



III ENCONTRO DE MATEMÁTICA
DA REGIÃO DO CAPIM

SABERES MATEMÁTICOS TRADICIONAIS
DA REGIÃO DO CAPIM

Fomento:



NÚMEROS FIGURADOS NA ESCOLA BÁSICA: BALAS DE CANHÕES E LATAS DE FEIJÕES

Douglas Gaia Machado – douglas.g.machado@aluno.uepa.br
Universidade do Estado do Pará
Belém - Pará

Erica Silva Barbosa – erica.s.barbosa@aluno.uepa.br
Universidade do Estado do Pará
Belém - Pará

Francel Tavares Lima — tavaresfrancel@gmail.com
Universidade do Estado do Pará
Belém - Pará

Rubens Vilhena Fonseca – rubens.vilhena@uepa.br
Universidade do Estado do Pará
Belém - Pará

Resumo

Este artigo explora a rica história e as diversas aplicações dos números figurados no Ensino Fundamental. Através de uma abordagem lúdica e contextualizada, o texto apresenta os números triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais, estabelecendo relações entre eles e conectando-os com situações do cotidiano, como a organização de latas de feijão em pilhas piramidais e a disposição de balas de canhão. O estudo aprofunda a relação entre números triangulares e quadrados, utilizando representações visuais e demonstrações algébricas. Além disso, discute o Triângulo de Pascal e suas propriedades, apresentando uma versão diferenciada e explorando suas conexões com os números figurados. A conclusão enfatiza a importância de introduzir os números figurados na Escola Básica, promovendo o desenvolvimento do pensamento matemático, a visualização espacial e a resolução de problemas. A abordagem interdisciplinar, que conecta a Matemática com outras áreas do conhecimento, como a história e as ciências, torna o aprendizado mais significativo e engajador.

Palavras-chave: números figurados; triângulo de pascal; ensino fundamental; visualização espacial.

Área e Nível de Ensino: Matemática - Ensino Fundamental.

1 INTRODUÇÃO

É bem conhecido que balas de canhão podem ser empilhadas em pirâmides estáveis, onde a base pode ser um triângulo ou um quadrado. O primeiro a examinar esse problema foi o famoso astrônomo J. Kepler nos anos 1600 d.C. (Szpiro, 2003), concluindo que o empilhamento ideal, que deixa um mínimo de espaço livre entre as balas de canhão, é aquele onde as camadas subsequentes são organizadas de modo que as bolas na camada superior se encaixem perfeitamente nos espaços deixados pelas bolas na camada inferior. Queremos aqui examinar os detalhes desses empilhamentos e mostrar como isso naturalmente leva a fórmulas que fornecem não apenas o número de balas de canhão em uma camada, mas também o número total de bolas na pirâmide resultante.

A exploração dos números figurados remonta às civilizações antigas; os gregos, em particular, demonstraram grande fascínio por essas representações numéricas geométricas. A ausência de uma notação algébrica eficiente naquela época impulsionou a busca por métodos visuais e intuitivos para compreender as relações numéricas, e os números figurados surgiram como uma ferramenta valiosa nesse contexto.

Embora suas origens sejam antigas, os números figurados continuam a oferecer *insights* relevantes para a compreensão contemporânea de conceitos matemáticos. Este artigo busca demonstrar a aplicabilidade dos números figurados em diversos contextos, com foco em sua relação com as progressões aritméticas e suas possíveis aplicações em problemas práticos.

A literatura educacional, no entanto, apresenta lacunas na compreensão e utilização dos números figurados. Frequentemente, o ensino se restringe aos números triangulares e quadrados, negligenciando a generalização para outros polígonos e suas propriedades. Essa lacuna é evidenciada por inconsistências terminológicas encontradas em publicações recentes, como o uso inadequado do termo “número hexagonal” (Clements, 1974).

Embora a maioria dos professores em formação aprenda algo sobre os dois tipos mais simples de números figurados (números triangulares e quadrados), eles frequentemente não têm certeza das regras formais para construir números figurados em geral. Este ponto é sublinhado por três artigos recentes na revista *Mathematics in School*, (Atherton, 1974; Clements, 1974; Powell, 1975), que usam incorretamente o termo “número hexagonal”. Todos os números figurados são as somas parciais de progressões aritméticas grande parte de sua importância reside na luz que lançam sobre os métodos de somar Progressões Aritméticas e outras séries.

