ANÁLISE DINÂMICA DE METAMATERIAL DE VIGA GRADUADA COM PERIODICIDADE 1D

Cássio B. F. Gomes [1] (cassio.bruno@acad.edu.ifma.br), Marvin B. M. Sales [1] (marvinbmsales@gmail.com), Mateus C. P. dos Santos [1] (mateuscalixtopereira@gmail.com), Edilson D. Nóbrega [2] (edilson.dantas@ufma.br) e Edson J. P. M. Junior [1] (edson.jansen@ifma.edu.br)

[1] Instituto Federal do Maranhão (IFMA); Departamento de Mecânica e Materiais
[2] Universidade Federal do Maranhão (UFMA); Departamento de Engenharia Mecânica

RESUMO: *Os metamateriais são estruturas artificiais projetadas para alcançar desempenho contraintuitivo sob condições estáticas e/ou dinâmicas que materiais comuns não seriam capazes. Em estruturas mecânicas, eles são aplicados para controle de ruído, isolamento de vibrações e atenuação de ondas, por exemplo. Recentemente, o efeito da gradação tem sido combinado com as propriedades vantajosas oferecidas pelos metamateriais mecânicos. Este trabalho visa aprofundar o entendimento sobre como a gradação na posição dos ressonadores influencia a formação de band gaps. Portanto, neste trabalho, o diagrama de dispersão e a função resposta em frequência (FRF) de vibrações de flexão em um metamaterial graduado de viga Euler-Bernoulli são investigados. A influência de arranjos graduados seguindo progressão aritmética (PA), geométrica (PG) e sequência Fibonacci (SF), na posição de ressonadores acoplados à superfície de uma viga homogênea na formação de band gaps de ressonância local e Bragg é estudada. Uma análise por elementos finitos (FE) foi conduzida através do COMSOL Multiphysics para obter os diagramas de dispersão, as FRFs e as formas dos modos de onda. A partir da análise dinâmica do modelo de metamaterial graduado, observou-se que os efeitos de gradação podem melhorar tanto a atenuação de onda na célula unitária quanto a redução de vibração do metamaterial de viga.*

PALAVRAS-CHAVE: *METAMATERIAIS MECÂNICOS, BAND GAPS, DIAGRAMA DE DISPERSÃO, FUNÇÕES RESPOSTA EM FREQUÊNCIA, ELEMENTOS FINITOS.*

DYNAMIC ANALYSIS OF A GRADED METAMATERIAL BEAM WITH 1D PERIODICITY

ABSTRACT: *Metamaterials are artificial structures designed to achieve counterintuitive performance under static and/or dynamic conditions that common materials would not be able to achieve. In mechanical structures, they are applied for noise control, vibration isolation, and wave attenuation, for example. Recently, the effect of grading has been combined with the advantageous properties offered by mechanical metamaterials. This work aims to deepen the understanding of how the gradation in the position of resonators influences the formation of band gaps. Therefore, in this work, the dispersion diagram and the frequency response function (FRF) of flexural vibrations in a graded Euler-Bernoulli metamaterial beam are investigated. The influence of graded arrangements, following arithmetic (PA), geometric (GP) progressions and Fibonacci sequence (FS), in the position of resonators coupled to the surface of a homogeneous beam on the formation of local resonance and Bragg band gaps is studied. A finite element (FE) analysis was conducted using COMSOL Multiphysics to obtain the dispersion diagrams, FRFs, and wave mode shapes. From the dynamic analysis of the graded metamaterial model, it was observed that the effects of grading can improve both wave attenuation in the unit cell and vibration reduction of the metamaterial beam.*

KEYWORDS: *MECHANICAL METAMATERIALS, BAND GAPS, DISPERSION DIAGRAM, FREQUENCY RESPONSE FUNCTION, FINITE ELEMENT.*

1. INTRODUÇÃO

Metamateriais são estruturas artificialmente criadas, projetadas para exibir propriedades efetivas não convencionais, tais como coeficientes negativos de expansão térmica, índice de refração, coeficiente de Poisson, densidade, dentre outros (Del Vescovo e Giorgio, 2014). Os metamateriais apresentam a importante característica da abertura de zonas ou faixas de frequência, onde há atenuação de ondas (eletromagnéticas ou mecânicas), chamados band gaps ou bandas proibidas. Esse fenômeno ocorre devido ao mecanismo de ressonância local, ou ainda, modos localizados (Hussein *et al.*, 2014).

Do ponto de vista de propagação de ondas mecânicas (elásticas e acústicas), os band gaps são interessantes para o controle de ruído e atenuação de vibração, devido a possibilidade da abertura de band gaps em baixas frequências. Portanto, os metamateriais mecânicos se mostram como uma estratégia viável para aplicações de controle e atenuação de fenômenos vibratórios indesejados em estruturas de engenharia. As faixas de frequência em que os band gaps de ressonância local são abertas nos metamateriais mecânicos, normalmente, são estreitas e aumentam quando a frequência de excitação se aproxima da frequência natural dos ressonadores. Geralmente, metamateriais mecânicos apresentam células unitárias dispostas de forma periódica, com o objetivo de tornar mais largas as faixas de frequência em que ocorrem os band gaps, associando os efeitos de periodicidade e ressonância local.

Neste contexto, estudos voltados para a aplicação de metamateriais e cristais fonônicos com ressonadores para mitigação de vibração têm sido realizados em estruturas 1D (Nóbrega *et al.*, 2015; Miranda Jr. e dos Santos, 2019; Xiao *et al.*, 2022), 2D (Miranda Jr. *et al.*, 2019; Claeys *et al.*, 2013) e 3D (Ribeiro *et al.*, 2022). Adicionalmente, estudos recentes incorporaram efeitos de gradação em modelos de vigas, barras e placas, mostrando resultados promissores na geração de band gaps (Dal Poggetto *et al.*, 2022; Alshaqaq, 2020).

