



III ENCONTRO DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA DA REGIÃO
DO CAPIM
SABERES MATEMÁTICOS TRADICIONAIS
DA REGIÃO DO CAPIM

16 A 18 DE OUTUBRO DE 2024

ESTRATÉGIAS DE PENSAMENTO USADAS DURANTE A RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE CRUZAR UM RIO E ENCONTRAR PADRÕES

Beatriz Favacho de Oliveira – beatrizfavacho6@gmail.com
Universidade do Estado do Pará
Belém - Pará

Lorany Silva Souza – loranysoouza955@gmail.com
Universidade do Estado do Pará
Belém - Pará

Dhemerson Rodrigues Costa – dhemerson.r.costa@aluno.uepa.br
Universidade do Estado do Pará
Belém - Pará

Rubens Vilhena Fonseca – rubens.vilhena@uepa.br
Universidade do Estado do Pará
Belém - Pará

Resumo:

Este artigo apresenta uma proposta didática a ser aplicada no Ensino Fundamental e Médio, a partir de uma análise detalhada das estratégias de pensamento mobilizadas por estudantes ao resolver um problema adaptado do clássico “travessia de um rio”. A pesquisa, desenvolvida em sala de aula, investigou as diferentes abordagens utilizadas pelos estudantes, as dificuldades encontradas e as descobertas realizadas durante o processo de resolução. A análise dos dados permitiu identificar padrões nas estratégias de resolução, evidenciando a importância de habilidades como a visualização espacial, a lógica e a sistematização. O artigo também discute como problemas de travessia podem ser utilizados como ponto de partida para a introdução de conceitos algébricos, como a representação de variáveis e a construção de tabelas. São apresentadas conexões entre as estratégias de resolução e as diversas diretrizes nacionais e internacionais para o ensino de Matemática, destacando a importância de promover o desenvolvimento do pensamento matemático e a resolução de problemas.

Palavras-chave: Problemas de travessia; resolução de problemas; pensamento matemático; ensino de Matemática; álgebra.

Área e Nível de Ensino: Matemática - Ensino Fundamental e Médio.

1 INTRODUÇÃO

Como professores, muitas vezes tentamos encontrar maneiras diferentes de apresentar a nossos alunos novas experiências matemáticas. O Problema da Travessia do Rio, por exemplo,

é um que combina resolução de problemas com a introdução de padrões numéricos, desenvolvendo a álgebra de gráficos de reta, fornecendo ao professor oportunidades de fazer conexões entre diversos tópicos ou áreas da Matemática.

Nesse viés, é válido destacar a importância de atividades desafiadoras e lúdicas para o desenvolvimento do pensamento matemático. A resolução de problemas como a Travessia do Rio proporciona aos alunos a oportunidade de aplicar seus conhecimentos em situações concretas, desenvolvendo habilidades essenciais para a vida. Além disso, a atividade promove a colaboração, a comunicação e a autonomia, contribuindo para a formação de estudantes mais engajados e motivados.

Posto isto, este artigo tem por objetivo apresentar uma proposta didática a ser aplicada no Ensino Fundamental e Médio, a partir de uma análise detalhada das estratégias de pensamento mobilizadas por estudantes ao resolver um problema adaptado do clássico “travessia de um rio”.

2 APORTE TEÓRICO

Os Problemas sobre Travessias através de um Rio são um tipo de quebra-cabeça matemático clássico, que envolvem o transporte de objetos de uma margem de um rio para a outra. Uma das interpretações mais clássicas envolve um lobo, uma cabra e um repolho. O objetivo do quebra-cabeça é fazer o menor número possível de viagens, e muitas vezes há restrições sobre quantos itens ou quais itens podem ser transportados ao mesmo tempo. Uma das primeiras versões do quebra-cabeça aparece em *Propositiones ad acuendos iuvenes* (“Problemas para aguçar os jovens”), acreditado ser uma das mais antigas coletâneas de quebra-cabeças matemáticos escritos em latim. A coletânea é atribuída a Alcuin de York (735-804), um monge anglo-saxão, que a escreveu no final do século VIII (Wells, 2012).

