

CÁLCULO DE ÁREA UTILIZANDO APROXIMAÇÃO TRIGONOMÉTRICA PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Edgar Della Glustina⁽¹⁾ (edgar.giustina@ifc.edu.br)

⁽¹⁾ Instituto Federal Catarinense; Educação

RESUMO: *Este trabalho tem como foco principal o cálculo de áreas utilizando aproximação trigonométrica com o método dos mínimos quadrados. O método dos mínimos quadrados trabalha com modelos matemáticos e com dados experimentais minimizando a soma dos quadrados das diferenças entre valores observados e valores estimados. No caso desse trabalho, para o cálculo de áreas, utilizou-se funções trigonométricas que são adequadas para modelar formas periódicas. O processo envolve ajustar uma função trigonométrica aos dados coletados e, em seguida, calcular a área integrando a função ajustada. O ajuste é realizado para reduzir o impacto de erros e imprecisões nos dados. O método demonstrou ser eficaz na estimativa de áreas, proporcionando uma aproximação precisa mesmo com dados ruidosos ou incompletos. Os resultados confirmam a utilidade do método dos mínimos quadrados e funções trigonométricas para aplicações em engenharia e ciências aplicadas.*

PALAVRAS-CHAVE: *Método dos Mínimos Quadrados, Aproximação trigonométrica, Cálculo de Área, Integral.*

AREA CALCULATION USING TRIGONOMETRIC APPROXIMATION WITH THE LEAST SQUARES METHOD

ABSTRACT: *This work primarily focuses on calculating areas using trigonometric approximation with the least squares method. The least squares method deals with mathematical models and experimental data by minimizing the sum of the squares of the differences between observed and estimated values. In this work, for area calculation, trigonometric functions were used as they are suitable for modeling periodic shapes. The process involves fitting a trigonometric function to the collected data and then calculating the area by integrating the fitted function. The fitting is performed to reduce the impact of errors and inaccuracies in the data. The method has proven effective in estimating areas, providing accurate approximations even with noisy or incomplete data. The results confirm the utility of the least squares method and trigonometric functions for applications in engineering and applied sciences.*

KEYWORDS: *Least Squares Method, Trigonometric Approximation, Area Calculation, Integral.*

1. INTRODUÇÃO

A determinação de áreas em contextos matemáticos e de engenharia frequentemente exige técnicas avançadas quando as funções são complexas ou não possuem soluções analíticas diretas. O cálculo da área sob uma curva pode ser realizado de forma eficaz utilizando aproximações trigonométricas combinadas com o método dos mínimos quadrados, uma técnica amplamente empregada para ajustar modelos matemáticos aos dados observados, minimizando a soma dos quadrados das diferenças entre os valores previstos e reais (Stewart, 2016). Para funções periódicas e dados com padrões cíclicos, o uso de funções trigonométricas como senos e cossenos representa essas variações de maneira adequada (Kreyszig, 2011).

O cálculo numérico, fundamental na matemática aplicada, concentra-se no desenvolvimento e análise de algoritmos para resolver problemas matemáticos por meio de aproximações numéricas. Segundo Burden e Faires (2011), é essencial para problemas que não podem ser tratados analiticamente, oferecendo métodos eficientes para soluções aproximadas. Esses métodos são amplamente utilizados em áreas como engenharia, física e economia, para lidar com equações diferenciais, sistemas lineares e integrais. A precisão e eficiência dos algoritmos são cruciais para a aplicação prática desses métodos, destacando a importância contínua da pesquisa nesta área.

O método dos mínimos quadrados é essencial em estatística e matemática aplicada para encontrar a melhor aproximação de uma solução a um problema de ajuste de dados. Em termos simples, visa minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e os previstos por um modelo. Esse método ajusta modelos lineares e não lineares aos dados experimentais, otimizando a precisão das previsões. Por exemplo, em um ajuste de linha reta, o método busca a linha que minimiza a soma dos quadrados das distâncias verticais entre os pontos e a linha. Conforme indicado por Seber e Lee (2012), é amplamente aplicado em regressão linear, ajustando uma função linear aos dados disponíveis e minimizando o erro quadrático médio.

