vezes}}$. Neste caso, com M_n é um *monodígitos*, tem-se

$$M_n = \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ vezes}} = a \cdot \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ vezes}} = a \cdot R_n.$$

A seguir definimos uma outra classe de números, chamada de *Quasemonodígitos* (veja [4]).

Definição 3.1. No sistema decimal, um número natural $N \neq 0$, formado por $n \geq 2$ dígitos, em que o dígito a apareça exatamente $n - 1$ vezes e o dígito b uma única vez é um *Quasemonodígitos*, sendo a e b distintos com $a, b \in \{1, 2, \dots, 8, 9\}$. No caso em que o algarismo a for 1 (unidade) diremos que o número N é uma *Quaserepunidade*.

São exemplos de números *Quasemonodígitos*: 112, 2122, 444344, 544444, 6667666, 8888882 e 91111111. Em destaque, os números 112 e 91111111 são também *Quaserepunidades*. Vamos nos restringir aos casos particulares de números *Quaserepunidades*:

$$\begin{aligned} QR_1(n+1, b) &= \underbrace{11 \dots 1}_n b = 10 \times R_n + b, \\ QR_2(n+1, b) &= b \underbrace{11 \dots 1}_n = b \times 10^n + R_n, \\ QR_3(2n+1, b) &= \underbrace{11 \dots 1}_n b \underbrace{11 \dots 1}_n = R_{2n+1} + (b-1) \times 10^n. \end{aligned} \tag{5}$$

Assim, $QR_1(3, 2) = 112$, $QR_2(5, 3) = 31111$ e $QR_3(3, 7) = 171$. Os números *Quaserepunidades* QR_1 , QR_2 e QR_3 , dados em (5), podem ser obtidos por fórmulas gerais, conforme Proposição 3.1 a seguir, isto é, expressões que dependam exclusivamente dos valores n e b .

Proposição 3.1. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e $1 \leq b \leq 9$, temos

- $QR_1(n+1, b) = \frac{10^{n+1} + 9b - 10}{9},$
- $QR_2(n+1, b) = \frac{(9b+1)10^n - 1}{9},$
- $QR_3(2n+1, b) = \frac{10^{2n+1} + 9(b-1)10^n - 1}{9}.$

Demonstração. Observe que,

$$QR_1(n+1, b) = 10^n + 10^{n-1} + \dots + 10^1 + b. \tag{6}$$

Logo,

$$10QR_1(n+1, b) = 10^{n+1} + 10^n + \dots + 10^2 + 10b. \tag{7}$$

Subtraindo (6) de (7) obtemos

$$9QR_1(n+1, b) = 10^{n+1} + 10b - 10 - b = 10^{n+1} + 9b - 10. \quad (8)$$

De forma análoga,

$$9QR_2(n+1, b) = (9b+1)10^n - 1 \quad (9)$$

e

$$9QR_3(2n+1, b) = 10^{2n+1} + 9(b-1)10^n - 1. \quad (10)$$

Fazendo a divisão por 9 em (8), (9) e (10), obtemos os resultados desejados. $\square$

As Tabelas 2, 3 e 4 apresentam os números primos da forma QR_1 , QR_2 e QR_3 , para $n \leq 99$ nos dois primeiros casos e $n \leq 50$ no terceiro caso.

Tabela 2: Números primos da forma QR_1 .

b	$n \leq 99$
3	1, 2, 4, 8, 10, 23
7	1, 3, 4, 7, 22, 28, 39
9	1, 4, 5, 7, 16, 49

Tabela 3: Números primos da forma QR_2 .

b	$n \leq 99$
2	2, 3, 12, 18, 23, 57
3	1, 2, 5, 10, 11, 13, 34, 47, 52, 77, 88
4	1, 3, 13, 25, 72
5	5, 12, 15, 84
6	1, 5, 7, 25, 31
7	1, 7, 55
8	2, 3, 26
9	2, 5, 20, 41, 47, 92

Tabela 4: Números primos da forma QR_3 .

b	$n \leq 50$
3	1, 2, 19
4	2, 3, 32, 45
5	1, 7, 45
6	10, 14, 40
7	3, 33
8	1, 4, 6, 7
9	1, 4, 26

No Lema 3.1 a seguir, é apresentado o critério de divisibilidade por 11.