Algumas aplicações de metamateriais mecânicos têm sido exploradas com objetivos sustentáveis, no sentido de promover conforto acústico e bem-estar a ocupantes de recintos próximos à linhas férreas, estações de trem ou rodovias. Alguns estudos avaliam a utilização de árvores como ressonadores locais, funcionando como barreiras contra propagação de ondas acústicas e de superfície (Colombi *et al.*, 2016; Huang *et al.*, 2019). Além disso, encontra-se na literatura a aplicação de metamateriais mecânicos compostos por resíduos de borracha e plástico para redução de ruído, provenientes de processos de reciclagem já existentes (Naimušin e Januševičius, 2023).

1.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho é investigar a atenuação de ondas e vibrações mecânicas de acordo com a gradação na posição de ressonadores acoplados em vigas de metamateriais de Euler-Bernoulli com periodicidade 1D, utilizando o método FE através do software COMSOL Multiphysics.

1.2 Justificativa

Esta pesquisa visa aprimorar o entendimento sobre como a gradação na posição dos ressonadores pode influenciar a formação de band gaps e, consequentemente, melhorar a atenuação de ruído e vibrações em estruturas de viga. A capacidade desses materiais de criar band gaps em baixas frequências tem gerado uma crescente demanda por soluções eficientes e inovadoras no controle de ruído e vibrações em ambientes urbanos e industriais. Os métodos tradicionais de controle de vibração e ruído frequentemente se mostram insuficientes ou economicamente inviáveis, destacando a necessidade de desenvolver alternativas mais eficazes (Liang *et al*., 2022).

Recentemente, diversos estudos têm explorado o uso de metamateriais graduados contendo ressonadores para aplicações elásticas e acústicas considerando modelos discretos e contínuos (Liang *et al.*, 2022; Liu e Reina, 2018), barras 1D (Lu *et al.*, 2021), redes periódicas híbridas (Jafari *et al.*, 2020) e estruturas bioinspiradas (Zhao e Zhou, 2019; Miniaci *et al.*, 2018). Apesar dos avanços, ainda existem lacunas significativas na compreensão completa dos efeitos da gradação na posição dos ressonadores.

Portanto, essas análises indicam que os metamateriais graduados oferecem uma oportunidade para um controle adicional sobre as estruturas de bandas, o que justifica análises para compreender o efeito de outros tipos de graduados, visando o desenvolvimento de projetos práticos de metamateriais mecânicos com largas faixas de band gap. Esses avanços podem levar a melhorias significativas no controle de ruído e vibrações, proporcionando soluções viáveis para problemas práticos na indústria.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

Nesse estudo, será avaliado o desempenho dinâmico de ondas de flexão em metamateriais graduados com periodicidade 1D, utilizando modelos de vigas Euler-Bernoulli com ressonadores acoplados. A gradação foi adicionada ao parâmetro da posição dos ressonadores. Para isso, uma análise por FE de uma estrutura de metamaterial graduado 3D, com periodicidade 1D de ressonadores, foi conduzida utilizando o software COMSOL Multiphysics para a obtenção das FRFs e

diagramas de dispersão. A FRF descrita neste estudo, chamada receptância de transferência, é uma relação entre o deslocamento e a força de excitação.

Os parâmetros graduados de posição seguiram progressões aritmética (PA), geométrica (PG) e sequência de Fibonacci (SF), dadas respectivamente, pelas Equações 1 a 3,

$$x_i = x_1 + d(i-1), \tag{1}$$

$$x_i = x_1 r^{i-1}, \tag{2}$$

$$x_n = \frac{\phi_+^n + \phi_-^n}{\sqrt{5}}, x_i = \{x_1\ x_n\}(a/4N), \tag{3}$$

onde x_i, i = 1,2, ..., N é a posição do i-ésimo ressonador na célula unitária, e N é a quantidade de ressonadores por célula, e a corresponde ao parâmetro de rede. A constante $d=a/N$ é a razão entre o comprimento da célula unitária e o número de ressonadores por célula, e define o espaçamento entre os ressonadores para a gradação do tipo progressão aritmética. Essa configuração indica que os ressonadores ao longo da célula unitária são equidistantes.

Na Equação 2, r corresponde à razão da progressão geométrica. Na Equação 3, as constantes $\phi_+ = (1 + 5^{1/2})/2$ e $\phi_- = (1 - 5^{1/2})/2$ correspondem, respectivamente, à proporção áurea e seu conjugado da sequência de Fibonacci, com n = 1, 2, ..., N-1. Portanto, para o caso em que a gradação na posição dos ressonadores segue uma PA, os valores de x_{ia} = {0; 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,06; 0,07; 0,08; 0,09} × 10^{-3} m. Para o caso da PG, a distribuição dos ressonadores ao longo da célula unitária é x_{ig} = {0,0002; 0,0004; 0,0007; 0,0015; 0,0029; 0,0058; 0,0116; 0,0233; 0,0465; 0,0931} m. Para uma SF na posição dos ressonadores, x_{if} = {0; 0,0025; 0,0025; 0,0050; 0,0075; 0,0125; 0,0175; 0, 0200; 0,0325; 0,0525; 0,0850} m.

O modelo de viga de Euler-Bernoulli assume que a deflexão da linha central é pequena e apenas transversal, e considera a presença de forças de cisalhamento, apesar de desconsiderar as deformações causadas por esse tipo de carregamento. Além disso, a teoria de Euler-Bernoulli para vigas considera que o modelo é comprido e esbelto, ou seja, que o comprimento é muito maior que as outras dimensões, e que o material constituinte do modelo é linearmente elástico e homogêneo (Öchsner, 2021).

