

ESTUDO DE FLAMBAGEM DE VIGA-COLUNA 2D NÃO PRISMÁTICA SUBMETIDA À FORÇA NORMAL VARIÁVEL

Aleff Gonçalves Quintino ⁽¹⁾ (aleffquintino@ufmg.br), Marcelo Greco ⁽¹⁾ (mgreco@dees.ufmg.br)

⁽¹⁾ Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG); Departamento de Engenharia de Estruturas

RESUMO: A obtenção de cargas críticas e modos de flambagem pelo método do elementos finitos exige que uma discretização adequada dos membros seja empregada, uma vez que trata-se de uma técnica de solução aproximada. Assim, a convergência da solução do problema de autovalor não linear depende exclusivamente do nível de refinamento da malha de elementos finitos. Contudo, estudos de flambagem envolvendo membros não prismáticos sob forças axiais variáveis podem requerer malhas ainda mais refinadas, dificultando assim a simulação computacional destes elementos. Visando simplificar a modelagem e eliminar o erro inerente da discretização, uma solução em série de potências da equação diferencial é fornecida com base no equilíbrio do elemento infinitesimal deformado, que em conjunto com o método da rigidez possibilitam derivar uma matriz de rigidez exata que leva em consideração a variação de rigidez do membro de viga-coluna 2D sob força normal variável. Desta forma, no presente artigo busca-se determinar cargas críticas de flambagem de uma viga-coluna não prismática sob força normal variável para diferentes condições de contorno. Análises de flambagem realizadas pelo método proposto com uma discretização mínima (1 ou 2 elementos) mostraram-se uma boa concordância quando comparadas às soluções numéricas obtidas pelo SAP2000 ao utilizar 100 elementos finitos por membro, comprovando assim a eficiência e exatidão da formulação desenvolvida.

PALAVRAS-CHAVE: FLAMBAGEM, VIGA-COLUNA 2D NÃO PRISMÁTICA, FORÇA NORMAL VARIÁVEL, EQUAÇÃO DIFERENCIAL.

BUCKLING STUDY OF NON-PRISMATIC 2D BEAM-COLUMN SUBJECTED TO VARIABLE NORMAL FORCE

ABSTRACT: Obtaining critical loads and buckling modes using the finite element method requires that an appropriate discretization of the members be used, since it is an approximate solution technique. Thus, the convergence of the solution of the nonlinear eigenvalue problem depends exclusively on the level of refinement of the finite element mesh. However, buckling studies involving non-prismatic members under variable axial forces may require even more refined meshes, thus complicating the computational simulation of these elements. Aiming to simplify the modeling and eliminate the inherent discretization error, a power series solution of the differential equation is provided based on the equilibrium of the infinitesimal deformed element, which together with the stiffness method makes it possible to derive an exact stiffness matrix that takes into account consideration of the stiffness variation of the 2D beam-column member under varying normal force. Therefore, in this article we seek to determine critical buckling loads of a non-prismatic beam-column under variable normal force for different boundary conditions. Buckling analyzes performed by the proposed method with a minimum discretization (1 or 2 elements) showed good agreement when compared to the numerical solutions obtained by SAP2000 when using 100 finite elements per member, thus proving the efficiency and accuracy of the developed formulation.

KEYWORDS: BUCKLING, NON-PRISMATIC 2D BEAM-COLUMN, VARIABLE NORMAL FORCE, DIFFERENTIAL EQUATION.

1. INTRODUÇÃO

A determinação de cargas críticas de flambagem de elementos não prismáticos esbeltos é de grande importância nos projetos de engenharia. Estudos realizados por Bleich (1952) e Timoshenko e Gere (1963) apontam que soluções analíticas fechadas estão disponíveis apenas para alguns casos simples de variação da seção transversal. Assim, diversos métodos numéricos foram desenvolvidos nas últimas décadas que permitem realizar análises de flambagem de vigas-colunas com seções arbitrariamente variadas. Estes trabalhos incluem o método de Rayleigh-Ritz, método de Galerkin, método de Runge-Kutta, método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos. Contudo, algumas técnicas numéricas limitam-se apenas a solução de equações diferenciais a nível do elemento, impossibilitando a análise de um sistema composto por vários membros.

