

## ANÁLISE ESTATICA GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS CONSTITUÍDOS POR MEMBROS NÃO PRISMÁTICOS

Aleff Gonçalves Quintino <sup>(1)</sup> ([aleffquintino@ufmg.br](mailto:aleffquintino@ufmg.br)), Marcelo Greco <sup>(1)</sup> ([mgreco@dees.ufmg.br](mailto:mgreco@dees.ufmg.br))

<sup>(1)</sup> Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG); Departamento de Engenharia de Estruturas

**RESUMO:** *Análises estáticas geometricamente não lineares de estruturas reticuladas, realizadas através do método dos elementos finitos exigem que uma discretização adequada dos membros seja empregada, uma vez que trata-se de uma estratégia de solução aproximada. Assim, a convergência das respostas não lineares está condicionada exclusivamente ao nível de discretização dos membros estruturais. A fim de eliminar o erro inerente da discretização, uma solução em série de potências da equação diferencial é desenvolvida com base no equilíbrio do elemento infinitesimal deformado, que conjuntamente com o método da rigidez permitem derivar uma matriz de rigidez exata que leva em consideração a variação de rigidez do membro de pórtico 2D sob força normal constante. Desta forma, no presente estudo busca-se realizar análises de segunda ordem de pórticos planos constituídos por membros não prismáticos usando um único elemento finito por membro. Análises não lineares geométricas realizadas pelo método proposto com apenas um elemento finito por membro mostraram-se uma excelente concordância quando comparadas às soluções numéricas obtidas pelo SAP2000 ao utilizar 20 elementos finitos por membro, o que comprova a exatidão da formulação desenvolvida independentemente da densidade da malha de elementos finitos.*

**PALAVRAS-CHAVE:** NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA, PÓRTICO 2D, MEMBRO NÃO PRISMÁTICO, EQUAÇÃO DIFERENCIAL.

## GEOMETRICALLY NONLINEAR STATIC ANALYSIS OF PLANE FRAMES CONSTITUTED OF NON-PRISMATIC MEMBERS

**ABSTRACT:** *Geometrically nonlinear static analyzes of lattice structures, carried out using the finite element method, require that an appropriate discretization of the members be employed, since it is an approximate solution strategy. Thus, the convergence of nonlinear responses is exclusively conditioned by the level of discretization of the structural members. In order to eliminate the inherent discretization error, a power series solution of the differential equation is developed based on the equilibrium of the infinitesimal deformed element, which together with the stiffness method allows deriving an exact stiffness matrix that takes into account the variation of stiffness of 2D frame member under constant normal force. Therefore, in the present study we seek to carry out second-order analyzes of plane frames made up of non-prismatic members using a single finite element per member. Geometric nonlinear analyzes performed by the proposed method with only one finite element per member showed excellent agreement when compared to the numerical solutions obtained by SAP2000 when using 20 finite elements per member, which proves the accuracy of the formulation developed regardless of the mesh density of finite elements.*

**KEYWORDS:** GEOMETRIC NONLINEARITY, 2D FRAME, NON-PRISMATIC MEMBER, DIFFERENTIAL EQUATION.

## 1. INTRODUÇÃO

A constante evolução da engenharia estrutural enseja a busca por materiais e sistemas estruturais cada vez mais eficientes, capazes de conferir maior economia sem comprometer a segurança e a durabilidade das construções. Assim, o emprego de materiais de alta resistência e de elementos não prismáticos esbeltos, tendo em vista sistemas estruturais mais resistentes e leves, tornam-se comuns nos projetos de estruturas civis, tais como edifícios e obras de arte especiais. Em contrapartida, a utilização destes elementos tornam os sistemas estruturais mais flexíveis e, portanto, pronunciam-se mais facilmente o comportamento não linear geométrico.

No âmbito da não linearidade geométrica existem muitas possibilidades de considerar tal efeito desde as verificações mais simples baseadas em códigos de projetos nacionais e internacionais, de forma que os efeitos locais e globais sejam tratados separadamente, até sofisticadas análises numéricas não lineares que consideram esses efeitos conjuntamente, como por exemplo pelo Método da Rigidez Direta (MRD) e Método dos Elementos Finitos (MEF).