Portanto, partindo da teoria de Euler-Bernoulli para vigas, a equação governante para vibração de flexão em um sistema de viga uniforme com extensão infinita, pode ser escrita pela Equação 4 (Doyle, 1997; Lee, 2009),

$$EI\frac{\partial^4\hat{u}(x,t)}{\partial x^4}-\rho S\frac{\partial^2\hat{u}(x,t)}{\partial t^2}=0, \tag{4}$$

onde *E* é o módulo de Young [Pa] do material que compõe a viga, *I* corresponde ao segundo momento de área [m^4], e a combinação desses termos, *EI*, é chamada de rigidez de flexão. Ainda, $\hat{u}(x,t)$ é o deslocamento transversal da viga no domínio do tempo, ρ é a massa específica [kg/m^3] do material que compõe a viga, e *S* é a área da seção transversal [m^2] do modelo. Considerando uma solução de onda harmônica, a solução da Equação 4 pode ser associada a (Lee, 2009),

$$EIk^4-\rho S\omega^2=0, \tag{5}$$

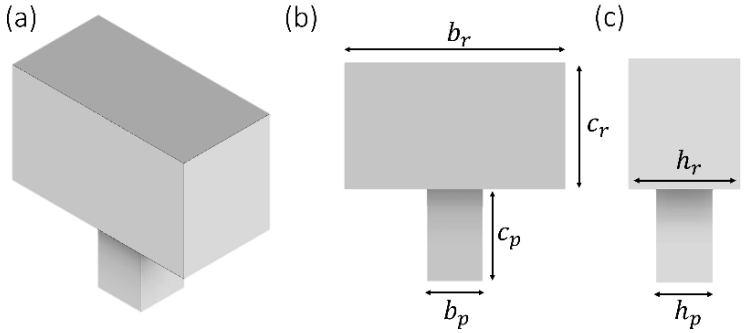
onde *k* é o número de onda e ω a frequência angular. Dessa forma, obtém-se a relação de dispersão para um modelo de viga de Euler-Bernoulli, que relaciona o número de onda com a frequência temporal:

$$k=\omega^{1/2}\left(\frac{\rho s}{EI}\right)^{1/4} \text{ ou } \omega=k^2\left(\frac{EI}{\rho S}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

3. RESULTADOS

Nesta seção, serão apresentados os resultados de simulações realizadas no software comercial COMSOL Multiphysics para os modelos de metamaterial graduado na posição dos ressonadores ao longo da célula unitária. Nessa abordagem, o método de FE foi utilizado para calcular o diagrama de dispersão e as FRF do sistema. Essa metodologia foi conduzida com o objetivo de prever resultados experimentais de modelos de metamaterial de viga graduada.

FIGURA 1. Detalhamento das medidas do ressonador acoplado ao metamaterial de viga. Vistas (a) isométrica, (b) frontal e (c) lateral.



Fonte: Autores (2024).

A modelagem foi feita utilizando um elemento sólido 3D, com uma malha extremamente fina composta por elementos tetraédricos. As condições de contorno foram extremidades livre-livre. O material utilizado foi o náilon, da biblioteca nativa do COMSOL, simulando um material utilizado na confecção por manufatura aditiva (impressão 3D) com as propriedades descritas na Tabela 1. O modelo do ressonador é descrito conforme a Figura 1, onde b_p, h_p e c_p são considerados a largura, espessura e altura da mola, respectivamente, e b_r, h_r e c_r a largura, espessura e altura da massa do ressonador, com dimensões apresentadas na Tabela 1.

TABELA 1. Propriedades e dimensões da viga graduada.

Propriedades	Valores
Modulo de elasticidade (E)	2,0 [GPa]
Coeficiente de Poisson (ν)	0,40
Densidade (ρ)	1150 [kg/m³]
Largura da mola (b_p)	1,0 [10^{-3} m]
Espessura da mola (h_p)	1,5 [10^{-3} m]
Altura da mola (c_p)	2,0 [10^{-3} m]
Largura da massa do ressonador (b_r)	8,0 [10^{-3} m]
Espessura da massa do ressonador (h_r)	1,5 [10^{-3} m]
Altura da massa do ressonador (c_r)	5,0 [10^{-3} m]

Fonte: Autores (2024).

O modelo simulado consiste na repetição de células unitárias com 10 ressonadores acoplados. Em um caso particular, para a sequência de Fibonacci na posição gradual dos ressonadores, considerou-se apenas 9 ressonadores em uma célula unitária, dado que os dois primeiros termos da sequência coincidem. Para a obtenção da FRF, considerou-se uma estrutura finita com 4 células unitárias, cada uma com comprimento de 75×10^{-3} m, totalizando uma estrutura finita de comprimento total de 30×10^{-2} m. A espessura da viga foi considerada como $1{,}2 \times 10^{-3}$ m e a largura como 12×10^{-3} m. A Tabela 2 representa o número de elementos finitos utilizados na discretização da célula unitária dos modelos.

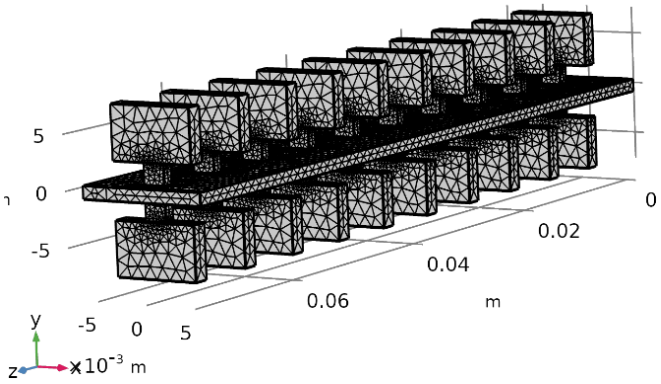
TABELA 2. Número de elementos finitos utilizados na discretização dos modelos.

Modelo	Nº de elementos (célula)	Nº de elementos (viga)
PA	46449	171782
PG	46689	171087
SF	42117	155085

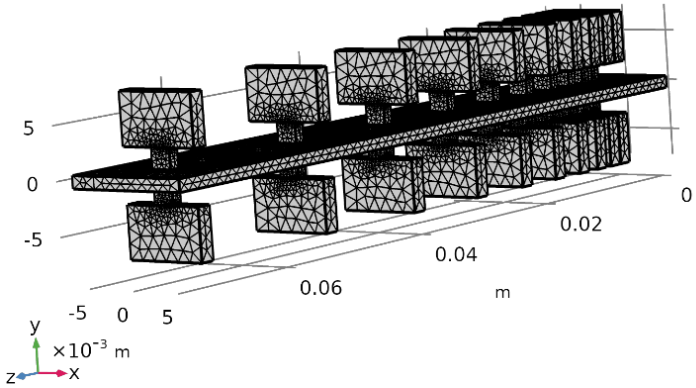
Fonte: Autores (2024).