Apesar da existência de inúmeras técnicas para solução de equações diferenciais governante do problemas de estabilidade, soluções numéricas usando o Método do Elementos Finitos (MEF) são frequentemente empregadas, uma vez que possibilita a análise de estruturas grandes e complexas, baseado na solução do problema de autovalor generalizado não linear pelo método de Newton-Raphson.

No entanto, vale ressaltar que modelos tradicionais de elementos finitos trazem consigo um conjunto de aproximações inerentes das funções de forma previamente assumidas, bem como do método de integração numérica utilizado, consequentemente numa análise de estabilidade a exatidão das soluções numéricas dependem exclusivamente da discretização adotada, principalmente da experiência do analista na escolha adequada do número de segmentos que devem ser utilizados na discretização de um membro estrutural (BURGOS e MARTHA, 2013).

Na literatura em geral algumas estratégias são adotadas a fim de reduzir a dependência da discretização de membros em análises não lineares geométricas/estabilidade, como Banerjee e Williams (1986), Goto e Chen (1987), Chen *et al.* (1989), Chen e Lui (1987; 1991), Eisenberger (1991), Aristizabal-Ochoa (1997), Rubin (1999), Murín e Kutis (2002), Wunderlich e Pilkey (2003), Al-Sadder (2004), Kutis e Murín (2006), Huang e Li (2012), Burgos e Martha (2013), Taha e Essam (2013), Rezaiee-Pajand *et al.* (2016), Rodrigues (2019), Rodrigues *et al.* (2021), Silva e Burgos (2023) que utilizaram soluções de equações diferenciais na derivação da matriz de rigidez do membro de viga-coluna.

Timoshenko e Gere (1963) obtiveram fatores de carga críticos para uma viga-coluna não prismática engastada livre submetida à carga axial distribuída, considerando diferentes variações da rigidez à flexão e da carga axial aplicada. Entretanto, existem poucos estudos que avaliam a estabilidade de elementos não prismáticos solicitados por força normal variável. Desta forma, busca-se neste trabalho o desenvolvimento de uma formulação semianalítica capaz de permitir tais análises.

1.1. Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo geral determinar cargas críticas de flambagem de membros não prismáticos sob força normal variável, a partir da solução da equação diferencial governante do equilíbrio do elemento na configuração deformada.

Além disso, propõe-se cumprir os seguintes objetivos específicos:

- Derivar a matriz de rigidez de um elemento de viga-coluna 2D não prismático sob força normal variável;
- Avaliar a estabilidade de elementos estruturais planos reticulados esbeltos, quando submetidos à instabilidade por bifurcação, sob diferentes condições de contorno;
- Realizar análises comparativas do presente estudo com modelos usuais de elementos finitos e com exemplos disponíveis na literatura científica.

1.2. Justificativas

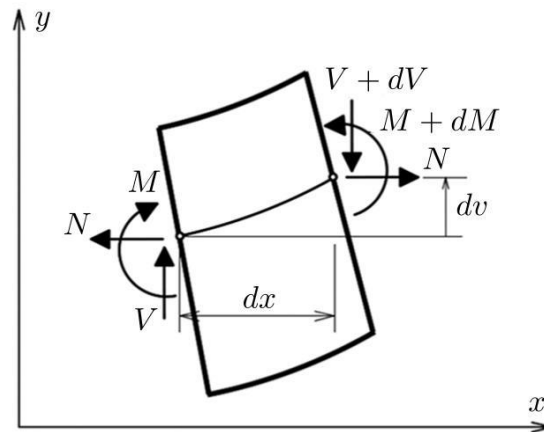
A solução analítica de EDOs lineares com coeficientes variáveis dada por meio de funções elementares está disponível apenas para alguns casos específicos. Assim, uma ação usual para este tipo de equações é assumir uma solução na forma de séries infinitas, denominada séries de potências.