A integração numérica aproxima o valor de integrais definidas quando não é possível encontrar uma solução analítica exata ou a integral é demasiado complexa para ser resolvida diretamente. São empregadas técnicas aproximativas, como a regra dos trapézios, a regra de Simpson e métodos avançados como a quadratura de Gauss, para estimar o valor da integral com base em dados discretos ou funções conhecidas. Segundo Press et al. (2007), a integração numérica é crucial em várias aplicações científicas e de engenharia, onde funções complexas ou dados experimentais não podem ser integrados simbolicamente. A precisão pode ser ajustada variando o número de pontos na aproximação e escolhendo o método adequado, dependendo da função e da faixa de integração.

O uso de integrais para calcular áreas é essencial na matemática e em muitas aplicações práticas, pois permite determinar áreas sob curvas que não podem ser facilmente calculadas com

fórmulas simples. A integral definida fornece uma abordagem sistemática para somar infinitas pequenas áreas, o que é fundamental para analisar funções contínuas e resolver problemas complexos em engenharia e ciências. A importância desse método está bem estabelecida, como destacado por Stewart (2016), que enfatiza que a integração é fundamental para problemas de geometria e análise de funções em contextos reais e teóricos.

Este trabalho explora a aplicação do método dos mínimos quadrados para calcular áreas utilizando aproximações trigonométricas. O objetivo é ajustar curvas para estimar áreas de formas geométricas complexas com base em pontos. Aplicamos o método dos mínimos quadrados para ajustar funções trigonométricas, úteis para modelar formas cíclicas ou periódicas. A área de interesse é representada por uma função trigonométrica ajustada aos dados disponíveis, utilizando um modelo como funções seno e cosseno para aproximar a forma da área. O ajuste minimiza a diferença entre a função modelada e os dados reais. A partir do modelo ajustado, a área é calculada integrando a função ao longo do intervalo de interesse. O método dos mínimos quadrados oferece uma aproximação precisa da área, especialmente quando os dados são ruidosos ou incompletos, mostrando eficácia na estimação de áreas com aplicações potenciais em engenharia e ciências aplicadas.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

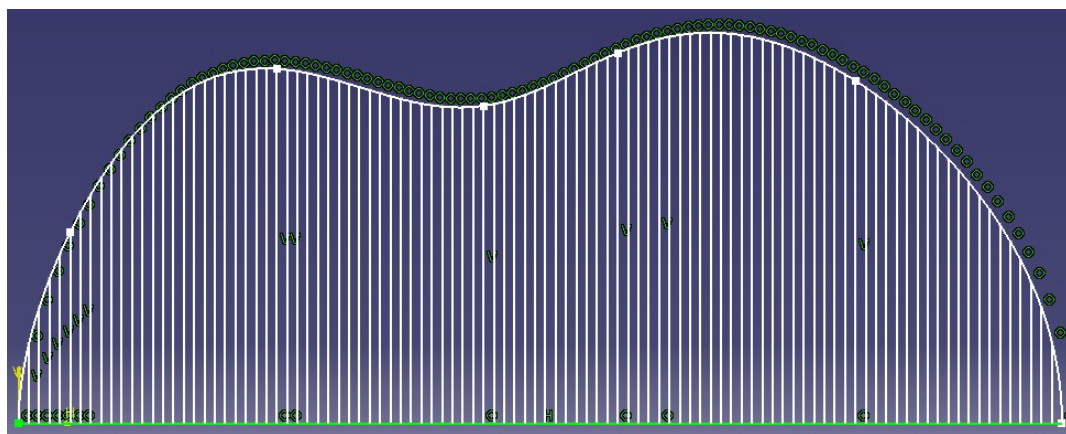
O modelo discutido a seguir é bidimensional (2D) e será utilizado para alcançar os resultados desejados. Projetado para refletir com precisão as características e variáveis relevantes do sistema em análise, o modelo em 2D permitirá realizar simulações e cálculos que aprofundarão o entendimento do comportamento do sistema sob diversas condições. Optar por um modelo 2D é uma escolha estratégica, pois captura as principais dinâmicas do fenômeno sem a complexidade adicional dos modelos tridimensionais. Com isso, conseguimos uma análise mais direta e eficiente dos resultados esperados. O próximo passo será aplicar o modelo aos dados coletados para gerar e analisar os resultados.