A Figura 2 ilustra as células unitárias dos casos PA, PG e SF de gradação na posição, respectivamente, bem como a malha gerada em cada modelo. Nessa modelagem, os ressonadores foram adicionados em ambas as faces superior e inferior da viga, com o objetivo de mitigar efeitos indesejados, como momentos de flexão, e evitar o acoplamento longitudinal-flexural.

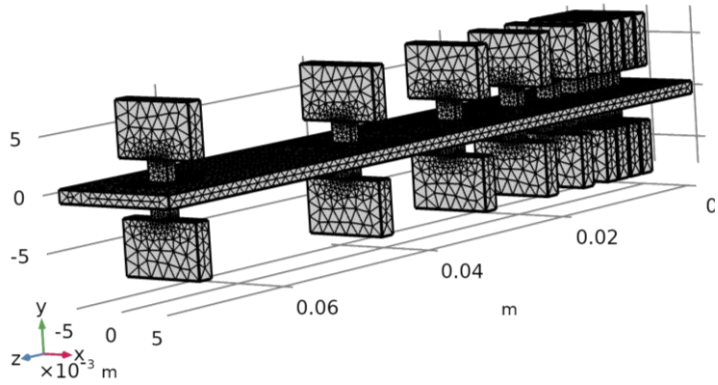
FIGURA 2. Modelo da célula unitária com malha de FE do metamaterial graduado na posição para (a) PA, (b) PG e (c) SF.



(a)



(b)

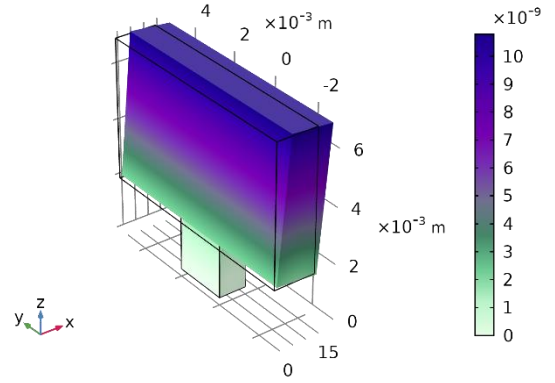


(c)

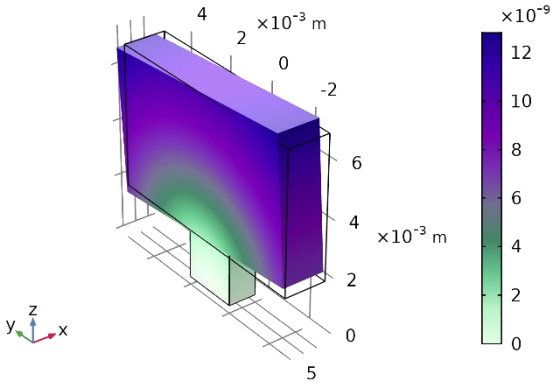
Fonte: Autores (2024).

A Figura 3 mostra as formas modais de vibrar (*vibration mode shapes*) do ressonador na condição de contorno fixa na base inferior e livre nas demais faces, calculadas pelo FE. São apresentados apenas os três primeiros modos do ressonador: (a) a 1996,00 Hz, (b) a 3241,40 Hz e (c) a 3267,30 Hz. Adicionalmente, a Figura 3(a) mostra um modo associado à flexão, enquanto os modos ilustrados em (b) e (c) estão associados a flexão em diferentes sentidos e de torção.

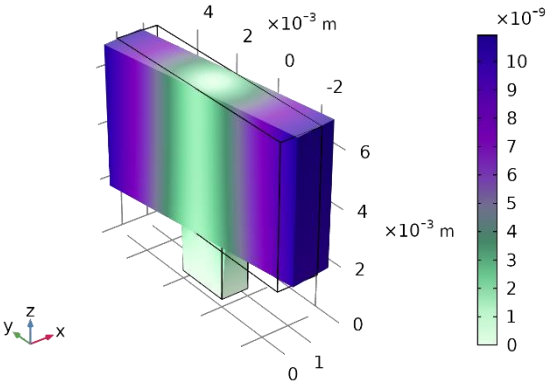
FIGURA 3. Análise modal do ressonador 3D utilizando FE para uma condição de contorno engastada na base inferior e livre nas demais faces com: (a) 1996,0 Hz, (b) 3241,4 Hz e (c) 3267,3 Hz.



(a)



(b)



(c)

Fonte: Autores (2024).

A Figura 4 demonstra o diagrama de dispersão calculado por FE para o modelo 3D das células unitárias de metamaterial graduado considerando (a) PA, (b) PG e (c) SF na posição dos ressonadores. O eixo Y representa o módulo do número de onda normalizado em relação à frequência no eixo X. Foi considerado um número de 80 autofrequências, e o número de onda foi discretizado em 50 divisões dentro do intervalo [-π/a, π/a]. Nos resultados, observam-se diversos modos de onda superpostos, uma vez que o modelo sólido 3D de elementos finitos possui muitos graus de liberdade. Portanto, esses modos estão associados aos deslocamentos longitudinais, transversais, torcionais ou de flexão, por exemplo.