Entretanto, vale ressaltar que modelos tradicionais de elementos finitos trazem consigo um conjunto de aproximações inerentes das funções de forma previamente definidas. Por consequência, numa análise não linear geométrica a exatidão das soluções numéricas dependem exclusivamente da discretização adotada, principalmente da experiência do analista na escolha adequada do número de segmentos que devem ser utilizados na discretização de um membro estrutural (BURGOS e MARTHA, 2013). Isso acontece devido a matriz de rigidez no MEF ser derivada através de funções interpoladoras lineares e cúbicas que descrevem o campo de deslocamento axial e de flexão, respectivamente.

A fim de eliminar a influência da discretização em análises estáticas geometricamente não lineares de estruturas reticuladas diversos estudos têm sido desenvolvidos. Oran (1973), Goto e Chen (1987), Chen e Lui (1987; 1991), Aristizabal-Ochoa (1997), Chan e Gu (2000), Wunderlich e Pilkey (2003), Burgos e Martha (2013), Rodrigues (2019), Rodrigues *et al.* (2017; 2021), Burgos *et al.* (2021), Silva (2022), Burgos e Silva (2023), Silva e Burgos (2023) utilizaram soluções analíticas de equações diferenciais na derivação da matriz de rigidez exata de membros prismáticos. Oran (1974), Banerjee e Williams (1986), Eisenberger (1991), Rubin (1999), Murín e Kutis (2002), Al-Sadder (2004), Al-Sadder e Qasrawi (2004), Kutis e Murín (2006) utilizaram soluções numéricas de equações diferenciais na derivação da matriz de rigidez de membros não prismáticos.

Contudo, verifica-se em muitos estudos envolvendo membros não prismáticos que as formulações desenvolvidas baseadas em soluções de equações diferenciais ficam restritas a um método de solução específico, não havendo a possibilidade do uso de outras técnicas numéricas.

Desta forma, busca-se neste trabalho o desenvolvimento de uma formulação geral aplicável a qualquer método de solução de equações diferenciais com coeficientes variáveis.

### 1.1. Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo geral realizar análises não lineares geométricas de pórticos planos constituídos por membros não prismáticos sob força axial constante, com base na solução da equação diferencial governante do equilíbrio do elemento na configuração deformada.

Além disso, propõe-se cumprir os seguintes objetivos específicos:

- Derivar a matriz de rigidez de um elemento de pórtico 2D não prismático sob força axial constante;
- Avaliar o comportamento não linear geométrico de sistemas estruturais planos reticulados esbeltos;
- Realizar análises comparativas do presente estudo com modelos usuais de elementos finitos e com exemplos disponíveis na literatura científica.

### 1.2. Justificativas

A solução analítica de equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes variáveis dada por meio de funções elementares está disponível apenas para alguns casos específicos. Assim, uma ação usual para este tipo de equações é assumir uma solução na forma de série infinita com coeficientes desconhecidos, denominada série de potências.

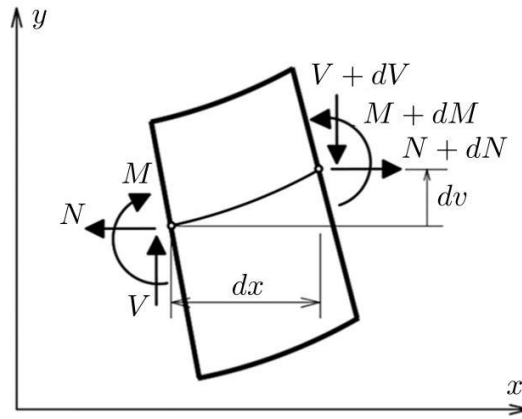
A modelagem e simulação computacional pelo MEF de estruturas constituídas por membros não prismáticos podem exigir muito esforço e experiência por parte do projetista na discretização adequada de um membro estrutural, tendo em vista que trata-se de uma estratégia de solução aproximada. Desta forma, visando assegurar a exatidão dos resultados obtidos com um tempo reduzido de análise, buscam-se modelos numéricos que independam do nível de refinamento da malha de elementos finitos empregada em análises geometricamente não lineares.