Este modelo também funciona como uma versão preliminar da peça que será desenvolvida e refinada posteriormente. Ele fornece uma visão geral das características e especificações do projeto, permitindo ajustes para atender aos requisitos finais. Com esta versão preliminar, podemos fazer uma avaliação inicial e identificar possíveis melhorias antes de concluir a peça, garantindo que o produto final esteja otimizado e alinhado com os objetivos.

Determinar a área é um passo crucial para definir com precisão as dimensões e características básicas da peça. Após calcular a área, podemos estimar o volume de forma mais precisa e eficaz. A Figura 1 ilustra um conjunto de pontos meticulosamente identificados para extração. Esses pontos representam localizações-chave essenciais para a análise subsequente. A coleta precisa desses pontos é fundamental, pois serão usados para calcular a área com exatidão. A

qualidade e a quantidade dos pontos extraídos impactam diretamente na precisão dos resultados, já que a densidade e a distribuição dos pontos garantem uma representação fiel da função ou forma em análise.

FIGURA 1. Peça em 2D e pontos marcados para extração.



Fonte: Próprio Autor (2024).

Para determinar a área de superfície, extraímos os pontos do modelo 2D e aplicamos o Método dos Mínimos Quadrados. Esse método ajusta uma curva que melhor representa os dados extraídos por meio de uma função trigonométrica, minimizando o erro quadrático médio entre os pontos reais e os pontos gerados pela função ajustada. O objetivo é encontrar a função trigonométrica que se ajusta de maneira ideal aos dados observados, reduzindo a discrepância entre os valores reais e previstos. O Método dos Mínimos Quadrados calcula os coeficientes da função para minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre os pontos observados e a curva ajustada, proporcionando um ajuste mais preciso e uma estimativa mais acurada da área de superfície.

O método dos mínimos quadrados trigonométricos é uma extensão do método dos mínimos quadrados, especificamente aplicado a problemas de ajuste de dados que envolvem funções trigonométricas. Esse método é particularmente útil quando os dados experimentais podem ser bem descritos por uma combinação de funções seno e cosseno, o que é comum em fenômenos periódicos, como sinais de ondas ou variações sazonais.

O procedimento geral envolve ajustar uma função periódica, tipicamente uma soma de senos e cossenos com diferentes frequências, para minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e os valores previstos pela função trigonométrica. Conforme (Franco, 2006), a Equação 1 geral para o ajuste trigonométrico é:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos(Ax) + b_1 \sin(Ax) + a_2 \cos(2Ax) + b_2 \sin(2Ax) + \dots \quad (1)$$

Ainda conforme (Franco, 2006), para determinar o erro quadrático J da função $y(x)$ em relação aos pontos iniciais, é necessário calcular a soma das diferenças entre os valores observados e os valores estimados pela função. Essas diferenças são então elevadas ao quadrado para penalizar maiores desvios. A fórmula para esse cálculo é apresentada na Equação 2. Este processo assegura que o erro quadrático reflita a precisão do modelo em ajustar-se aos dados fornecidos, facilitando a avaliação da qualidade do ajuste e a realização de ajustes necessários.

$$J = \sum (y - y_i)^2 \quad (2)$$

Segundo Guidorizzi (2001), para calcular a área sob uma função y , é necessário integrar a função ao longo do intervalo delimitado pelos pontos inicial e final que definem a área de interesse. Esse processo é descrito na Equação 3, que especifica a integração da função y entre os limites definidos. A integral resultante fornece o valor da área sob a curva, refletindo a extensão da função entre os pontos de integração. Essa abordagem é fundamental para obter a área exata sob a função e é amplamente utilizada em cálculos matemáticos e aplicações práticas para determinar quantidades acumuladas e áreas em contextos variados.