Uma tradução para o inglês dos problemas de Alcuin é fornecida por Hadley e Singmaster (1992), e o original em latim, bem como uma tradução para o alemão, é fornecido por Folkerts e Gericke (1993). Ambos trabalhos rastreiam muitos dos problemas até suas origens nas fontes clássicas, no entanto os “Problemas de Travessia do Rio” parecem ser os primeiros a surgir.

Nesse sentido, a teoria de Piaget (1973) e Vygotsky (1988) podem ser utilizadas para explicar como os estudantes constroem o conhecimento matemático a partir de suas experiências e interações com o problema. Inagaki e Hatano (1983) sugerem um modelo que tenta sintetizar as contribuições de Vygotsky e Piaget, analisando o papel das interações sociais

entre os alunos (interações horizontais) no processo de aprendizagem. Eles consideram que a integração do conhecimento é mais forte quando as crianças são instigadas a defender seu ponto de vista. Isto acontece mais naturalmente quando elas tentam convencer seus colegas.

A teoria de Ausubel, Novak e Hanesian (1980) pode ser aplicada para analisar como o problema de travessia pode ser utilizado para criar situações de aprendizagem significativas e promover a conexão entre novos conhecimentos e os conhecimentos prévios dos estudantes.

As quatro fases da resolução de problemas propostas por Polya (1978), (compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e examinar a solução) podem servir como um *framework* para analisar o processo de resolução dos estudantes.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O tipo de problema que vamos apresentar aqui, em sua versão original, apareceu no livro “*Recréations mathématiques*”, Tome 1, de Edouard Lucas, publicado em 1882. O título do problema era: “*La Traversée D’un Régiment Dans un Batelet*”:

Uma companhia de infantaria chega à beira de um rio, mas a ponte está quebrada e o rio é profundo. O capitão nota dois meninos brincando em um pequeno barco à beira do rio. O barco é tão pequeno que só pode carregar um soldado por vez. Como o capitão fará para que todos os soldados de sua companhia cruzem o rio? (Lucas, [1882], 1891, p. 5, tradução própria).

Iremos adaptar para uma versão que não cause perguntas embaraçosas do tipo: qual o peso de cada soldado? qual o peso de cada criança? etc. Vejamos:

“Num determinado planeta, 8 adultos e 2 crianças precisam cruzar um rio em um barco a remo (Figura 1). Você consegue determinar como levar todos para o outro lado e quantas travessias são necessárias, dadas as seguintes informações:

- 1) neste planeta todos os adultos têm o mesmo peso;
- 2) neste planeta cada criança sempre pesa metade do peso de um adulto;
- 3) o barco só pode transportar o peso de um adulto;
- 4) adultos e crianças sabem remar o barco;
- 5) o barco deve ter alguém nele para remá-lo”.

Figura 1 – Ilustração de 1 adulto e de 1 criança no planeta



Fonte: Criado pelos autores no programa *Copilot da Microsoft* (2024)

É altamente recomendável não explorar a atividade com antecedência, ou seja, o ideal é introduzir a atividade sem explicar demais e sem sugerir estratégias que os estudantes possam usar. Também deve-se evitar dar respostas diretas sempre que possível, e incentivar os estudantes a explorarem, experimentar e aprender com seus erros.

Conte para os alunos que a “Travessia do Rio” é um dos quebra-cabeças mais antigos e conhecidos da história. Tem mais de 1000 anos e foi encontrado em todo o mundo: na África, Europa, Ásia e até mesmo nos Simpsons! Use figuras ou peças para demonstrar as regras do quebra-cabeça.

A resolução de problemas matemáticos é uma habilidade fundamental para o desenvolvimento do pensamento lógico e crítico. Para tornar esse aprendizado mais divertido e engajador, podemos utilizar a encenação como ferramenta pedagógica.