A modelagem e simulação computacional pelo MEF de estruturas constituídas por membros não prismáticos podem exigir muito esforço e experiência por parte do projetista na discretização adequada de um membro estrutural, tendo em vista que trata-se de uma estratégia de solução aproximada. Desta forma, visando assegurar a exatidão dos resultados obtidos com um tempo reduzido de análise, buscam-se modelos numéricos que independam do nível de discretização empregada em análises de flambagem. Portanto, um atributo altamente desejável é o uso de um único elemento por membro para reduzir armazenamento, além de agilizar a preparação dos dados e a interpretação dos resultados (IU e BRADFORD, 2010).

2. EQUACIONAMENTO

A Figura 1 apresenta um elemento infinitesimal de viga-coluna na sua configuração deformada, submetido aos esforços internos N , V e M .

FIGURA 1. Equilíbrio de forças do elemento diferencial deformado.



Fonte: Adaptado de Rodrigues *et al.* (2021).

Considerando todas as forças generalizadas atuantes, a imposição do equilíbrio pela cinemática de vigas de Euler-Bernoulli leva as Equações 1 e 2.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V - (V + dV) = 0 \rightarrow \frac{dV}{dx} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum M_z = 0 &\rightarrow -M + (M + dM) - Vdx - Ndv = 0, \quad M = EI_z(x) \frac{d^2v}{dx^2} \\ \therefore \frac{d}{dx} \left(EI_z(x) \frac{d^2v}{dx^2} \right) - N \frac{dv}{dx} &= V \rightarrow \frac{d^2}{dx^2} \left(EI_z(x) \frac{d^2v}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(N \frac{dv}{dx} \right) = \frac{dV}{dx} \end{aligned} \quad (2)$$

Substituindo a Equação 1 na Equação 2, tem-se:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_z(x) \frac{d^2v}{dx^2} \right) - \frac{d}{dx} \left(N(x) \frac{dv}{dx} \right) = 0 \quad (3)$$

A força normal variável $N(x)$ pode ser descrita por séries de potências, ou seja:

$$N(x) = N_i \eta_N(x) = N_i \left(1 + \sum_{k=1}^p \eta_{Nk} x^k \right) \quad (4)$$

em que N_i é a força normal no nó inicial do membro. Similarmente, o segundo momento de área continuamente variável $I_z(x)$ de uma viga-coluna não prismática pode ser representado em séries de potências da seguinte forma:

$$I_z(x) = I_{zi} \eta_{I_z}(x) = I_{zi} \left(1 + \sum_{k=1}^q \eta_{I_z,k} x^k \right) \quad (5)$$

em que I_{zi} é o segundo momento de área no nó inicial do membro, p e q são os graus dos polinômios $\eta_{I_z}(x)$ e $\eta_N(x)$, respectivamente. Substituindo as Equações 4 e 5 na Equação 3, e dividindo toda a expressão resultante por EI_{zi} , obtém-se:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\eta_{I_z}(x) \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - k_i^2 \frac{d}{dx} \left(\eta_N(x) \frac{dv}{dx} \right) = 0 \quad (6)$$

em que $k_i^2 = N_i / EI_{zi}$. De acordo com Kreyszig (2011) a solução geral da Equação 6 pode ser expressa por meio de uma série de potências da forma

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (7)$$

Então

$$\frac{dv(x)}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad (8)$$

e

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \quad (9)$$

Logo, tem-se

$$\frac{d}{dx} \left(\eta_N(x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\min(n+1;p)} \eta_{Nj} (n+1)(n-j+2) a_{n-j+2} x^n \quad (10)$$

e

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\eta_{I_z}(x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\min(n+2;q)} \eta_{I_zj} (n+1)(n+2)(n-j+3)(n-j+4) a_{n-j+4} x^n \quad (11)$$

Substituindo as Equações 10 e 11 na Equação 6, obtém-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{\min(n+2;q)} \eta_{I_zj} (n+1)(n+2)(n-j+3)(n-j+4) a_{n-j+4} - k_i^2 \sum_{j=0}^{\min(n+1;p)} \eta_{Nj} (n+1)(n-j+2) a_{n-j+2} \right] x^n = 0 \quad (12)$$