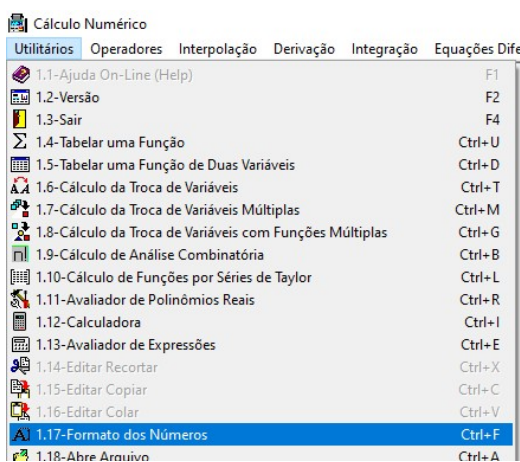
$$\int_a^b y dx \quad (3)$$

Para criar a função trigonométrica e resolver a integral, foi utilizado o software Visual Cálculo Numérico. O Visual Cálculo Numérico é um software projetado para ajudar com cálculos matemáticos e gráficos. Ele permite que você insira funções matemáticas e veja gráficos detalhados em 2D e 3D. Com ele, você pode resolver integrais, equações e até mesmo analisar dados ao longo do tempo. A interface do programa é fácil de usar, tornando simples para estudantes e profissionais realizarem cálculos complexos e entenderem melhor os resultados. Além disso, o software permite exportar gráficos e resultados para relatórios. Em resumo, o Visual Cálculo Numérico é uma ferramenta prática para quem precisa de uma análise matemática precisa e clara (Andrade e Miranda, 2014).

Este software é uma ferramenta poderosa que permite a visualização e a análise de funções matemáticas de forma interativa. Ao inserir os pontos desejados, o Visual Cálculo Numérico trás o resultado da função no tópico de ajustes de curvas. Em seguida, o software calcula a integral de forma numérica. A interface intuitiva do programa simplifica o processo de inserção de dados e interpretação dos resultados.

No Visual Cálculo Numérico, você pode escolher como os números serão exibidos. Na Figura 2, está mostrado o primeiro passo, que é selecionar o formato dos números. Essa escolha define como os números aparecerão no programa. Depois de escolher o formato, você pode ajustar outras configurações, como o número de casas decimais. Essa opção ajuda a tornar os dados mais claros e adaptados às suas necessidades.

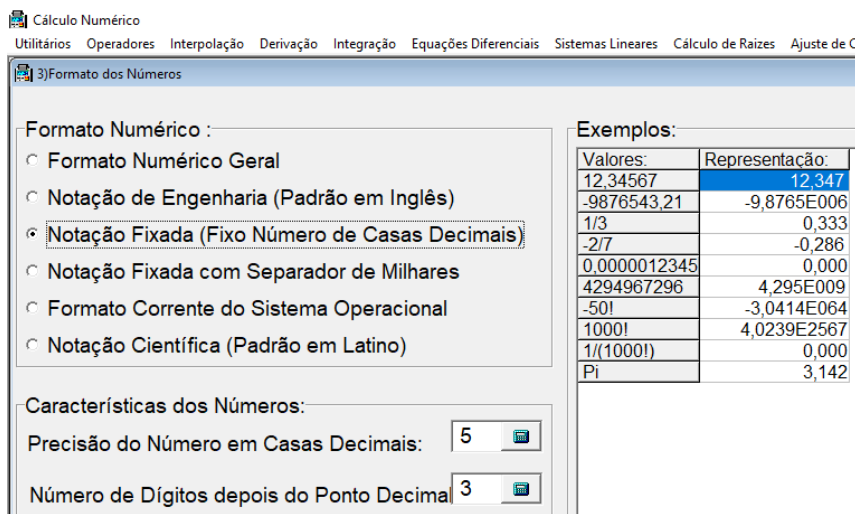
FIGURA 2. Formato dos números



Fonte: Próprio Autor (2024).

Na figura 3, é o momento de selecionar o número de casas decimais para a exibição dos valores. Nesta configuração específica, optou-se por utilizar 3 casas decimais. Essa escolha permite uma representação mais precisa dos dados, equilibrando clareza e detalhe. A configuração pode ser ajustada conforme as necessidades do usuário ou os requisitos do sistema. Ajustar o número de casas decimais pode influenciar a interpretação dos resultados. Portanto, é importante considerar o impacto da precisão na análise. Essa flexibilidade ajuda a adaptar a apresentação dos dados às diferentes situações.