Uma ideia útil a esse respeito é a de um *gnomon*¹; embora estritamente o nome *gnomon* deva ser reservado para as peças em forma de L que são usadas para construir os números quadrados (🧩), nós usamos aqui para significar qualquer forma que seja usada para construir uma sequência de números figurados.

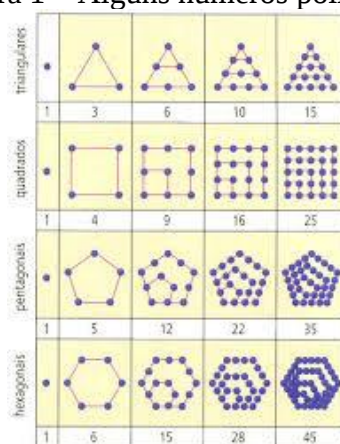
2 APORTES TEÓRICOS

Números figurados, bem como a maioria das classes de números especiais, tem uma longa e rica história. Eles foram introduzidos pela Escola Pitagórica (VI século a.C.) como uma tentativa de conectar Geometria e Aritmética. Seguindo o seu credo de que “tudo é número”, procuraram representar qualquer inteiro positivo como um conjunto de pontos no plano (Heath, 1981).

Em geral, um número figurado é um número que pode ser representado por um padrão geométrico regular e discreto de pontos igualmente espaçados.

Dizemos que um número é poligonal se o arranjo formar um polígono regular em forma de triângulo, quadrado, pentágono, e assim por diante, conforme a Figura 1 ilustra.

Figura 1 – Alguns números poligonais

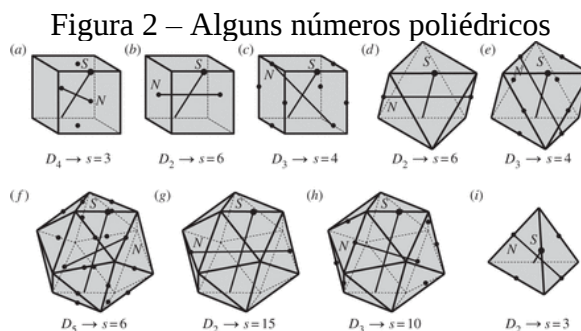


¹ A palavra *gnomon* passou a representar, na matemática grega, a figura em L que precisa ser adicionada a um quadrado para produzir outro quadrado.



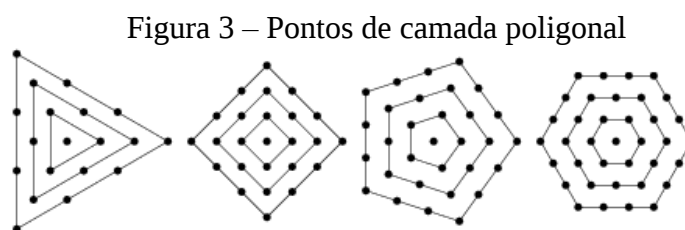
Por exemplo: o quadrado de lado 5 se transforma no quadrado de lado 6 pela adição de um *gnomon* com 11 unidades.

Um número é dito poliédrico se o arranjo formar um poliedro regular, como ilustrado na Figura 2.



Em particular, números poligonais generalizam números que podem ser organizados como um triângulo (números triangulares), ou um quadrado (números quadrados), para um m -gonal para qualquer inteiro $n \geq 3$.

Além dos números poligonais clássicos, os números poligonais centralizados podem ser construídos no plano a partir de pontos. Cada número poligonal centralizado é formado por um ponto central, rodeado por camadas poligonais com um número constante de lados. Cada lado de uma camada poligonal contém um ponto a mais do que qualquer lado da camada anterior.

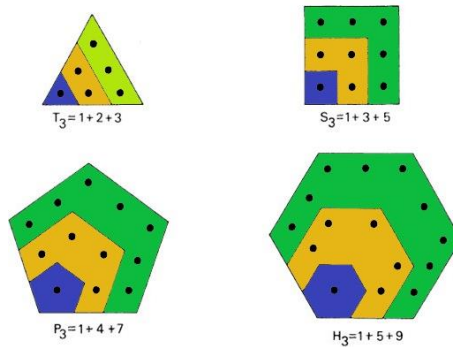


3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 Números Triangulares

A Figura 4 mostra o método de construção aplicado aos primeiros números triangulares, quadrados, pentagonais e hexagonais.