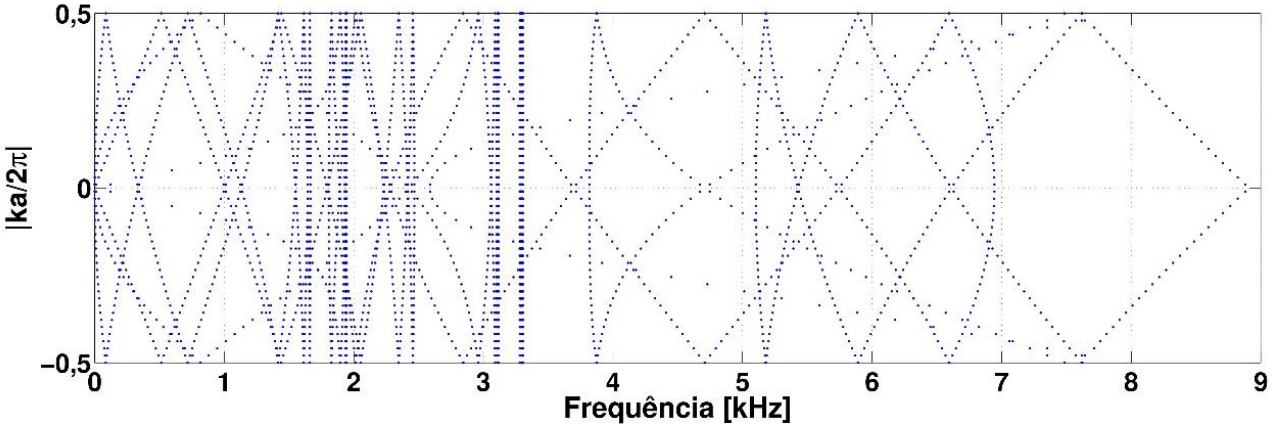
As regiões próximas a 2000 e 3000 Hz apresentam modos muito próximos um do outro, podendo estar associados à formação de *flat bands*, que correspondem aos modos nos quais a velocidade de grupo se aproxima de zero, ou seja, a energia ou o campo de deslocamento está localizado naquela frequência (Carvalho *et al.*, 2023). Adicionalmente, essas frequências podem estar relacionadas também com as três primeiras formas de onda ilustradas na Figura 3. Portanto, essas regiões possivelmente estão associadas aos band gaps de ressonância local.

A Figura 5 ilustra algumas das formas dos modos de onda para células unitárias, seguindo (a) PA, (b) PG e (c) SF. A Figura 5(a) corresponde a um autovetor a 1736,70 Hz, onde se observa um modo combinado de torção e flexão. Na Figura 5(b), observa-se um modo de flexão a 1927,90 Hz, no qual a energia de deformação está concentrada nos ressonadores, indicando uma possível frequência de band gap de ressonância local. Na Figura 5(c), um modo de flexão a 6250,10 Hz é mostrado, onde a deformação está concentrada na estrutura, indicando uma frequência de banda passante.

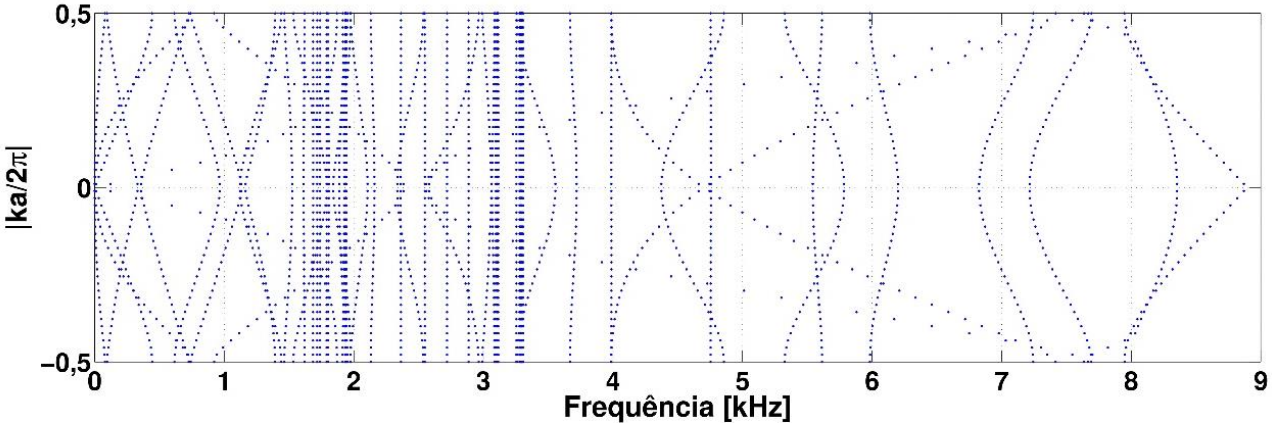
A Figura 6 exibe a FRF da receptância calculada por FE para os modelos 3D do metamaterial de viga com gradação na posição para os casos (a) PA, (b) PG e (c) SF. Foram consideradas condições de contorno livre-livre e uma estrutura com quatro células unitárias. Foi aplicada uma excitação de força unitária na direção transversal, e a FRF da receptância foi medida na extremidade seguinte da estrutura, também na direção transversal. Dessa forma, obteve-se a FRF correspondente aos modos de flexão da estrutura. Nos resultados, observam-se regiões de atenuação de vibração devido a ressonância local, próximas à frequência de flexão do ressonador a 1996 Hz (Figura 3(a)), e possivelmente ao efeito de espalhamento de Bragg, caracterizados pelas bandas mais largas em frequências mais altas.

Observa-se que, para os casos em que a gradação na posição segue PG e SF, as regiões correspondentes ao efeito de ressonância local ocorrem em faixas de frequência mais largas. Adicionalmente, são observadas mais regiões de atenuação, possivelmente devido ao efeito de Bragg.