Para satisfazer a Equação 12 para todos os valores de n , obtém-se a relação de recorrência para os coeficientes a_n , dada por:

$$a_{n+4} = \left[k_i^2 \sum_{j=0}^{\min(n+1;p)} \eta_{Nj} (n+1)(n-j+2) a_{n-j+2} - \sum_{j=1}^{\min(n+2;q)} \eta_{I_zj} (n+1)(n+2)(n-j+3)(n-j+4) a_{n-j+4} \right] / [(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)], \quad (n=0,1,2,\dots,\infty) \quad (13)$$

Através da Equação 13 as soluções linearmente independentes da Equação 3 são obtidas explicitamente em termos das quatro constantes $(a_0, a_1, a_2 \text{ e } a_3)$ que podem ser determinadas pela imposição das condições de contorno. No entanto, é conveniente expressar a solução geral em termos das condições iniciais $(v_0 = a_0, v'_0 = a_1, v''_0 = 2a_2 \text{ e } v'''_0 = 6a_3)$, na forma

$$v(x) = \sum_{j=0}^3 v_0^{(j)} c_j(x) \quad (14)$$

em que $v_0^{(j)}$ é j -ésima derivada da função $v(x)$ no ponto $x=0$, $c_j(x)$ é a solução linearmente independente da equação diferencial governante (Equação 3). A função $v(x)$ representa o deslocamento transversal ao longo da viga (linha elástica). Assim, a Equação 14 e suas derivadas podem ser expressas da seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v(x) \\ v'(x) \\ v''(x) \\ v'''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c'_0 & c'_1 & c'_2 & c'_3 \\ c''_0 & c''_1 & c''_2 & c''_3 \\ c'''_0 & c'''_1 & c'''_2 & c'''_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v'_0 \\ v''_0 \\ v'''_0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Na derivação da matriz de rigidez do elemento de viga-coluna aplica-se o conceito de rigidez do método da rigidez. Os coeficientes da matriz de rigidez k são definidos como as forças internas generalizadas (Equação 2) que surgem em ambas as extremidades do membro de comprimento L , devido à translação $v(x)$ ou rotação unitária $v'(x)$, em cada um dos quatro graus de liberdade, um de cada vez. Desta forma, existem quatro conjuntos de condições de contorno, dados por:

- 1) $v(0)=1, \quad v'(0)=v(L)=v'(L)=0;$
 - 2) $v'(0)=1, \quad v(0)=v(L)=v'(L)=0;$
 - 3) $v(L)=1, \quad v(0)=v'(0)=v'(L)=0;$
 - 4) $v'(L)=1, \quad v(0)=v'(0)=v(L)=0.$
- (16)

Cada conjunto na Equação 16 fornece uma coluna da matriz de rigidez k . Assim, tem-se

$$k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ \text{sim.} & & & k_{44} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

em que

$$k_{11} = -k_{13} = k_{33} = c_z \left(c'_2(L) - \eta'_{l_z}(0) c'_3(L) \right)$$