Figura 4 – Método de construção



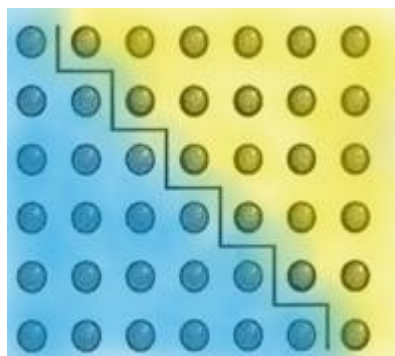
Números triangulares são a soma dos primeiros números naturais consecutivos. O n -ésimo número triangular pode ser representado como a soma dos primeiros n números naturais. A busca por uma fórmula para o n -ésimo número triangular (T_n) é equivalente a encontrar uma fórmula para a soma dos primeiros n números naturais.

Uma abordagem visualmente intuitiva para encontrar essa fórmula envolve a disposição dos números triangulares em pares. Ao unir dois números triangulares “cabeça a cauda”, forma-se um retângulo com dimensões n e $n + 1$ unidades (Figura 5). A área desse retângulo é igual a $2T_n$. Portanto, podemos escrever a equação:

$$2T_n = n(n + 1)$$

$$T_n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

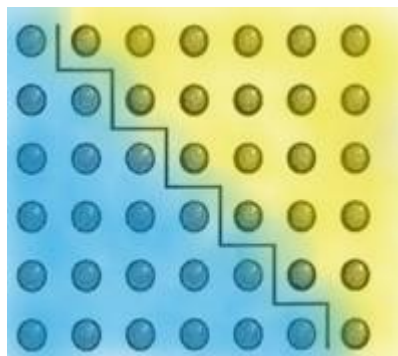
Figura 5 – $T_n + T_n = n(n + 1)$, para o caso $n=5$



3.2 Relação entre números triangulares e números quadrados

Uma relação importante entre os números triangulares (T_n) e os números quadrados (S_n) é apresentada na Figura 6. A soma do n -ésimo número triangular com o $(n - 1)$ -ésimo número triangular é igual ao n -ésimo número quadrado: $T_n + T_{n-1} = S_n$.

Figura 6 – $T_n + T_{n-1} = S_n$, para o caso $n=5$



Essa relação será explorada em mais detalhes posteriormente, ao considerarmos as somas dos números quadrados.

Conforme ilustrado na Figura 4, os números quadrados são formados pela adição dos números ímpares consecutivos:

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 1 + 3$$

$$3^2 = 1 + 3 + 5,$$

e assim por diante. Portanto, a soma dos primeiros n números ímpares é igual a n^2 .

Uma observação adicional, menos evidente, é que todo número ímpar (exceto a unidade) pode ser parte de um Triplo Pitagórico². Isso decorre do fato de que todo número ímpar aparece como um *gnomon* em algum número quadrado ímpar (como 9, 25, 49, ...) e os outros dois membros do triplo são números naturais consecutivos. No entanto, é importante ressaltar que nem todos os triplos pitagóricos primitivos podem ser formados dessa maneira: (8, 15, 17) fornece um contraexemplo.

3.3 Números Pentagonais e Hexagonais

Os números Pentagonais (P_n) e Hexagonais (H_n) apresentam menos interesse particular. As fórmulas para esses números (e, portanto, para as progressões aritméticas das quais são derivadas) podem ser obtidas observando que:

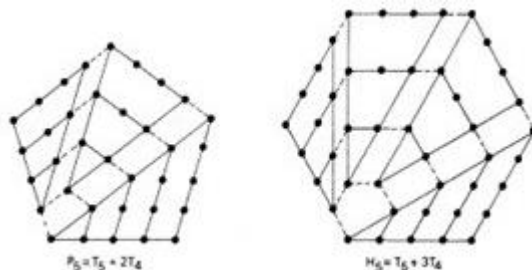
$$P_n = T_n + 2T_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + n(n-1) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

e

$$H_n = T_n + 3T_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3(n-1)}{2} = n(2n-1).$$

² Um triplo pitagórico primitivo é um conjunto de três números inteiros que são primos entre si e que satisfazem o Teorema de Pitágoras. Alguns exemplos de triplos pitagóricos primitivos são: (3, 4, 5), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41), ...

