

Generalização de uma sequência infinita definida por radicais encaixados

Thiago Rodrigues Cavalcante¹, Élis Gardel Mesquita²

PROFMAT UFT, Arraias, TO

Valdemiro Carlos Silva Filho³

Escola Municipal Ottomar Schwengber, Luís Eduardo Magalhães, BA

Resumo. Neste trabalho, realizamos um estudo de uma classe de sequências de números reais definidas por radicais encaixados, a qual generaliza sequências bem conhecidas na teoria. Mais precisamente, estaremos interessadas em analisar dois tipos de sequências, dadas pelas seguintes recorrências:

$$\begin{aligned}x_0 &= \sqrt{x}, & x_n &= \sqrt{x \pm \sqrt{x_{n-1}}}, & n \in \mathbb{N} \\ \overline{x}_0 &= \sqrt{x}, & \overline{x}_n &= \sqrt{x \pm y \sqrt{x_{n-1}}}, & n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

para x e y números reais não negativos.

Palavras-chave. Profmat, Sequências de Números Reais, Sequência definidas por Radicais Encaixados

1 Introdução

Neste trabalho é feito uma generalização de uma sequência, que com absoluta certeza, o leitor já se deparou em algum momento de sua carreira acadêmica. A sequência em questão é definida pela seguinte recorrência não linear:

$$\begin{aligned}a_0 &= \sqrt{2} \\ a_1 &= \sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ a_2 &= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\ &\vdots \\ a_n &= \sqrt{2 + a_{n-1}}.\end{aligned}\tag{1}$$

O objetivo deste trabalho é generalizar o radicando 2 da recorrência (1), para um número arbitrário x e além disso realizar um estudo detalhado em uma sequência dada por $x_n = \sqrt{x + y \cdot x_{n-1}}$, para x e y arbitrários.

¹thiago.cavalcante@mail.uft.edu.br

²elisgardel@mail.uft.edu.br

³valdemiro_carlos@yahoo.com

O famoso matemático indiano *Srinivasa Ramanujan*, lançou como desafio determinar qual o valor da expressão dada por radicais encaixados

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \cdots}}}$$

Após esperar aproximadamente seis meses sem sucesso, ele mesmo forneceu uma equação que gera a solução do problema posto, a qual é dada por:

$$x + n + a = \sqrt{ax + (n + a)^2 + x\sqrt{a(x + n) + (n + a)^2 + (x + n)\sqrt{\cdots}}}. \quad (2)$$

Considerando $x = 2$, $n = 1$ e $a = 0$ em (2), obtemos:

$$3 = 2 + 1 + 0 = \sqrt{0 \cdot 2 + (1 + 0)^2 + 2\sqrt{0(2 + 1) + (1 + 0)^2 + (2 + 1)\sqrt{\cdots}}},$$

ou seja, encontramos o número 3 como solução da expressão. Este mesmo problema pode ser encontrado no banco de questões da OBMEP-Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas [2], além deste as questões 22 e 23, do mesmo banco de questões, também envolvem sequências de radicais encaixados.

Os autores *Zimmerman e Ho*, em [5], fizeram um estudo detalhado de algumas sequências de radicais encaixados que inclui a sequência $(x_n)_n$ e deram um passo na direção a qual pretendemos seguir. Generalizando o radicando, trocando 2 por um número real positivo a , obtendo assim $(x_n)_n = (\sqrt{a}, \sqrt{a + \sqrt{a}}, \cdots)$, eles demonstraram que a sequência é convergente e obtiveram a seguinte expressão para o limite

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots}}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}. \quad (3)$$

Vale destacar que basta fazer $a = 1$ em (3), que obtemos o conhecido número áureo $(1 + \sqrt{5})/2$, ou seja,

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Diversas questões sobre radicais encaixados, ou que os utilizam para resolver problemas, são exploradas em olimpíadas de matemática no mundo todo além de estarem em diversos livros, dentre os quais podemos destacar o livro de Fundamentos de Cálculo [4] do curso de mestrado profissional-PROFMAT. Como exemplo de questão, podemos citar a Questão 6 do Nível 3 do banco de questões de 2016 da OBMEP [1], na qual se pede para encontrar o valor da expressão dada em radicais encaixados:

$$\sqrt{1 + 2014\sqrt{1 + 2015\sqrt{1 + 2016 \cdot 2018}}}. \quad (4)$$

A solução desta questão se dá, utilizando que $(n - 1)(n + 1) + 1 = n^2$, para qualquer $n \in \mathbb{R}$. Em particular, fazendo $n = 2017$ na identidade anterior, analisando dentro do último radical da expressão (4) e seguindo o mesmo processo, obtemos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + 2014\sqrt{1 + 2015\sqrt{1 + 2016 \cdot 2018}}} &= \sqrt{1 + 2014\sqrt{1 + 2015\sqrt{2017^2}}} \\
&= \sqrt{1 + 2014\sqrt{1 + 2015 \cdot 2017}} \\
&= \sqrt{1 + 2014\sqrt{2016^2}} \\
&= \sqrt{1 + 2014 \cdot 2016} \\
&= \sqrt{2015^2} \\
&= 2015.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\sqrt{1 + 2014\sqrt{1 + 2015\sqrt{1 + 2016 \cdot 2018}}} = 2015.$$

O questionamento que fica é, será que podemos generalizar este fato e encontrar uma quantidade finita de radicais encaixados que convergem para qualquer número, por exemplo o 2020? E se fossem infinitos os radicais encaixados, como o dado em (1), também garantiríamos a convergência? Neste trabalho vamos generalizar e analisar para que valores conseguimos garantir tal convergência.