A fim de eliminar a influência da discretização em análises geometricamente não lineares de pórticos planos constituídos por membros com rigidez constante/variável, diferentes propostas baseadas em soluções de equações diferenciais têm sido desenvolvidas. Entretanto, algumas técnicas limitam-se apenas a solução de equações diferenciais a nível do elemento, impossibilitando a análise de pórticos. Além disso, muitas formulações ficam limitadas à apenas um método de solução, impossibilitando assim a generalidade da proposta na utilização de outras estratégias de solução.

## 2. EQUACIONAMENTO

A Figura 1 apresenta um elemento infinitesimal de pórtico 2D na sua configuração deformada, submetido aos esforços internos  $N$ ,  $V$  e  $M$ .

**FIGURA 1.** Equilíbrio de forças do elemento diferencial deformado.



Fonte: Adaptado de Rodrigues *et al.* (2021).

Considerando todas as forças generalizadas atuantes, a imposição do equilíbrio pela cinemática de vigas de Euler-Bernoulli leva as Equações 1, 2 e 3.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow -N + (N + dN) = 0 \rightarrow \frac{dN}{dx} = 0, \quad N = EA(x) \frac{du}{dx} \\ \therefore \frac{d}{dx} \left( EA(x) \frac{du}{dx} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V - (V + dV) = 0 \rightarrow \frac{dV}{dx} = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum M_z = 0 &\rightarrow -M + (M + dM) - Vdx - (N + dN)dv = 0, \quad M = EI_z(x) \frac{d^2v}{dx^2} \\ \therefore \frac{d}{dx} \left( EI_z(x) \frac{d^2v}{dx^2} \right) - N \frac{dv}{dx} &= V \rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \left( EI_z(x) \frac{d^2v}{dx^2} \right) - N \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{dV}{dx} \end{aligned} \quad (3)$$

Substituindo a Equação 2 na Equação 3, tem-se:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( E I_z(x) \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - N \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (4)$$

A área da seção transversal continuamente variável  $A(x)$  pode ser expressa na forma de séries de potências, ou seja:

$$A(x) = A_i \eta_A(x) = A_i \left( 1 + \sum_{j=1}^p \eta_{A_j} x^j \right) \quad (5)$$

em que  $A_i$  é a área no nó inicial do membro. Semelhantemente, o segundo momento de área continuamente variável  $I_z(x)$  de uma viga-coluna não prismática pode ser representado em séries de potências da seguinte forma:

$$I_z(x) = I_{zi} \eta_{I_z}(x) = I_{zi} \left( 1 + \sum_{j=1}^q \eta_{I_{zj}} x^j \right) \quad (6)$$

em que  $I_{zi}$  é o segundo momento de área no nó inicial do membro,  $p$  e  $q$  são os graus dos polinômios  $\eta_A(x)$  e  $\eta_{I_z}(x)$ , respectivamente. Substituindo a Equação 6 na Equação 4, e dividindo toda a equação resultante por  $E I_{zi}$ , obtém-se:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \eta_{I_z}(x) \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - k^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (7)$$

em que  $k^2 = N/E I_{zi}$ . Segundo Kreyszig (2011) a solução geral da Equação 7 pode ser expressa por meio de uma série de potências da forma

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (8)$$

Então

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \quad (9)$$

e

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \eta_{i,j}(x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\min(n+2;q)} \eta_{i,j}(n+1)(n+2)(n-j+3)(n-j+4) a_{n-j+4} x^n \quad (10)$$

Substituindo as Equações 9 e 10 na Equação 7, obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{j=0}^{\min(n+2;q)} \eta_{i,j}(n+1)(n+2)(n-j+3)(n-j+4) a_{n-j+4} - k^2 (n+1)(n+2) a_{n+2} \right] x^n = 0 \quad (11)$$