Vejamos como realizar a atividade:

1. **Preparação:** Crie um “rio” no chão da sala de aula utilizando fita adesiva. Selecione alguns alunos para representar as pessoas que precisam atravessar o rio e outro para representar o barco.
2. **Encenação:** Os alunos representarão a travessia do rio, seguindo as regras do problema. O objetivo é encontrar a menor quantidade de viagens necessárias para que todos cheguem ao outro lado do rio.
3. **Observação:** Os demais alunos observarão a encenação e contarão o número de viagens realizadas.
4. **Discussão:** Após a encenação, promova uma discussão sobre as diferentes soluções encontradas e as dificuldades enfrentadas.
5. **Registro:** Os alunos registrarão suas observações e reflexões sobre a atividade, utilizando diferentes formas de representação, como desenhos, diagramas ou textos.

Um ponto importante de ensino aqui é destacar o segredo de cada adulto precisar de quatro travessias do barco. Muitos alunos podem captar esse fato rapidamente, mas falharem em perceber a importância dessa etapa na resolução do problema.

Vale ressaltar que a adaptação da atividade às características dos alunos é essencial para garantir o sucesso da aprendizagem. O uso de materiais concretos e a valorização das diferentes formas de pensar contribuem para um ambiente de aprendizagem mais inclusivo e motivador.

4 RESULTADOS E ANÁLISES

Você pode tentar modelar esse problema com dois tipos diferentes de pequenos objetos, como moedas ou cliques de papel, para representar as crianças e os adultos. Na sala de aula, recomendamos usar cubos coloridos para representar as crianças e os adultos. A seguir, no Quadro 1, uma tabela de resolução das travessias, em que se chega a 33 viagens:

Quadro 1 – Esquema de travessias (viagens)

Duas crianças e os adultos	O rio	Outra margem
A ₈ C ₁ C ₂	-	-
A ₈	C ₁ C ₂ →	-
A ₈	←C ₂	C ₁
A ₇ C ₂	A ₁ →	C ₁
A ₇ C ₂	←C ₁	A ₁

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Explicação:

- (Viagem 1): Comece com 2 crianças indo para o outro lado.
- (Viagem 2): A criança 2 retorna, deixando a criança 1 do outro lado do rio.
- (Viagem 3): Um adulto cruza o rio sozinho.
- (Viagem 4): A criança 1 retorna para trazer o barco de volta.

Leva 4 viagens para levar um adulto para o outro lado do rio. Essas mesmas quatro viagens se repetem para cada adulto que precisa cruzar o rio. Isso equivale a 32 viagens para 8 adultos. A última, 33ª viagem, é para levar as duas crianças juntas para o outro lado do rio:

$33 \text{ viagens} = 8 \text{ adultos} \times 4 + 1$

Apesar de alguns alunos perceberem a necessidade de quatro travessias, podem questionar o fato de a resposta não ser um múltiplo de 4.

4.1 Dificuldades e descobertas

É comum que os alunos encontrem dificuldades em visualizar todas as possibilidades de travessia e em encontrar a solução mais eficiente. No entanto, ao trabalhar em grupo e compartilhar suas ideias, eles poderão desenvolver estratégias mais eficazes.

4.2 Introduzindo a Álgebra

O quebra-cabeça da travessia é uma ótima atividade para fazermos com nossos alunos! É aqui que a Álgebra entra em cena! Ela é como uma ferramenta que nos permite usar letras para representar números.

A Álgebra nos ajuda a organizar nossas ideias e a resolver problemas de forma mais eficiente. Com ela, podemos resolver problemas mais complexos e encontrar padrões que se aplicam a diversas situações. A linguagem algébrica é uma forma universal de comunicar ideias matemáticas.

Não há dificuldade em o aluno aceitar usar a letra A para representar um adulto e C para representar uma criança. Assim, ele pode escrever o problema de uma forma mais curta e prática. E, para o total das viagens do barco, podemos usar a letra T para representar o número de travessias (viagens).