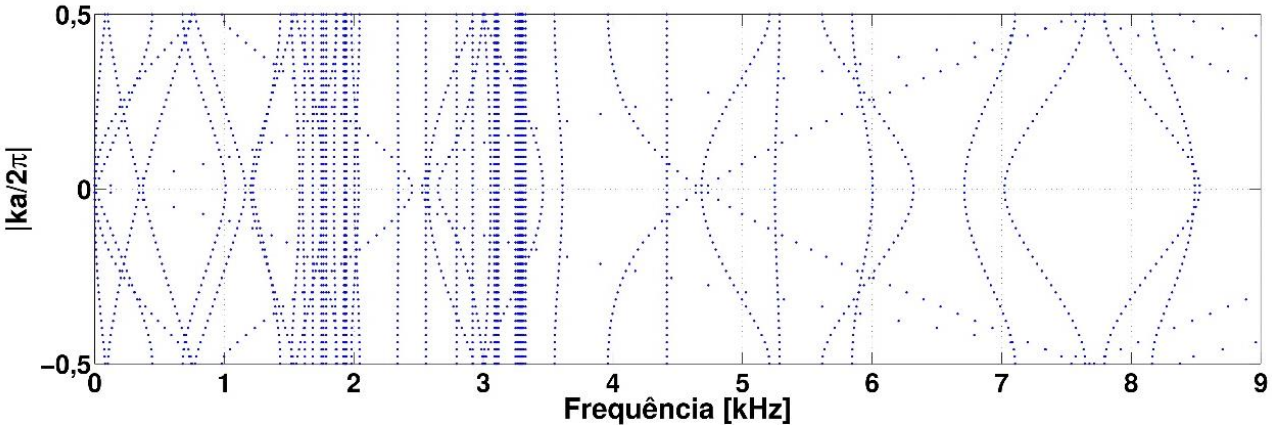
FIGURA 4. Diagrama de dispersão do modelo 3D de metamaterial graduado calculado por FE através do COMSOL. Gradação na posição do tipo (a) PA, (b) PG e (c) SF.



(a)



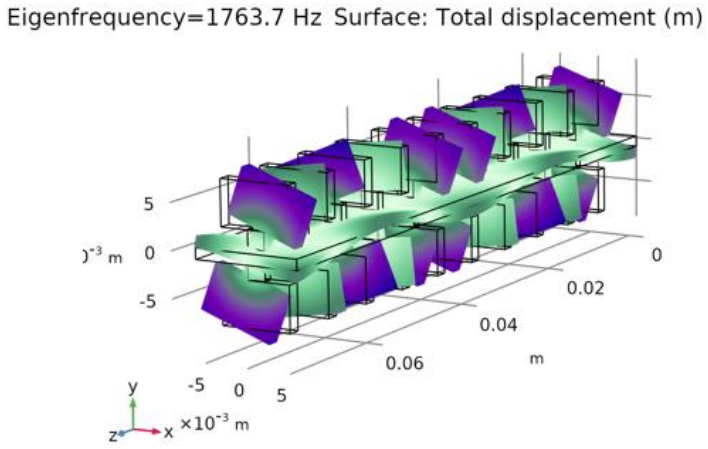
(b)



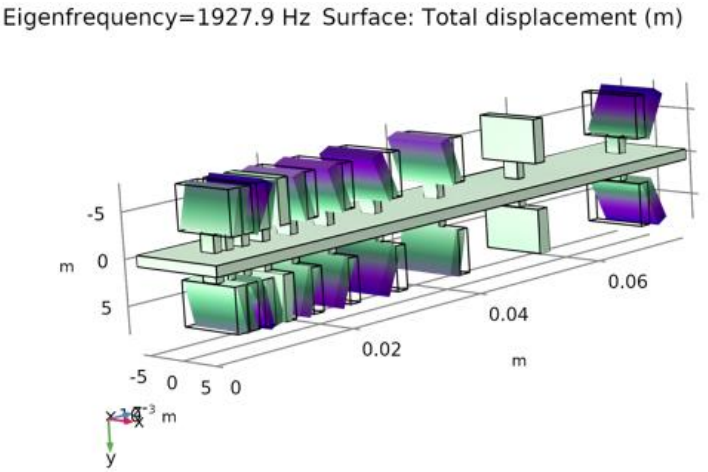
(c)

Fonte: Autores (2024).

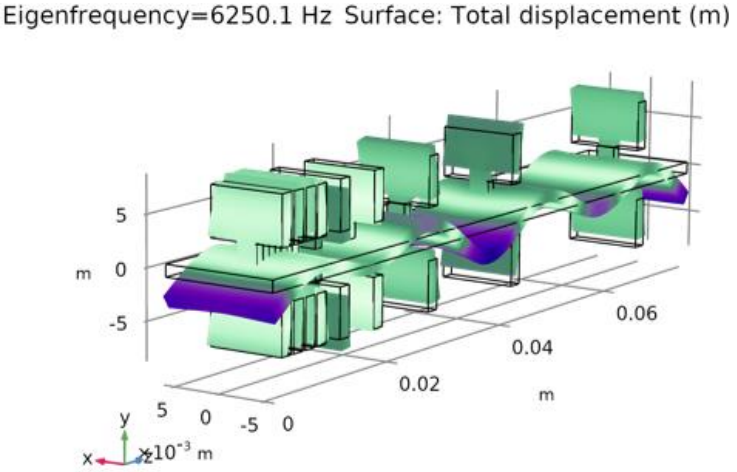
FIGURA 5. Forma modal de onda do modelo 3D da célula unitária calculado pelo FE para gradação (a) PA, (b) PG e (c) SF.



(a)



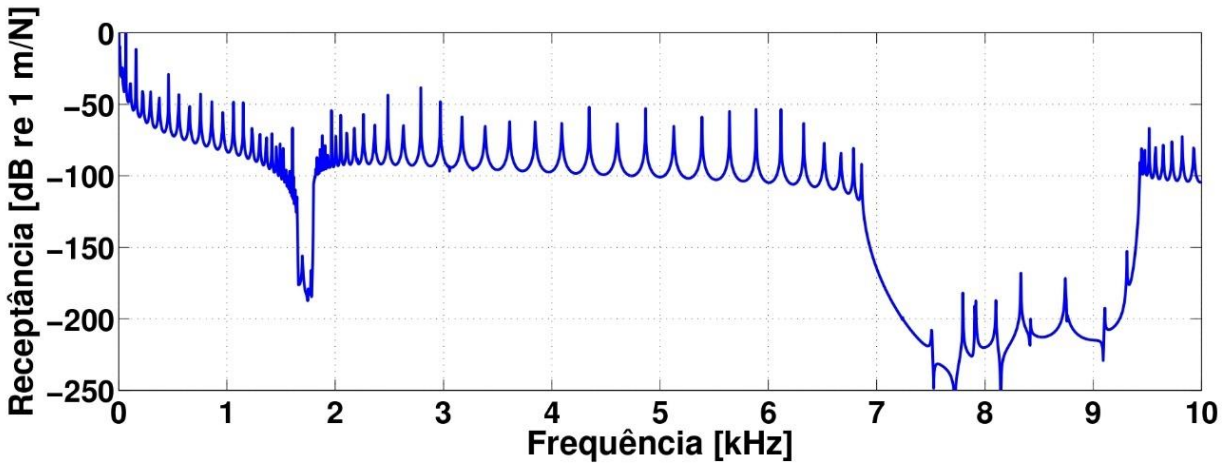
(b)