Para satisfazer a Equação 11 para todos os valores de  $n$ , obtém-se a relação de recorrência para os coeficientes  $a_n$ , dada por:

$$a_{n+4} = \left[ k^2 (n+1)(n+2) a_{n+2} - \sum_{j=1}^{\min(n+2;q)} \eta_{i,j}(n+1)(n+2)(n-j+3)(n-j+4) a_{n-j+4} \right] / [(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)], \quad (n=0,1,2,\dots,\infty) \quad (12)$$

Através da Equação 12 as soluções linearmente independentes da Equação 4 são obtidas explicitamente em termos das quatro constantes ( $a_0, a_1, a_2$  e  $a_3$ ) que podem ser determinadas pela imposição das condições de contorno. No entanto, do ponto de vista computacional visando a aplicabilidade da formulação a outros métodos de solução é conveniente expressar a solução geral em termos das condições iniciais ( $v_0 = a_0, v'_0 = a_1, v''_0 = 2a_2$  e  $v'''_0 = 6a_3$ ), na forma

$$v(x) = \sum_{j=0}^3 v_0^{(j)} c_j(x) \quad (13)$$

em que  $v_0^{(j)}$  é  $j$ -ésima derivada da função  $v(x)$  no ponto  $x=0$ ,  $c_j(x)$  é a solução linearmente independente da equação diferencial governante (Equação 4). A função  $v(x)$  representa o deslocamento transversal ao longo da viga (linha elástica). Assim, a Equação 13 e suas derivadas podem ser expressas da seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v(x) \\ v'(x) \\ v''(x) \\ v'''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c'_0 & c'_1 & c'_2 & c'_3 \\ c''_0 & c''_1 & c''_2 & c''_3 \\ c'''_0 & c'''_1 & c'''_2 & c'''_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v'_0 \\ v''_0 \\ v'''_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Na derivação da matriz de rigidez do elemento de viga-coluna aplica-se o conceito de rigidez do método da rigidez. Os coeficientes da matriz de rigidez  $k$  são definidos como as forças internas generalizadas (Equações 1 e 3) que surgem em ambas as extremidades do membro de comprimento  $L$ , devido à translação  $v(x)$  ou rotação  $v'(x)$  unitária, em cada um dos quatro graus de liberdade, um de cada vez. Desta forma, existem quatro conjuntos de condições de contorno, dados por:

$$\begin{aligned} 1) \quad & v(0)=1, \quad v'(0)=v(L)=v'(L)=0; \\ 2) \quad & v'(0)=1, \quad v(0)=v(L)=v'(L)=0; \\ 3) \quad & v(L)=1, \quad v(0)=v'(0)=v'(L)=0; \\ 4) \quad & v'(L)=1, \quad v(0)=v'(0)=v(L)=0. \end{aligned} \quad (15)$$

Assim, obtém-se

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 & k_{14} & 0 & 0 \\ & k_{22} & k_{23} & 0 & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & 0 & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & 0 & 0 \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ \text{sim.} & & & & & k_{66} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

em que

$$\begin{aligned} k_{11} &= -k_{14} = k_{44} = EA_i / c_N \\ k_{22} &= -k_{25} = k_{55} = c_z \left( c'_2(L) - \eta'_{I_z}(0) c'_3(L) \right) \\ k_{23} &= -k_{35} = c_z c'_3(L) \\ k_{26} &= -k_{56} = c_z \left( c_2(L) - \eta'_{I_z}(0) c_3(L) \right) \\ k_{33} &= c_z \left( L c'_3(L) - c_3(L) \right) \\ k_{36} &= c_z c_3(L) \\ k_{66} &= L k_{26} - k_{36} \end{aligned}$$

$$c_N = \int_0^L \frac{dx}{\eta_A(x)}$$

$$c_z = EI_{zi} / (c_2(L)c_3'(L) - c_2'(L)c_3(L))$$

Desta forma, ao aplicar-se a Equação 15 na obtenção das rigidezes a solução contínua (infinitos graus de liberdade) é transformada em uma solução discreta (finitos graus de liberdade), de forma que as respostas estão associadas aos nós do modelo estrutural. A matriz de rigidez (Equação 16) representa a relação força-deslocamento a nível do elemento no sistema local, logo o comportamento da estrutura idealizada é governado pela seguinte equação matricial:

$$KU = F \quad (17)$$

em que  $K$  é a matriz de rigidez da estrutura,  $U$  é o vetor de deslocamentos nodais e  $F$  é o vetor de forças externas ou aplicadas, no sistema de coordenadas globais.