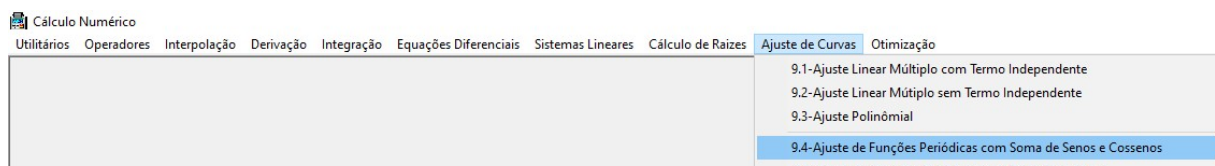
FIGURA 3. Números de casas decimais



Fonte: Próprio Autor (2024).

Na Figura 4, é ilustrado o processo de escolha do ajuste de curvas, especificamente para funções periódicas compostas por uma soma de senos e cossenos. Este ajuste é realizado utilizando passos constantes, refletindo a natureza dos dados coletados. No nosso caso, os pontos obtidos a partir do desenho na direção do eixo x são espaçados de maneira uniforme. Isso significa que as distâncias entre esses pontos são constantes, o que simplifica a aplicação do ajuste periódico. Assim, a figura demonstra claramente como a escolha do método de ajuste é influenciada pela regularidade e periodicidade dos dados, garantindo um modelo preciso e coerente.

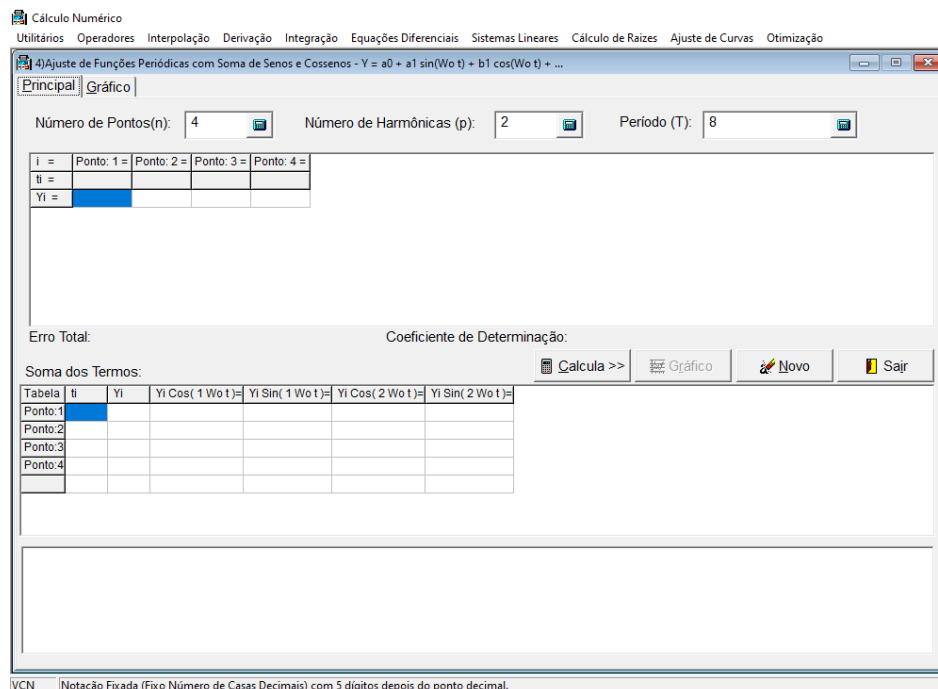
FIGURA 4. Seleção do ajuste de curvas.



Fonte: Próprio Autor (2024).

Na Figura 5, mostra-se o processo de inserção dos pontos e a escolha da ordem da função trigonométrica, que corresponde ao número de harmônicas e ao período da função. Após inserir os dados necessários, incluindo a ordem e o período desejados, clique em "Calcula" para gerar o ajuste. O resultado será exibido na parte inferior da interface, permitindo visualizar o ajuste realizado com base nas especificações fornecidas. Este procedimento ajuda a ajustar a função periódica de forma precisa, de acordo com os parâmetros definidos.

FIGURA 5. Entrada de dados e resultados.