Figura 7 – Números Pentagonais (P_n) e Hexagonais (H_n)



4 RESULTADOS E ANÁLISES

4.1 O Problema das Pilhas Piramidais

Um problema interessante consiste em determinar a quantidade de latas de feijão (ou balas de canhões!) contidas em uma pilha piramidal de dimensões específicas.

Figura 8 – a) latas de feijão em pilha piramidal; b) bala de canhão em pilha piramidal

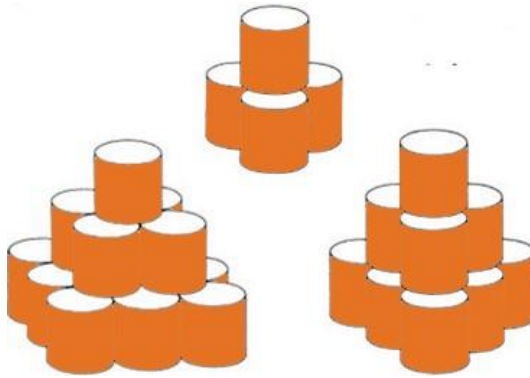


A quantidade dependerá, naturalmente, do tipo de pirâmide escolhido e de suas dimensões (em termos do número de latas por lado).

4.2 Pirâmide Triangular

No caso de uma pirâmide triangular (Figura 9),

Figura 9 – Latas em uma pilha piramidal



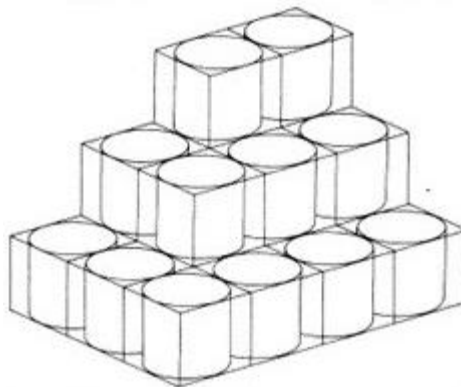
diminuindo uniformemente até uma única lata no ápice, precisamos encontrar a soma

$$1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2}$$

A Figura 10 ilustra como seis dessas pirâmides podem ser combinadas para formar um paralelepípedo com dimensões n , $n+1$ e $n+2$ unidades. Portanto, a soma desejada é:

$$\frac{6n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Figura 10 – Latas em uma pilha piramidal juntas



4.3 Pirâmide Quadrada

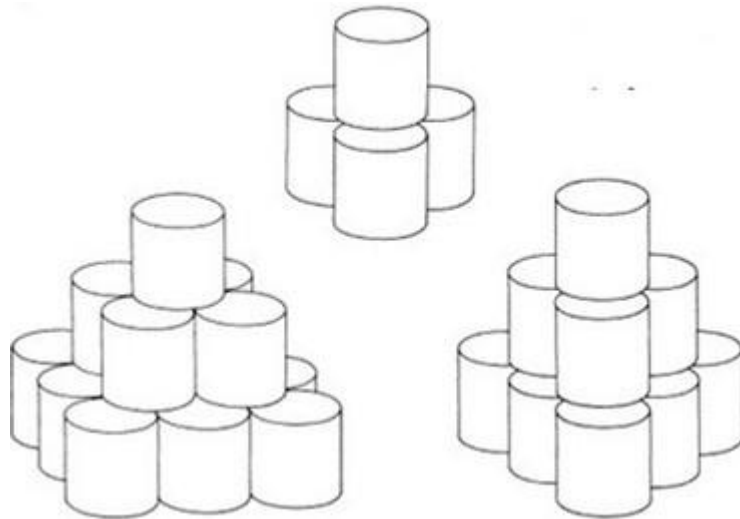
Para uma pirâmide quadrada, é necessário encontrar a soma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Uma abordagem simplificada consiste em dividir cada camada quadrada em duas camadas triangulares (já que $S_n = T_n + T_{n-1}$).

A pirâmide quadrada pode, então, ser decomposta em duas pirâmides triangulares, uma de lado n e outra de lado $n-1$ (Figura 11).