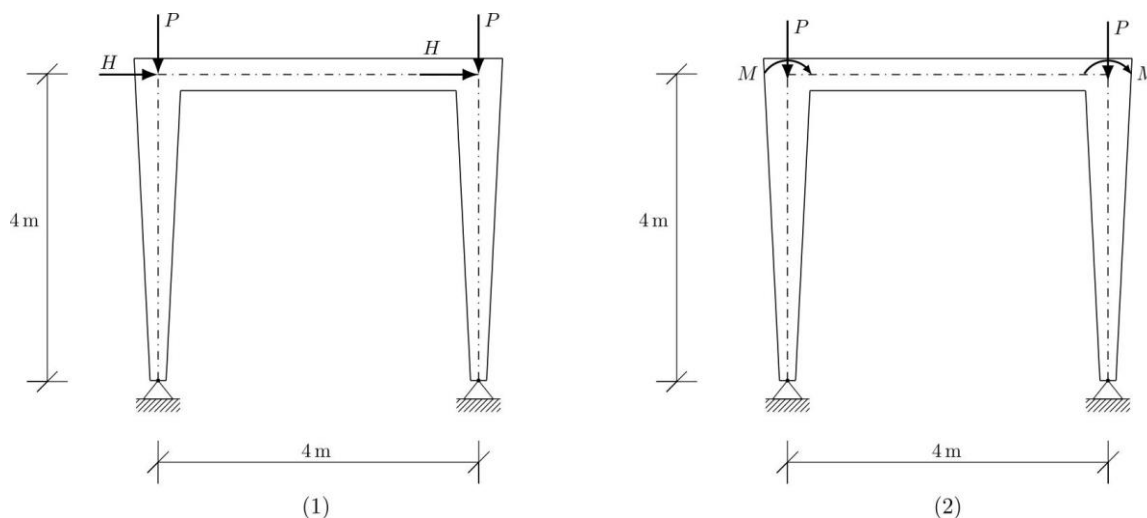
A análise não linear geométrica é realizada iterativamente até que a convergência seja alcançada. Inicialmente é feito uma análise linear ou de primeira ordem ( $N=0$ ) para obtenção das forças axiais internas em cada membro. Posteriormente, atualiza-se a matriz de rigidez em cada ciclo iterativo a partir das forças normais internas obtidas na iteração anterior.

### 3. EXEMPLOS

Neste estudo, além da metodologia proposta utilizou-se o *software* SAP2000 na análise não linear geométrica do pórtico plano apresentado na Figura 2. O SAP2000 é baseado no MEF e utiliza o método de Newton-Raphson na solução das equações não lineares. Os membros verticais do pórtico possuem variação linear da altura da seção transversal, em que na base é (20 x 20 cm) e no topo (20 x 30 cm), enquanto o membro horizontal possui seção constante (20 x 30 cm).

O modelo 1 da Figura 2 trata-se de um pórtico 2D submetido à forças verticais  $P$  e horizontais  $H=0,1P$ . Avaliou-se o comportamento não linear geométrico para diferentes valores de  $P$ . No método proposto modelou-se cada membro com apenas um elemento finito. Já no modelo numérico via SAP2000 a convergência da resposta foi alcançada ao discretizar cada membro com 20 elementos finitos não prismáticos.