Cálculo Numérico
Utilitários Operadores Interpolação Derivação Integração Equações Diferenciais Sistemas Lineares Cálculo de Raízes Ajuste de Curvas Otimização

4) Ajuste de Funções Periódicas com Soma de Senos e Cossenos - $Y = a_0 + a_1 \sin(W_0 t) + b_1 \cos(W_0 t) + \dots$

Principal Gráfico

Número de Pontos(n): 4 Número de Harmônicas (p): 2 Período (T): 8

i =	Ponto: 1 =	Ponto: 2 =	Ponto: 3 =	Ponto: 4 =
t _i =				
Y _i =				

Erro Total: Coeficiente de Determinação:

Soma dos Termos: Calcula >> Gráfico Novo Sair

Tabela	t _i	Y _i	Y _i Cos(1 W ₀ t)=	Y _i Sin(1 W ₀ t)=	Y _i Cos(2 W ₀ t)=	Y _i Sin(2 W ₀ t)=
Ponto:1						
Ponto:2						
Ponto:3						
Ponto:4						

VCN Notação Fixada (Fixo Número de Casas Decimais) com 5 dígitos depois do ponto decimal.

Fonte: Próprio Autor (2024).

3. RESULTADOS

Para gerar os resultados, foram inicialmente extraídos os pontos do elemento representado, utilizando técnicas de coleta de dados precisas. Esses pontos foram então processados e analisados para obter as informações necessárias. O processamento envolveu a aplicação de algoritmos e métodos de ajuste para garantir que os dados coletados fossem representativos e precisos. Após essa análise, os resultados foram organizados e compilados em uma tabela, visando facilitar a interpretação e a comparação dos dados.

A tabela a seguir apresenta de forma estruturada os resultados obtidos, proporcionando uma visão clara dos pontos extraídos e processados. Essa organização permite uma visualização detalhada e acessível das informações, o que é crucial para uma compreensão aprofundada dos resultados. Com essa abordagem, torna-se mais fácil identificar padrões e realizar análises adicionais, caso sejam necessárias. A estrutura da tabela 1 contribui para uma análise mais eficiente e para a tomada de decisões baseada em dados confiáveis.

TABELA 1. Resultados

Número de Harmônicas	Função	Erro quadrático	Área
1	$5,8 - 2,742\cos(0,785x) - 1,992\sin(0,785x)$	26,178	43,332
2	$5,8 - 2,742\cos(0,785x) - 1,992\sin(0,785x) - 1,847\cos(2*0,785x) - 0,761\sin(2*0,785x)$	6,223	44,116
3	$5,8 - 2,742\cos(0,785x) - 1,992\sin(0,785x) - 1,847\cos(2*0,785x) - 0,761\sin(2*0,785x) - 0,0584\cos(3*0,785x) + 0,180\sin(3*0,785x)$	6,045	45,057
4	$5,8 - 2,742\cos(0,785x) - 1,992\sin(0,785x) - 1,847\cos(2*0,785x) - 0,761\sin(2*0,785x) - 0,0584\cos(3*0,785x) + 0,180\sin(3*0,785x) - 0,953\cos(4*0,785x) - 0,470\sin(4*0,785x)$	0,4	44,960
5	$5,8 - 2,742\cos(0,785x) - 1,992\sin(0,785x) - 1,847\cos(2*0,785x) - 0,761\sin(2*0,785x) - 0,0584\cos(3*0,785x) + 0,180\sin(3*0,785x) - 0,953\cos(4*0,785x) - 0,470\sin(4*0,785x) - 0,4\cos(5*0,785x) - 1,8*10^{-18}\sin(5*0,785x)$	0,4	44,959
6	$5,8 - 2,742\cos(0,785x) - 1,992\sin(0,785x) - 1,847\cos(2*0,785x) - 0,761\sin(2*0,785x) - 0,0584\cos(3*0,785x) + 0,180\sin(3*0,785x) - 0,953\cos(4*0,785x) - 0,470\sin(4*0,785x) - 0,4\cos(5*0,785x) - 1,8*10^{-18}\sin(5*0,785x) - 0,953\cos(6*0,785x) + 0,470\sin(6*0,785x)$	6,045	45,016
Fonte: Próprio autor (2024).			