Lema 3.1. *Seja n um número natural. Se a soma alternada (começando com sinal positivo à esquerda) dos algarismos de n é múltiplo de 11, então n também é múltiplo de 11.*

Como consequência do Lema 3.1, temos

Proposition 3.1. *Se n for ímpar:*

1. *Se $b \neq 1$ então $QR_1(n+1, b)$ não é múltiplo de 11.*
2. *Se $b \neq 1$ então $QR_2(n+1, b)$ não é múltiplo de 11.*
3. *Se $b \neq 2$ então $QR_3(2n+1, b)$ não é múltiplo de 11.*

Demonstração. Se n é ímpar então:

1. Se $b \neq 1$. A soma alternada dos algarismos de $QR_1(n+1, r)$ é dada por

$$S_1 = (1-1) + (1-1) + \dots + (1-b) = 1-b.$$

2. Se $b \neq 1$. A soma alternada dos algarismos de $QR_2(n+1, r)$ é dada por,

$$S_2 = (b-1) + (1-1) + \dots + (1-1) = b-1.$$

Veja que S_1 ou S_2 é múltiplo de 11 se, somente se, $b = 1$.

3. Se $b \neq 1$. A soma dos algarismos de $QR_3(2n+1, b)$ é dada por

$$S = (1-1) + \dots + (1-1) + (1-b) + (1-1) + \dots + (1-1) + 1 = 2-b.$$

Assim S é múltiplo de 11 se, somente se, $b = 2$.

□

De modo análogo, temos o seguinte resultado para números *Quaserepunidades*:

Proposição 3.2. *Se n é par e $b \neq 0$, então nenhum número Quaserepunidade é múltiplo de 11.*

Demonstração. Basta observar que a soma alternada dos algarismos dos números Quaserepunidades $QR_1(n+1, r)$, $QR_2(n+1, r)$ e $QR_3(2n+1, r)$, com n par, é igual a b , logo não podem ser números múltiplos de 11. □

3.2 Relação entre Repunidades e Permúltiplos

Consideraremos o conjunto dos números inteiros não negativos (naturais) denotado por $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, e por conveniência diremos apenas n é um número (natural). Seja n um número não nulo no sistema posicional decimal (base 10), com k algarismos, e escrito na forma $n = a_{k-1} \dots a_1 a_0$, isto é, $n = a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + a_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0$, em que $a_i \in D = \{0, 1, \dots, 8, 9\}$ e $a_{k-1} \neq 0$.

Considere ainda o número n' também com k algarismos, da forma $n' = a_{k'-1} a_{k'-2} \dots a'_1 a'_0$, obtido do número n permutando (alternando ou trocando a posição) seus algarismos, isto é, a'_j ($0 \leq j \leq k$) é igual a algum a_i ($0 \leq i \leq k$). Por exemplo os números 139, 193, 319, 391, 913 e 931 são permutações obtidas do número 319.

Definição 3.2. *Sejam n e n' Um par de números distintos, ambos formados pelos mesmos k algarismos, se n' for múltiplo de n , então estes números são chamados de permúltiplos.*

Os números 102564 e 410256 são *permúltiplos*, visto que $410256 = 4 \cdot 102564$. Veja também que 21978 e 87912 são *permúltiplos*, pois $87912 = 4 \cdot 21978$. Da mesma forma, os números 10989 e 98901 são *permúltiplos*, pois $98901 = 9 \cdot 10989$.

Nosso foco é responder à seguinte pergunta:

Problema 3.1. *Dado um número inteiro positivo n com k algarismos, se trasladarmos o algarismo da unidade para a primeira posição (esquerda), quais condições podemos estabelecer para que esse novo número n' seja múltiplo de n ?*

Veja que o Problema 3.1 trata de uma classe específica de números *permúltiplos*. Por exemplo, o número $N_1 = 410256$ é uma permutação de $N = 102564$ obtida pela translação do algarismo da unidade para a primeira posição. Observamos ainda que N_1 é o quádruplo de N .

O Teorema 3.1 a seguir estabelece uma condição necessária para que dois números naturais N e N_1 sejam *permúltiplos*.

De acordo com o Problema 3.1 os algarismos dos números N e N_1 são os mesmos, de forma que N_1 é obtido de N apenas com a translação do algarismo das unidades para a esquerda.

Teorema 3.1. *Sejam N , N_1 e N_2 números naturais, dados por*

$$\begin{aligned} N &= a_1 a_2 \cdots a_{k-1} b, \\ N_1 &= b a_1 a_2 \cdots a_{k-1}, \\ N_2 &= \frac{N - b}{10} = a_1 a_2 \cdots a_{k-1}, \end{aligned}$$

com $b > 1$. Se $d = (10b - 1)$ é um divisor de R_k , então $N_1 = b \times N$.