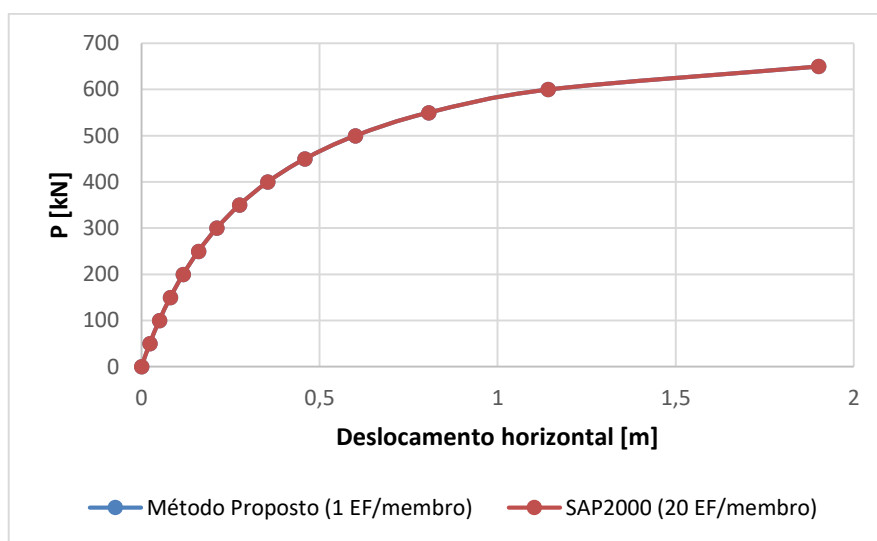
FIGURA 2. Pórtico proposto para análise de segunda ordem.



Fonte: Autores (2024).

A Figura 3 mostra o deslocamento horizontal do pórtico para diferentes níveis de solicitação.

FIGURA 3. Trajetória de equilíbrio (modelo 1).



Fonte: Autores (2024).

É possível verificar uma excelente concordância dos resultados entre ambos os métodos. A Tabela 1 apresenta a resposta obtida pelo SAP2000 considerando diferentes níveis de discretização para a carga máxima aplicada ( $P = 650$  kN), em que NE é o número de elementos finitos por membro.

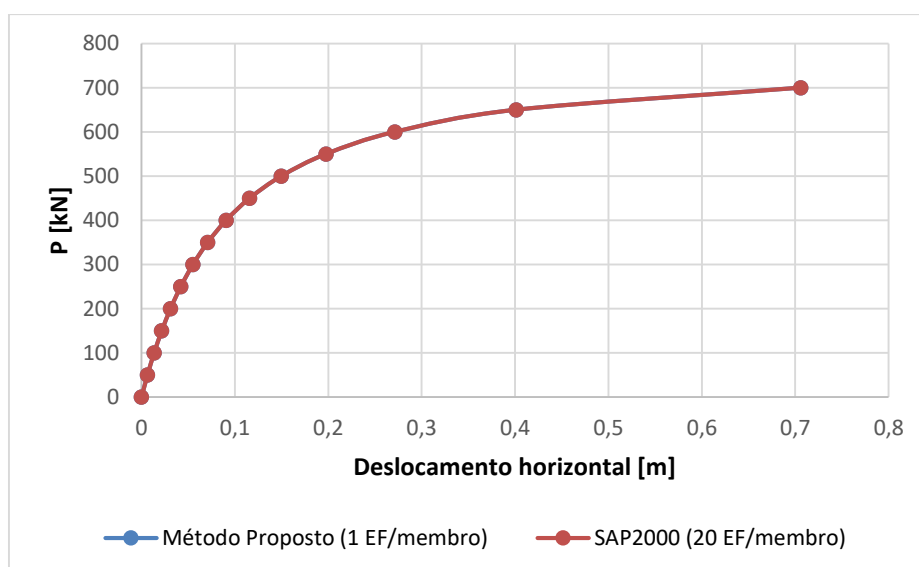
**TABELA 1.** Deslocamento horizontal em metros (modelo 1).

| NE | Método Proposto | SAP2000 | Erro relativo (%) |
|----|-----------------|---------|-------------------|
| 1  | 1,901496755     | 1,61050 | 1,53E+01          |
| 2  | -               | 1,87322 | 1,49E+01          |
| 5  | -               | 1,90081 | 3,61E-02          |
| 10 | -               | 1,90145 | 2,46E-03          |
| 20 | -               | 1,90149 | 3,55E-04          |

Fonte: Autores (2024).