Durante o processo, pode-se sugerir uma mudança na quantidade de adultos, mantendo o número de crianças. O que aconteceria com o número de viagens? Podemos fazer várias experiências, usando fichas coloridas ou bloquinhos para representar os adultos e as crianças. Depois de várias experiências, pode-se organizar os resultados em uma tabela. Assim, fica mais fácil ver um padrão e entender como o número de adultos influencia o número de viagens.

4.3 Tabelas

A maioria dos alunos será capaz de gerar a tabela abaixo rapidamente. Ela mostra em quantas viagens teremos um determinado número de adultos na segunda margem, com as duas crianças:

Quadro 2 – Tabela a ser gerada

Adultos (A)	0	1	2	3	4	5
Viagens (T)	1	5	9	13	17	21

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Quadro 3 – Tabela preenchida

Travessia	Lado A	Lado B
Travessia 1	8A, 0C	0A, 2C
Travessia 2	8A, 1C	0A, 1C
Travessia 3	7A, 1C	1A, 1C
Travessia 4	7A, 2C	1A, 0C
Travessia 5	7A, 0C	1A, 2C
Travessia 6	7A, 1C	1A, 1C
Travessia 7	6A, 1C	2A, 1C
Travessia 8	6A, 2C	2A, 0C
Travessia 9	6A, 0C	2A, 2C
Travessia 10	6A, 1C	2A, 1C
Travessia 11	5A, 1C	3A, 1C
Travessia 12	5A, 2C	3A, 0C
Travessia 13	5A, 0C	3A, 2C
Travessia 14	5A, 1C	3A, 1C
Travessia 15	4A, 1C	4A, 1C
Travessia 16	4A, 2C	4A, 0C
Travessia 17	4A, 0C	4A, 2C
Travessia 18	4A, 1C	4A, 1C
Travessia 19	3A, 1C	5A, 1C
Travessia 20	3A, 2C	5A, 0C
Travessia 21	3A, 0C	5A, 2C

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

O padrão para o menor número de travessias logo emergirá. É importante relacionar isso ao contexto de encenação e ao fato de a turma ter visto cada adulto cruzar o rio com o barco, fazendo quatro viagens. Podemos usar a abordagem de padrão numérico para desenvolver uma regra algébrica para ele. Usando as primeiras diferenças de 4, no padrão para o número de travessias, os alunos conseguem uma visualização mais rápida para a regra que conecta A e T.

Então, colocando esses números em uma tabela (Quadro 1), criaremos o padrão:

Quadro 4 – Tabela com padrão

Adultos (A)	Travessias (T)	Padrões
0	1	$1+(0 \times 4)$
1	5	$1+(1 \times 4)$
2	9	$1+(2 \times 4)$
3	13	$1+(3 \times 4)$
4	17	$1+(4 \times 4)$

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

A partir da tabela, muitos alunos serão capazes de prever um resultado para 10 adultos. Se $A = 10$, qual é o valor de T? As anotações vão começar a parecer desnecessárias, pois eles começarão a aplicar uma regra que veem como: multiplique o número de adultos por 4 e depois adicione 1.

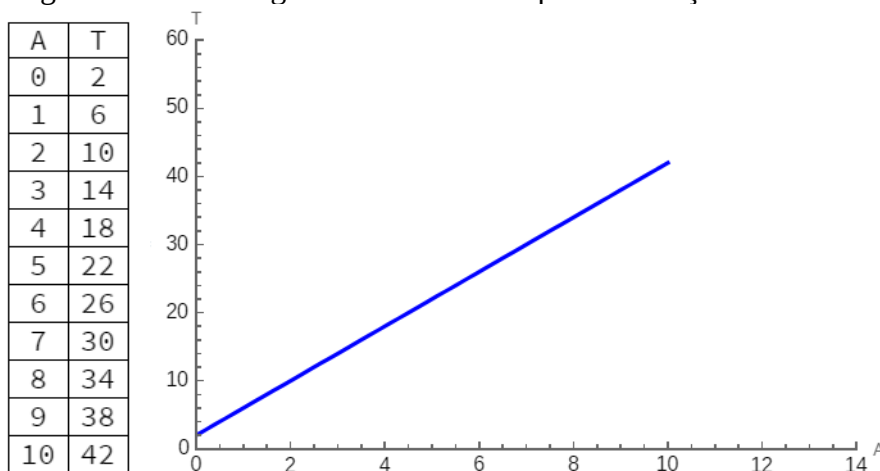
Podemos, então, levar os alunos, nesta etapa, a escreverem o resultado como:

$$T = 4 \times A + 1 \text{ ou } T = 4A + 1.$$

Há toda uma gama de material sobre esse tipo de função que acabou surgindo ao usar essa abordagem, então os professores podem fazer novas conexões.

Esse resultado pode ser facilmente simulado em uma planilha e em um gráfico, a partir dos dados produzidos. O uso de uma planilha nessa etapa permite novas aprendizagens, até mesmo o uso de *softwares* matemáticos.

Figura 2 – Tabela e gráfico ilustrando o quebra-cabeça da travessia



Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Uma tarefa útil é representar graficamente os dados produzidos pela planilha. Algumas suposições podem ser pontos de ensino muito úteis. Qual variável deve ser colocada no eixo horizontal? Por quê? Como os pontos devem ser plotados? Os pontos devem ser unidos por uma linha reta? O gráfico é discreto ou contínuo?

Os alunos podem ver rapidamente, a partir de seu próprio gráfico ou do produzido pela planilha, que esses pontos estão sobre uma linha reta. A linha cruzará o eixo vertical em 1. Relacione isso ao problema original. Se não houvesse adultos, as duas crianças poderiam cruzar em uma única viagem. Então, faz sentido.

Agora, concentre-se na inclinação da linha. Podemos relacionar essa ideia à necessidade desse barco fazer quatro viagens para um adulto atravessar. Um passo de uma unidade horizontal requer um passo de quatro unidades verticais.

4.4 Conexões matemáticas

Esta atividade foi proposta como uma introdução a uma sequência de aulas, e é importante que, em cada etapa, possamos relacionar a Matemática ao contexto de resolução de

problemas. Vimos padrões numéricos, representação algébrica, gráficos lineares com $y = mx + c$ e as diferenças entre dados discretos e contínuos, tudo apresentado em contexto. Como há bons materiais sobre esse tópico, é possível desenvolver um trabalho fazendo essas conexões.

4.5 Conexões com as diversas diretrizes nacionais e internacionais para o ensino de Matemática

Compreende-se, neste trabalho, que uma das metodologias primordiais de ensino da Matemática, nas diversas etapas de escolaridade da educação brasileira, é a Resolução de Problemas (RP). A discussão acerca de suas diferentes formas de implementação não é recente, porém, com a aprovação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), tornou-se mister investigar e compreender como se deu a inserção da RP enquanto recurso metodológico no referido documento.

Resumimos, a seguir, o que entendemos como problemas do tipo apresentado neste trabalho, que se alinham às diretrizes e às orientações da BNCC, assim como a outros documentos oficiais que orientam sobre o ensino de Matemática.

Compreender problemas e perseverar em resolvê-los. Cruzar o rio é um problema de nível elementar, pois qualquer aluno pode começar simplesmente tentando algo e vendo o que acontece, e então tentando outra coisa. Isso permite que ele se concentre no processo matemático e desenvolva a habilidade de resolução de problemas de olhar para frente, que é a capacidade de antecipar os resultados dos próximos passos. A partir daí, o aluno pode começar a pensar na solução como um caminho, e pensar no que pode atrapalhar ou ajudar seu progresso. E quando ele resolve um problema com sucesso, sempre há outro para desafiá-lo e envolvê-lo.

Construir argumentos válidos e criticar o raciocínio dos outros. Esta atividade é ótima para fazer os alunos explicarem seu pensamento, porque é enquadrada como uma história. Isso fornece pontos de partida para seus argumentos, como “Precisamos das crianças, porque...”, ou “Não podemos atravessar somente com adultos, pois os movimentos, a partir de agora...”, o que os incentiva a praticar suas habilidades de comunicação matemática.