2 Metodologia

A ideia utilizada na obtenção dos principais resultados é garantir que a sequência em questão é monótona (não crescente ou não decrescente) e limitada. Utilizando um resultado clássico do estudo de sequências, o qual garante que *Toda Sequência Monótona Limitada é Convergente* [3], provamos alguns dos teoremas principais. Além disso, fazendo uso de uma equação característica e da unicidade do limite de sequências, determinamos para qual valor a sequência de radicais encaixados converge.

No que segue estarei detalhando alguns dos principais resultados deste trabalho, bem como exemplos elucidando cada um dos teoremas. As demonstrações serão omitidas, mas podem ser encontradas no trabalho publicado de mesmo nome do resumo.

3 Resultados e Discussão

Um primeiro resultado deste texto e, base dos demais, é o seguinte

Teorema 3.1. *Para todo número real $x > 0$, a sequência de radicais encaixados*

$$(x_n)_n = \left(\sqrt{x}, \sqrt{x + \sqrt{x}}, \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, \dots \right)$$

é convergente.

Note que, se tomarmos $x = \sqrt{2}$, obtemos a sequência (1), citada no início deste texto. Além disso, dada a relação de recorrência $x_n = \sqrt{x + x_{n-1}}$ e, denotando por L o limite da sequência $(x_n)_n$ garantido pelo **Teorema 3.1**, este por sua vez é dado pela raiz positiva da equação quadrática $L^2 - L - x = 0$, ou seja,

$$L = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}. \quad (5)$$

A ideia agora é determinar para quais valores de x a expressão (5) faz sentido, ou seja, existe um número real L de tal modo que

$$x_n \longrightarrow L.$$

Em suma, provaremos que:

Teorema 3.2. *Dado um número real $r > 1$ e seja L definido em (5). Então existe um único número real x , tomado como $x = r(r-1)$, tal que $L = r$.*

Demonstração. Dado $r > 1$, faça $x = r(r-1)$ em (5). Deste modo, obtemos:

$$L = \frac{(1 + \sqrt{1 + 4r(r-1)})}{2} = \frac{(1 + \sqrt{1 + 4r^2 - 4r})}{2} = \frac{(1 + \sqrt{(2r-1)^2})}{2} = \frac{1 + (2r-1)}{2} = r.$$

A unicidade do número $x = r(r-1)$ é garantida devido à unicidade do limite de sequências, que é um resultado clássico no estudo de limites. $\square$

O resultado anterior, nos garante que é possível escrever um número real $r > 1$ como limite de sequências de radicais encaixados. Para isso, basta tomar $x = r(r-1)$ e utilizar a sequência $(x_n)_n$.

Exemplo 3.1. *Seja $r = 4$, então temos que o valor $x = 4(4-1) = 12$ e, segue do resultado anterior que*

$$4 = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots}}}$$

Portanto, podemos determinar diversos exemplos de números que são escritos como limite de sequências de radicais encaixados da forma descrita pela sequência $(x_n)_n$. A dúvida que fica, a qual respondemos no trabalho é, e se mudarmos o radicando da sequência nas formas

$$(\overline{x_n})_n = \left(\sqrt{x}, \sqrt{x \pm y\sqrt{x}}, \sqrt{x \pm y\sqrt{x \pm y\sqrt{x}}}, \dots \right),$$

será que podemos garantir a convergência de $(\overline{x_n})_n$? Podemos escrever números como limite de sequências desse tipo?

Inicialmente, trabalhando com sequências do tipo $\sqrt{x + y\sqrt{x + y\sqrt{x \dots}}}$, garantimos que

Teorema 3.3. *Para números reais não negativos x, y a sequência de radicais encaixados $(s_n)_n = (\sqrt{x}, \sqrt{x + y\sqrt{x}}, \sqrt{x + y\sqrt{x + y\sqrt{x}}}, \dots)$ é convergente e seu limite é dado por*

$$L_s = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4x}}{2}.$$

Neste sentido verificamos a seguinte versão do **Teorema 3.2**

Teorema 3.4. *Dados números positivos r, y com $r > y$, existe um único $x = r(r-y)$ tal que $L_s = r$.*

Para exemplificar este resultado, basta atribuímos o valor que queremos para $L_s = r$ em $x = r(r-y)$, da seguinte forma:

Exemplo 3.2. *Supondo $r = 7$ e $y = 3$, obtemos o valor $x = 7(7-3) = 28$ e, segue do resultado anterior, que*

$$7 = \sqrt{28 + 3\sqrt{28 + 3\sqrt{28 + \dots}}}$$

Se consideramos $y = 2$, temos que

$$7 = \sqrt{35 + 2\sqrt{35 + 2\sqrt{35 + \dots}}}$$

Observação 3.1. É interessante observar que, para $r = y$, obtemos $x = r(r - r) = 0$ e assim temos que

$$y = \sqrt{y\sqrt{y\sqrt{y\sqrt{\dots}}}}$$

Podemos pensar no caso em que y não seja estritamente um número inteiro. Mais precisamente, somos capazes de provar o seguinte resultado:

Teorema 3.5. Seja $r > 1$ um inteiro. Para cada divisor q de r e cada inteiro p $0 < p < r \cdot q$, sejam $y = \frac{p}{q}$ e $x = r(r - y)$. Então $r = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. De fato, essas são as possíveis escolhas para x e y quando x é um inteiro positivo e y um número racional.

Exemplo 3.3. Tomando $r = 7$, temos que $0 < y = \frac{p}{q} < 7$ e $x = 7(7 - y)$. Para facilitar as contas, vamos supor em todos os casos que o quociente de y , ou seja, $q = 7$. Mas deixamos claro que ele pode valer qualquer valor não nulo.

$$\begin{aligned} 7 &= \sqrt{48 + \frac{1}{7}\sqrt{48 + \frac{1}{7}\sqrt{48 + \dots}}} & (\text{supondo } p = 1) \\ 7 &= \sqrt{43 + \frac{6}{7}\sqrt{43 + \frac{6}{7}\sqrt{43 + \dots}}} & (\text{supondo } p = 6). \end{aligned}$$

É importante observar que o valor de p deve satisfazer $0 \leq p < 49$, pois caso contrário não estaria bem definida a sequência de radicais encaixados. Por exemplo, se $p = 49$, então $y = 7 \implies x = 0$, e $p > 49$ implicaria em $x < 0$, que não define radicais no corpo dos reais.

Considerando sequências do tipo $\sqrt{x - y\sqrt{x - y\sqrt{x - \dots}}}$, garantimos sua convergência e somos capazes de verificar que

Exemplo 3.4.

$$\begin{aligned} 4 &= \sqrt{20 - \sqrt{20 - \sqrt{20 - \dots}}} \\ 6 &= \sqrt{42 - \sqrt{42 - \sqrt{42 - \dots}}} \\ 7 &= \sqrt{91 - 6\sqrt{91 - 6\sqrt{91 - 6\sqrt{\dots}}}} \end{aligned}$$

Finalmente, quando os radicais alternam os sinais, ou seja, os casos do tipo

$$\sqrt{x - y\sqrt{x + y\sqrt{x - y\sqrt{x + y\sqrt{\dots}}}}} \quad \text{e} \quad \sqrt{x + y\sqrt{x - y\sqrt{x + y\sqrt{x - y\sqrt{\dots}}}}},$$

verificamos convergências do tipo

Exemplo 3.5.

$$\begin{aligned} 3 &= \sqrt{13 - 1\sqrt{13 + 1\sqrt{13 - 1\sqrt{\dots}}}} \\ 3 &= \sqrt{19 - 2\sqrt{19 + 2\sqrt{19 - 2\sqrt{\dots}}}} \end{aligned}$$

4 Considerações Finais

Já pensando em trabalhos futuros, deixamos o seguinte questionamento para o leitor:

Se pensarmos em generalizar o índice do radical para um número $q \neq 1/2$, será que garantimos os mesmos resultados? Se analisarmos uma sequência em que variamos os índices e o radicando ao mesmo tempo, ou seja, por exemplo do tipo $x_n = \sqrt[q]{n + x_{n-1}}$, será possível garantir a convergência e escrever números como limite dessas sequências? Uma outra pergunta que surge a respeito do comportamento assintótico deste tipo de sequência é: qual a taxa com que a convergência ocorre?

Com a certeza de que são sequências interessantes a serem estudadas, deixamos tais tópicos e outros decorrentes a cargo do leitor para futuros trabalhos.

Referências

- [1] S. Barbosa R.; Feitosa. **Banco de Questões OBEMEP**. IMPA/OBMEP. IMPA, 2016. ISBN: 978-85-244-0417-7.
- [2] S. Barbosa R.; Feitosa. **Banco de Questões OBEMEP**. IMPA/OBMEP. IMPA, 2018. ISBN: 978-85-244-0446-7.
- [3] E. L. Lima. **Curso de Análise Vol 1**. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 2006. ISBN: 9788524404689.
- [4] A. C. M. Neto. **Fundamentos de Cálculo**. Coleção PROFMAT. SBM, 2015. ISBN: 9788583371717.
- [5] C. Zimmerman S.; Ho. “On Infinitely Nested Radicals”. Em: **Mathematics Magazine** 81 (2008), pp. 3–15. DOI: 10.1080/0025570X.2008.11953522.