O modelo 2 da Figura 2 trata-se de um pórtico 2D submetido à forças verticais  $P$  e momentos fletores  $M=0,1PL$ , em que  $L=4$  m. Avaliou-se o comportamento não linear geométrico para diferentes valores de  $P$ . A quantidade de elementos finitos utilizados em ambos os métodos é a mesma do modelo 1. A Figura 4 apresenta o deslocamento horizontal do pórtico para diferentes níveis de carga aplicada.

**FIGURA 4.** Trajetória de equilíbrio (modelo 2).



Fonte: Autores (2024).

Pode-se perceber novamente uma excelente concordância nas respostas por ambos os métodos. A Tabela 2 apresenta a resposta obtida pelo SAP2000 considerando diferentes níveis de discretização para a carga máxima aplicada ( $P = 700$  kN).

TABELA 2. Deslocamento horizontal em metros (modelo 2).

| NE | Método Proposto | SAP2000 | Erro relativo (%) |
|----|-----------------|---------|-------------------|
| 1  | 0,70615921      | 0,60907 | 1,37E+01          |
| 2  | -               | 0,6985  | 1,08E+00          |
| 5  | -               | 0,70598 | 2,54E-02          |
| 10 | -               | 0,70615 | 1,30E-03          |
| 20 | -               | 0,70616 | 1,12E-04          |

Fonte: Autores (2024).

Destaca-se que o *software* SAP2000 apresentou convergência nas respostas não lineares com malhas contendo poucos elementos finitos, tendo em vista que ele permite a modelagem de elementos não prismáticos em que o segundo momento de área  $I_z(x)$  pode variar linearmente, parabolicamente e cubicamente. Além disso, a força normal é considerada constante o que facilita a convergência pelo SAP2000. No entanto, em casos que o grau de variação da rigidez à flexão seja superior a três é necessário o uso de malhas cada vez mais refinadas.

#### 4. CONCLUSÕES

A partir dos exemplos apresentados, as análises não lineares geométricas usando apenas um elemento finito por membro mostraram-se uma excelente concordância quando comparadas às soluções numéricas tradicionais via MEF ao utilizar 20 elementos finitos por membro. Além disso, os resultados obtidos pelo método proposto são independentes da discretização do modelo.

Por outro lado, observou-se que o uso de apenas um elemento finito por membro pelo SAP2000 gerou um erro em torno de 15%, justificando assim a necessidade do uso de mais elementos por membro em análises via MEF.

Verificou-se também que o pórtico referente ao modelo 2 apresentou um menor deslocamento horizontal, correspondendo a 37% do deslocamento horizontal do modelo 1 mesmo sob uma maior solicitação. Isso ocorre devido à ausência de esforços internos de flexão (momentos fletores) nos membros verticais do modelo 2.

Portanto, análises geometricamente não lineares realizadas pela presente proposta comprovam a exatidão da formulação apresentada.

#### DECLARAÇÃO DE RESPONSABILIDADE

Os autores são os únicos responsáveis por este trabalho.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais) pelo apoio financeiro.

## REFERÊNCIAS

AL-SADDER, S. Z. Exact expressions for stability functions of a general non-prismatic beam-column member. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 60, n. 11, p. 1561-1584, 2004.

AL-SADDER, S. Z.; QASRAWI, H. Y. Exact Secant Stiffness Matrix for Nonprismatic Beam-Columns with Elastic Semirigid Joint Connections. *Emirates Journal for Engineering Research*, v.9, n.2, p.127–135, January 2004.

ARISTIZABAL-OCHOA, J. D. First- and Second-Order Stiffness Matrices and Load Vector of Beam-Columns with Semirigid Connections. *Journal of Structural Engineering*, v.123, n.5, p.669–678, May 1997.

BANERJEE, J. R.; WILLIAMS, F. W. Exact Bernoulli-Euler Static Stiffness Matrix for a Range of Tapered Beams-Columns. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.23, p.1615–1628, 1986.