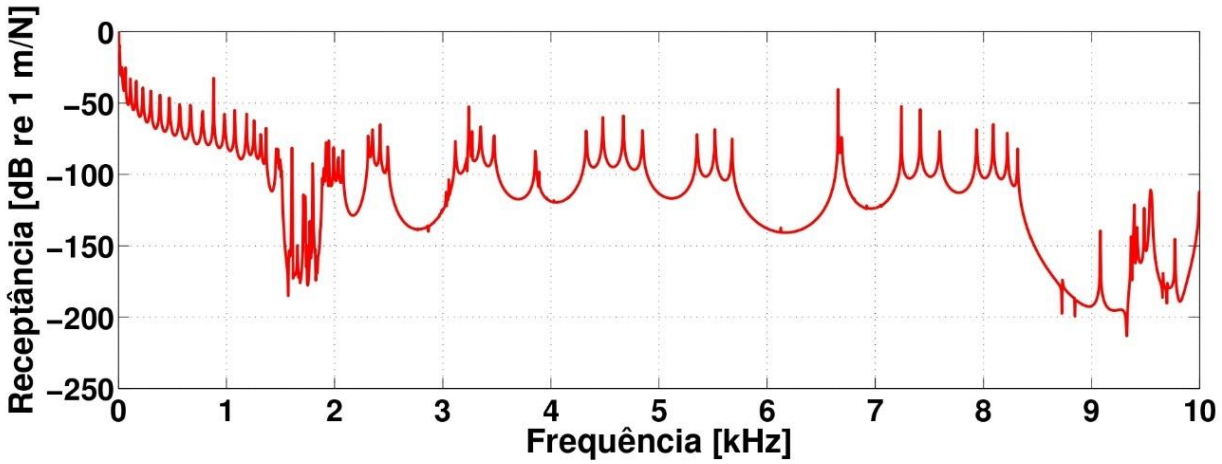
(c)

Fonte: Autores (2024).

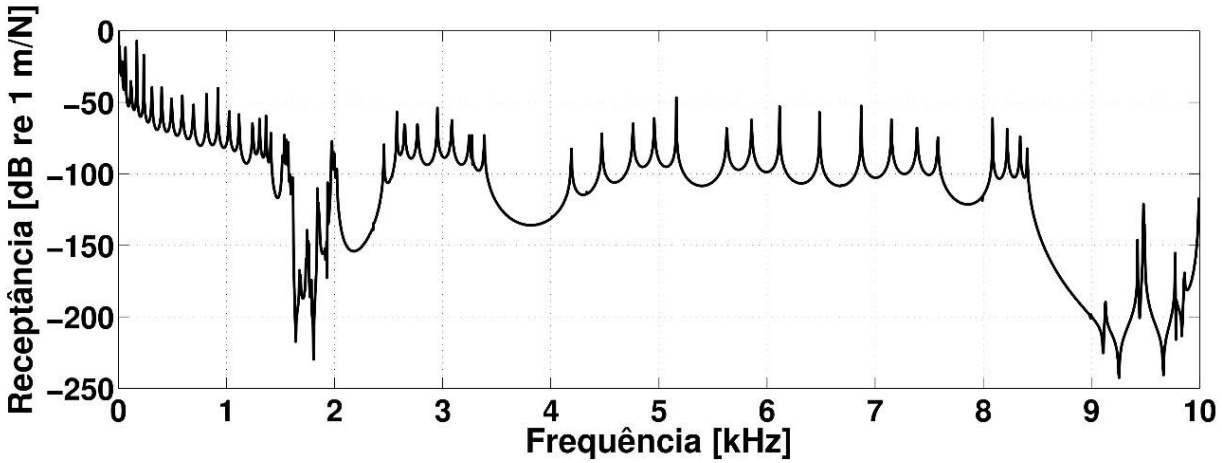
FIGURA 6. Função resposta em frequência do modelo 3D de metamaterial graduado calculado por FE através do COMSOL. Gradação na posição do tipo (a) PA, (b) PG e (c) SF.



(a)



(b)



(c)

Fonte: Autores (2024).

4. CONCLUSÕES

Este trabalho avaliou diferentes tipos de gradação na posição dos ressonadores acoplados ao longo de uma viga metamaterial de Euler-Bernoulli para criar band gaps localmente ressonantes e de Bragg. Para isso, foram obtidos diagramas de dispersão e as respostas forçadas de um metamaterial graduado de viga de Euler-Bernoulli com ressonadores acoplados em uma célula unitária, utilizando abordagens de FE.

Entre os tipos de gradações, PA, PG e SF na posição do ressonador, a PA apresentou um valor mais alto de atenuação de onda na célula unitária mesmo que ocorra em uma faixa de frequência menor. As PG E SF apresentaram resultados semelhantes, devido à razão adotada na PG e as posições dos ressonadores seguindo SF, com band gaps mais amplos e menor amplitude dos vales da FRF quando comparados com a PA.

Os resultados apontam que a localização ou faixa da banda de frequência é sensível à disposição do ressonador ao longo da célula unitária. Logo, a escolha do tipo de posicionamento do ressonador influencia significativamente as propriedades elásticas do metamaterial, particularmente em termos de atenuação de vibração e controle de ruído, podendo ser adotados em aplicações práticas.