Observa-se que o ajuste das funções trigonométricas apresentou diferentes comportamentos em relação ao erro quadrático à medida que a ordem das funções aumentava. Inicialmente, ao utilizar uma função trigonométrica de 1ª ordem, o erro quadrático foi considerável, indicando que a função não conseguia capturar adequadamente a complexidade dos dados. Conforme a ordem da função foi aumentando, o erro quadrático começou a diminuir, refletindo uma melhora na precisão do ajuste. Esse processo de diminuição do erro continuou até a função de 5ª ordem, momento em que a precisão do ajuste convergia para um resultado mais próximo do esperado. No entanto, ao utilizar funções de 6ª ordem e superiores, foi observado um aumento no erro quadrático. Esse aumento indica que, a partir de certa ordem, a complexidade adicional das funções não melhorou o ajuste, mas sim introduziu novos erros, desviando-se do resultado desejado para a área. Portanto, a escolha da ordem da função é crucial, pois funções muito complexas podem levar a um ajuste excessivo, resultando em erros maiores ao invés de melhorar a precisão.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho abordou a utilização da aproximação trigonométrica combinada com o método dos mínimos quadrados para calcular áreas de formas geométricas complexas. A aplicação do método dos mínimos quadrados permitiu ajustar modelos matemáticos baseados em funções trigonométricas aos dados experimentais, minimizando a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e estimados. Esse ajuste resultou em uma representação precisa das formas cíclicas ou periódicas, evidenciando a eficácia da abordagem.

O uso de funções trigonométricas, como seno e cosseno, mostrou-se especialmente eficaz para modelar áreas com características periódicas. Integrar a função trigonométrica ajustada proporcionou uma estimativa precisa da área das formas geométricas. Ao ajustar a função aos dados e integrá-la, conseguimos calcular a área com precisão. Essa técnica foi bem-sucedida para formas com padrões periódicos, evidenciando que a combinação de trigonometria e mínimos quadrados é eficaz para calcular áreas complexas. O resultado destaca a robustez do método dos mínimos quadrados em lidar com dados imperfeitos e sua capacidade de fornecer soluções confiáveis para o cálculo de áreas.

Os resultados obtidos confirmam que a combinação das técnicas de aproximação trigonométrica e mínimos quadrados é uma ferramenta eficiente para aplicações práticas. A metodologia demonstrou ser especialmente útil em contextos onde métodos tradicionais de cálculo de área poderiam ser inadequados ou menos precisos. Assim, o trabalho contribui significativamente para o avanço de técnicas de modelagem matemática em engenharia e ciências aplicadas.

Para trabalhos futuros, é recomendável explorar a aplicação deste método em uma gama mais ampla de formas geométricas, incluindo aquelas com características não periódicas ou mais complexas. Além disso, a integração de técnicas adicionais, como métodos numéricos avançados e algoritmos de otimização, pode aprimorar ainda mais a precisão das estimativas de área e reduzir a influência de erros nos dados.

Adicionalmente, futuros estudos poderiam investigar a aplicação do método em contextos práticos, como análise de imagens digitais ou modelagem de superfícies em engenharia de design. A adaptação da metodologia para lidar com diferentes tipos de dados e formas geométricas ampliará suas aplicações e ajudará a refinar as técnicas existentes, promovendo avanços significativos no campo da modelagem matemática e do cálculo de áreas.

DECLARAÇÃO DE RESPONSABILIDADE

Os autores são os únicos responsáveis por este trabalho.

REFERÊNCIAS

Andrade, J. L.G, & Miranda, D. F. Modelos Numéricos de aproximação de funções de uma variável Real. 2014.

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Numerical Analysis* (9th ed.). Brooks/Cole.

FRANCO, Neide Bertoldi. Cálculo numérico. Pearson, 2006.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um curso de cálculo: volume 1. Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição, 2001.

Kreyszig, E. *Mathematics for Engineers* (10ª ed.). John Wiley & Sons. 2011.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3rd ed.). Cambridge University Press. 2007.

Seber, G. A. F., & Lee, A. J. *Linear Regression Analysis* (2nd ed.). Wiley. 2012

Stewart, J. *Cálculo: Volume 1* (7ª ed.). Cengage Learning. 2016