Modelar com matemática. Esta ideia de trabalhar com restrições é importante na Matemática, e os quebra-cabeças de cruzar o rio tornam evidente a necessidade de desenvolver uma maneira organizada e legível de representá-los. Essa notação variará entre os alunos, mas eles devem ser incentivados a desenvolver algum tipo de sistema de rastreamento que faça sentido para eles. Também ajudará no raciocínio lógico, bem como na explicação do modelo pelos alunos.

Procurar e usar estrutura. O rastreamento de seus movimentos ajuda, pois os alunos podem reconhecer casos ou becos sem saída que já encontraram. Isso os auxilia a passar de tentativa e erro para compreensão e reconhecimento de padrões. Fornece a ferramenta para ajudá-los a raciocinar problemas mais desafiadores.

É importante destacar que o professor se constitui como ator fundamental e de grande responsabilidade no processo de ensino e aprendizagem da Matemática com RP, sendo ele quem deverá selecionar os problemas adequados, organizar e conduzir atividades que possibilitem a construção do conhecimento matemático por parte dos alunos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONTRIBUIÇÕES

Este estudo evidencia que atividade da Travessia do Rio, além de ser um desafio intelectualmente estimulante, proporciona aos alunos a oportunidade de desenvolver uma série de habilidades cognitivas e socioemocionais.

Em primeiro lugar, ao buscar soluções para o problema, os estudantes são instigados a pensar de forma lógica e organizada, aprimorando suas habilidades de contagem, sequenciamento e resolução de problemas. A necessidade de encontrar a melhor estratégia para a travessia também fomenta o trabalho em equipe, a troca de ideias e o desenvolvimento da criatividade.

Segundo, a criação de novas versões do problema e a exploração de outros jogos e quebra-cabeças podem aprofundar os conhecimentos em Matemática e fortalecer as habilidades de resolução de problemas. Além disso, a pesquisa sobre a história da Matemática e a importância da resolução de problemas contribui para uma visão mais ampla e significativa da disciplina.

Terceiro, ao compartilhar suas descobertas com os colegas, os alunos têm a oportunidade de consolidar seus aprendizados e construir novas conexões entre os diferentes conceitos matemáticos. A reflexão sobre o processo de resolução é fundamental para a construção de um conhecimento mais sólido e duradouro.

Os resultados desta pesquisa sugerem que a inclusão de atividades de resolução de problemas em sala de aula pode ser uma estratégia eficaz para o ensino de Matemática, especialmente para os anos iniciais. Se o aprendizado se tornar uma aventura, o professor pode despertar nos alunos a curiosidade e o entusiasmo pela Matemática. A atividade da Travessia do Rio demonstra que a aprendizagem matemática pode ser divertida e significativa, contribuindo para a formação de cidadãos mais críticos e criativos.

REFERÊNCIA

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. (Versão final).

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

FOLKERTS, M.; GERICKE, H. Die Alkuin zugeschriebenen propositiones ad acuendos iuvenes. *In*: BUTZER, P. L.; LOHRMANN, D. (ed.). **Science in Western and Eastern Civilization in Carolingian Times**. Basel/Boston/Berlin: [s. n.], 1993. p. 283-362. (Aufgaben zur Schärfung des Geistes der Jugend).

HADLEY, J.; SINGMASTER, D. Problems to sharpen the young. **The Mathematical Gazette**, [s. l.], v. 76, n. 475, p. 102-126, 1992.

PIAGET, J. **A Linguagem e o pensamento da criança**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora Fundo de Cultura, 1973.

VYGOTSKY, L. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1988.

INAGAKI, K.; HATANO, G. Collective Scientific Discovery by Young Children. **The Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition**, January, v. 5, 1983.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1978.

LUCAS, É. **Récréations Mathématiques**. [1882]. 2e édit. Paris: Gauthier-Villars, 1891.

WELLS, D. Mathematical recreations and abstract games: introduction. *In*: WELLS, D. **Games and mathematics**: subtle connection. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. p. 3.