Figura 11 – Latas em uma pilha piramidal separadas



Utilizando o resultado obtido para pirâmides triangulares, deduzimos que o número de itens em uma pirâmide quadrada é:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ambos esses resultados podem ser obtidos por meio de manipulações algébricas convencionais. No entanto, os métodos apresentados neste artigo oferecem uma abordagem mais intuitiva e eficiente, evitando cálculos complexos.

4.4 O Triângulo de Pascal

É amplamente conhecido que os coeficientes dos termos na expansão de $(a+b)^n$ formam um padrão regular, geralmente representado pelo “Triângulo de Pascal” (Figura 12, que mostra o método de construção).

Figura 12 – Método de construção Pascal

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
1	7	21	35	35	21	7
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-

Uma vez compreendido como as linhas sucessivas do triângulo são obtidas, pode-se observar que uma diagonal específica pode gerar os números triangulares (Figura 13 mostra $T_8 = 36 = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 8$).

Figura 13 – Linhas sucessivas do triângulo

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

A próxima diagonal gerar os números piramidais triangulares (Figura 14 mostra o sétimo número desse tipo, $84 = 1 + 3 + 6 + 10 + \dots + 28$).

Figura 14 – Números piramidais triangulares

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

4.5 O Triângulo Diferenciado de Pascal

Retornando à Figura 4 e analisando novamente os *gnomons* utilizados para os números triangulares, podemos observar que eles aumentam uma unidade de cada vez, sendo de fato os números naturais 1, 2, 3, Os *gnomons* para os números quadrados aumentam duas unidades de cada vez (1, 3, 5, ...), os para os números pentagonais aumentam três unidades de cada vez (1, 4, 7, ...), e assim por diante.

Isso sugere a construção de triângulos de Pascal modificados, mostrados nas Figuras 15 e 16, que representam os números quadrados (e piramidais quadrados) e pentagonais (e piramidais pentagonais), respectivamente. O método de construção é simples e geral: escreva unidades na margem esquerda do triângulo e as diferenças apropriadas na margem direita.

Figuras 15 – Triângulos de Pascal modificados

1	2								
1	3	2							
1	4	5	2						
1	5	9	7	2					
1	6	14	16	9	2				
1	7	20	30	25	11	2			
1	8	27	50	55	36	13	2		
1	9	35	77	105	91	49	15	2	
1	10	44	112	182	196	140	64	17	2

Figuras 16 – Triângulos de Pascal modificados

1	3								
1	4	3							
1	5	7	3						
1	6	12	10	3					
1	7	18	22	13	3				
1	8	25	40	35	16	3			
1	9	33	65	75	51	19	3		
1	10	42	98	140	126	70	22	3	
1	11	52	140	238	266	196	92	25	3

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONTRIBUIÇÕES

Este artigo é apenas um incentivo para o estudo sobre os números figurados. Promover a pesquisa em artigos sobre o tema revelará muitos novos problemas baseados em suas propriedades que não foram mencionados aqui.

Não se pode negar a importância de introduzir os números figurados na escola básica, promovendo o desenvolvimento do pensamento matemático, a visualização espacial e a resolução de problemas. A abordagem interdisciplinar, que conecta a Matemática com outras áreas do conhecimento, como a história e as ciências, torna o aprendizado mais significativo e engajador.

Esperamos que o presente estudo possa servir de inspiração para outras práticas pedagógicas similares, estimulando docentes a sempre experimentarem recursos diferenciados em suas salas de aula.

REFERÊNCIAS

ATHERTON, R. Hexagonal numbers in context. **Mathematics in School**, [s. l.], v. 3, n. 6, p. 28-29, November 1974.

CLEMENTS, M. G. Hexagonal numbers. **Mathematics in School**, [s. l.], v. 3, n. 3, p. 32. May 1974.

HEATH, S. T. **A history of Greek mathematics**. New York: Dover Publications, 1981. 2. v. p. 316-331.

POWELL, M. R. More Hexagonal numbers. **Mathematics in School**, [s. l.], v. 4, n. 3, p. 13-14. May, 1975.

SZPIRO, G. G. **Kepler's Conjecture**: how some of the greatest minds in history helped solve one of the oldest math problems in the world. New Jersey: John Wiley & Sons, 2003.