BURGOS, R. B.; MARTHA, L. F. C. R. Exact Shape Functions and Tangent Stiffness Matrix for the Buckling of Beam-Columns Considering Shear Deformation. XXXIV *Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering* (CILAMCE 2013), Pirenópolis, GO, Brazil, 2013.

BURGOS, R. B.; MARTHA, L. F.; RODRIGUES, M. A. C.; RANGEL, R. L. Modelling of the P- $\delta$  effect using interpolating functions. In: *Proceedings of the XLII Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. 2021.

BURGOS, R. B.; SILVA, L. E. Evaluation of the P- $\Delta$  (P-Delta) effect in columns and frames using the two-cycle method based on the solution of the beam-column differential equation. *MethodsX*, v. 11, p. 102248, 2023.

CHAN, Siu-Lai; GU, Jian-Xin. Exact tangent stiffness for imperfect beam-column members. *Journal of Structural Engineering*, v. 126, n. 9, p. 1094-1102, 2000.

CHEN, W. F.; LUI, E. M. *Structural Stability: Theory and Implementation*. New York: Elsevier, 1987.

CHEN, W. F.; LUI, E. M. *Stability Design of Steel Frames*. Boca Raton: CRC Press, 1991.

EISENBERGER, M. Buckling loads for variable cross-section members with variable axial forces. *International Journal of Solids and Structures*, v. 27, n. 2, p. 135-143, 1991.

GOTO, Y.; CHEN, W. F. Second-Order Elastic Analysis for Frame Design. *Journal of Structural Engineering*, v.113, n.7, p.1501–1519, July 1987.

KREYSZIG, E. Advanced Engineering Mathematics. 10 ed. USA: John Wiley & Sons, Inc., 2011.

KUTIS, V.; MURÍN, J. Stability of a slender beam-column with locally varying Young's modulus. *Structural Engineering and Mechanics*, v.23, n.1, p.15–27, May 2006.

MURÍN, J.; KUTIS, V. 3D-beam element with continuous variation of the cross-sectional area. *Computers & Structures*, v.80, n.3-4, p.329–338, February 2002.

ORAN, C. Tangent stiffness in plane frames. *Journal of the Structural Division*, v. 99, n. 6, p. 973-985, 1973.

ORAN, C. Geometric nonlinearity in nonprismatic members. *Journal of the Structural Division*, v. 100, n. 7, p. 1473-1488, 1974.

RODRIGUES, M. A. C.; MARTHA, L. F. C. R.; SANTANA, M. V. B.; BURGOS, R. B. Avaliação de uma formulação completa da matriz de rigidez para análise não linear de estruturas. In: XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Florianópolis, SC, Brazil. 2017.

RODRIGUES, M. A. C. Soluções integradas para as formulações do problema de não linearidade geométrica. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 297 p., 2019.

RODRIGUES, M. A. C.; BURGOS, R. B.; MARTHA, L. F. A Unified approach to the timoshenko 3D Beam-Column element tangent stiffness matrix considering higher-order terms in the strain tensor and large rotations. *International Journal of Solids and Structures*, v. 222-223, 111003, 2021. 22 p.

RUBIN, H. Analytische Berechnung von Stäben und Stabwerken mit stetig veränderlichen Systemgrößen nach Theorie I. und II. Ordnung. *Bautechnik*, v.76, n.4, p.316– 327, April 1999.

SILVA, L. E. Análise de segunda ordem de elementos de pórtico baseados nas soluções exatas das equações diferenciais utilizando o método dos dois ciclos iterativos. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 86 p., 2022.

SILVA, L. E.; BURGOS, R. B. Second-order two-cycle analysis of frames based on interpolation functions from the solution of the beam-column differential equation. *REM-International Engineering Journal*, v. 76, n. 2, p. 139-146, 2023.

WUNDERLICH, W.; PILKEY, W. D. Mechanics of Structures Variational and Computational Methods. 2 ed. Boca Raton, Florida: CRC Press, 2003.