Para trabalhos futuros, sugerem-se expandir os efeitos de gradação na massa e na posição simultaneamente para modelos com periodicidade 2D, por exemplo placas finas e grossas, bem como realizar ensaios experimentais em metamateriais graduados de vigas e placas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Instituto Federal do Maranhão (IFMA), às agências de fomento brasileiras CNPq (403234/2021-2, 405638/2022-1 e 300166/2022-2), CAPES (88887.959941/2024-00), FAPESP (2018/15894-0) e à FAPEMA (07168/22).

DECLARAÇÃO DE RESPONSABILIDADE

Os autores são os únicos responsáveis por este trabalho.

REFERÊNCIAS

ALSHAQAQ, M.; ERTURK, A. Graded multifunctional piezoelectric metastructures for wideband vibration attenuation and energy harvesting. *Smart Materials and Structures*, v. 30, p. 1529, 2020.

CARVALHO, A. L. L.; GOMES, C. B. F.; DOS SANTOS, J. M. C.; MIRANDA JR., E. J. P. Effect of resonant aggregate parameters in metaconcrete thin plates on flexural bandgaps: Numerical simulations. *Materials Research*, v. 26, 2023.

CLAEYS, C. C.; VERGOTE, K.; SAS, P.; DESMET, W. On the potential of tuned resonators to obtain low-frequency vibrational stop bands in periodic panels. *Journal of Sound and Vibration*, v. 332, p. 1418-1436, 2013.

COLOMBI, A.; ROUX, P.; GUENNEAU, S. Forests as a natural seismic metamaterial: Rayleigh wave bandgaps induced by local resonances. *Science Reports*, v. 6, 2016.

DAL POGGETTO, V. F.; BOSIA, F.; MINIACI, M.; PUGNO, N.M. Band gap enhancement in periodic frames using hierarchical structures. *International Journal of Solids and Structures*, v. 216, p. 68-82, 2021.

DEL VESCOVO, D.; GIORGIO, I. Dynamic problems for metamaterials: Review of existing models and ideas for further research. *International Journal of Engineering Science,* v. 80, p. 153-172, 2014.

DOYLE, J. F. Wave Propagation in Structures: Spectral Analysis Using Fast Discrete Fourier Transforms. Springer, Berlin, Germany, 1997.

HUANG, J.; LIU, Y.; LI, Y. Trees as large-scale natural phononic crystals: Simulation and experimental verification, *International Soil and Water Conservation Research*, v. 7, p. 196-202, 2019.

HUSSEIN, M.; LEAMY, M.; RUZZENE, M. Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook. *Applied Mechanics Reviews*, v. 66, 2014.

JAFARI, H.; SEPEHRI, S.; YAZDI, M. R. H.; MASHHADI, M. M.; FAKHRABADI, M. M. S. Hybrid lattice metamaterials with auxiliary resonators made of functionally graded materials. *Acta Mechanica*, v. 231, p. 4835-4849, 2020.

LEE, U. Spectral Element Method in Structural Dynamics. John Wiley and Sons, Singapore, 256 p., 2009.

LIANG, X.; ZHANG, F.; JIANG, J. Ultra-wideband outward-hierarchical metamaterials with graded design. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, v. 18, p. 169-184, 2022.

LIU, C.; REINA, C. Broadband locally resonant metamaterials with graded hierarchical architecture. *Journal of Applied Physics*, v. 123, 2018.

LU, K.; TIAN, Y.; GAO, N.; LI, L.; LEI, H.; YU, M. Propagation of longitudinal waves in the broadband hybrid mechanism gradient elastic metamaterials rods. *Applied Acoustics*, v. 171, 2021.

MEZA, L. R.; ZELHOFER, A. J.; CLARKE, N.; MATEOS, A. J.; KOCHMANN, D. M.; GREER, J. R. Resilient 3D hierarchical architected metamaterials. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 112, p. 11502-11507, 2015.

MINIACI, M.; KRUSHYNSKAA, A.; GLIOZZI, A. S.; KHERRAZ, N.; BOSIA, F.; PUGNO, N. M. Design and fabrication of bioinspired hierarchical dissipative elastic metamaterials. *Physical Review Applied*, v. 10, 2018.

MIRANDA JR., E. J. P.; NÓBREGA, E. D.; FERREIRA, A. H. R.; DOS SANTOS, J. M. C. Flexural wave band gaps in a multi-resonator elastic metamaterial plate using Kirchhoff-Love theory. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 116, p. 480-504, 2019.

MIRANDA JR., E. J. P.; DOS SANTOS, J. M. C. Flexural wave band gaps in multi resonator elastic metamaterial Timoshenko beams. *Wave Motion*, v. 91, 2019.

NAIMUŠIN, A; JANUŠEVIČIUS, T. Development and Research of Recyclable Composite Metamaterial Structures Made of Plastic and Rubber Waste to Reduce Indoor Noise and Reverberation. *Sustainability*. v. 15, p. 1731, 2023.

NÓBREGA, E. D.; GAUTIER, F.; PELAT, A.; DOS SANTOS, J. M. C. Vibration band gaps for elastic metamaterial rods using wave finite element method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 79, p. 192-202, 2016.

ÖCHSNER, A. Classical Beam Theories of Structural Mechanics. *Springer*, 2021.

RIBEIRO, L. H. M. S.; DAL POGGETTO, V. F.; ARRUDA, J. R. F. Robust optimization of attenuation bands of three-dimensional periodic frame structures. *Acta Mechanica*, v. 233, p. 455-475, 2022.

XIAO, Y.; WEN, J.; WEN, X; Broadband locally resonant beams containing multiple periodic arrays of attached resonators. *Physics Letters A*, v. 376, p. 1384-1390, 2012.

ZHAO, L.; ZHOU, S. Compact acoustic rainbow trapping in a bioinspired spiral array of graded locally resonant metamaterials. Sensors, v. 19, 2019.