Demonstração. Inicialmente note que $N_1 = b a_1 a_2 \cdots a_{k-1} = b \times 10^{k-1} + N_2$. Observe ainda que, para ser possível a igualdade $N_1 = b \times N$, é necessário que

$$b \times N = b \times 10^{k-1} + \frac{N - b}{10} \Rightarrow \quad (11)$$

$$10b \times N = b \times 10^k + N - b \Rightarrow$$

$$N = \frac{b(10^k - 1)}{10b - 1} \Rightarrow$$

$$N = \frac{9b \times R_k}{10b - 1}. \quad (12)$$

Como por hipótese $d = (10b - 1)/R_k$, a expressão para N obtida em (12) representa um número inteiro. Portanto, satisfaz a igualdade $N_1 = b \times N$. $\square$

Utilizando as afirmações feitas sobre os números *Repunidades* pode-se verificar que:

$$\begin{aligned} N &= \frac{27 \times R_{28}}{29} = 1034482758620689655172413793, \\ N_1 &= 3103448275862068965517241379 = 3 \times N. \end{aligned}$$

E ainda,

$$\begin{aligned} N &= \frac{18 \times R_{18}}{19}, & N_1 &= 2 \times N. \\ N &= \frac{54 \times R_{58}}{59}, & N_1 &= 6 \times N. \\ N &= \frac{72 \times R_{78}}{79}, & N_1 &= 8 \times N. \\ N &= \frac{81 \times R_{88}}{89}, & N_1 &= 9 \times N. \end{aligned}$$

Note que $d = 69$ divide R_{66} . De fato, pois $66 = 3 \cdot 22$, segue que R_3 e R_{22} são divisores de R_{66} . E ainda, 3 divide R_3 e tem-se que 23 divide R_{22} . Daí obtemos que $69 = 3 \cdot 23$ divide R_{66} , ou seja, $R_{66} = 69 \cdot d$ para algum d natural.

Logo, teremos

$$\begin{aligned} N &= \frac{63 \times R_{66}}{69} \\ &= 101449275362318840579710144927536231884057971014492753623188405797 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} N_1 &= 7 \times N \\ &= 7101449275362318840579710144927536231884057971014492753623188405797. \end{aligned}$$

E finalmente,

$$\begin{aligned} N &= \frac{45 \times R_{42}}{49} = 102040816326530612244897959183673469387755, \\ N_1 &= 510204081632653061224489795918367346938775 = 5 \times N. \end{aligned}$$

Os resultados apresentados podem ser vistos detalhadamente em [3].

4 Considerações finais

No contexto de um mestrado profissional em matemática, os conceitos de matemática recreativa, como base numérica, primalidade e divisibilidade, oferecem ferramentas para o desenvolvimento de habilidades pedagógicas e para a aplicação criativa e acessível de métodos matemáticos.

A Teoria Elementar dos Números proporciona uma base para o ensino de matemática, além de servir como ponto de partida para a exploração de problemas mais complexos. O estudo das propriedades de classes de números inteiros não apenas aprofunda a compreensão de tópicos avançados, mas também ajudam a resolver questões que, à primeira vista, parecem simples. Nesse sentido, a matemática recreativa desempenha um papel importante, pois torna o aprendizado mais envolvente e estimulante, ao mesmo tempo em que preserva o rigor matemático necessário.

Referências

- [1] A. H. Beiler. **11111...111**. 1a. ed. Dover: Mathematics Entertains, 1966.
- [2] F. S. Carvalho e Costa E. A. “Escrever o número 11...111 como produto de dois números”. Em: **Revista do Professor de Matemática** 87 (2015), pp. 15–19.
- [3] F. S. Carvalho e Costa E. A. “Números Permúltiplos”. Em: **Revista do Professor de Matemática** 106 (2022), pp. 49–52.
- [4] F. S. Carvalho e Costa E. A. “Números Quasemonodígitos primos ou quadrados perfeitos”. Em: **Revista Eletrônica Paulista de Matemática** 22 (2022), pp. 50–62.
- [5] H. A. Dubner. “Repunit R49081 is a Probable Prime”. Em: **Math. Comput.** 71 (2002), pp. 833–835.
- [6] H. C. Williams e H. A. Dubner. “Primality of R1031”. Em: **Math. of Computation** 47 (1986), pp. 703–711.