$$k_{12} = -k_{23} = c_z c'_3(L)$$

$$k_{14} = -k_{34} = c_z \left(c_2(L) - \eta'_{l_z}(0) c_3(L) \right)$$

$$k_{22} = c_z \left(c_1(L) c'_3(L) - c'_1(L) c_3(L) \right)$$

$$k_{24} = c_z c_3(L)$$

$$k_{44} = c_z \eta_{l_z} \left(c_2(L) c''_3(L) - c_3(L) c''_2(L) \right)$$

$$c_z = EI_{zi} / \left(c_2(L) c'_3(L) - c'_2(L) c_3(L) \right)$$

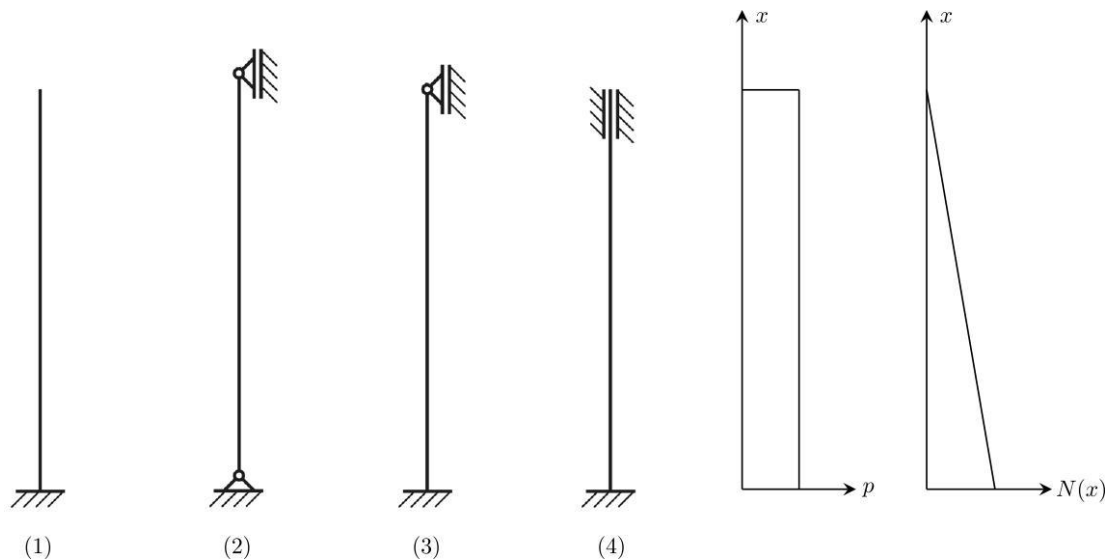
Logo, as cargas críticas são obtidas pela solução do problema de autovalor não linear na forma

$$|k| = 0 \quad (18)$$

3. EXEMPLOS

Neste estudo, além do método proposto utilizou-se o *software* SAP2000 baseado no MEF na análise de flambagem da viga-coluna não prismática sob força normal variável para diferentes condições de contorno, conforme apresentado na Figura 2.

FIGURA 2. Viga-coluna não prismática proposta para análise de flambagem.



Fonte: Adaptado de Kutis e Murín (2006).

O Exemplo numérico trata-se da obtenção dos fatores de carga críticos m de uma viga-coluna não prismática submetida à carga axial uniformemente distribuída p , para diferentes relações I_{zj} / I_{zi} , e diferentes condições de contorno, em que o subíndice i refere-se a base da viga-coluna. A largura da seção transversal se mantém constante ao longo do membro, enquanto a altura varia linearmente. A Equação que relaciona a carga axial distribuída crítica p_{cr} com o fator m é dada por:

$$p_{cr} = \frac{mEI_{zi}}{L^3} \quad (19)$$

Na análise de flambagem pelo presente método utilizou-se 1 elemento finito nos modelos 1, 2 e 3, e 2 elementos finitos no modelo 4. Na simulação pelo *software* SAP2000 modelou-se o membro de viga-coluna com 100 elementos finitos não prismáticos para todas as condições de contorno. A Tabela 1 apresenta os fatores de carga críticos para a viga-coluna engastada livre (modelo 1).

TABELA 1. Fatores de carga críticos m (modelo 1).

I_{zj} / I_{zi}	Método Proposto	SAP2000	Erro relativo (%)
0,1	5,027242935	5,027059169	3,66E-03
0,2	5,696581328	5,696363232	3,83E-03
0,3	6,149981952	6,149741353	3,91E-03
0,4	6,503484973	6,503226963	3,97E-03
0,5	6,797637725	6,797365351	4,01E-03
0,6	7,051869150	7,051584347	4,04E-03
0,7	7,277141739	7,276845975	4,06E-03
0,8	7,480306925	7,488121434	1,04E-01
0,9	7,665960061	7,669617303	4,77E-02
1,0	7,837347439	7,837024438	4,12E-03

Fonte: Autores (2024).

A Tabela 2 apresenta os resultados do modelo 1 para a relação $I_{zj} / I_{zi} = 0,1$ considerando diferentes níveis de refinamento de malha pelo SAP2000, em que NE é o número de elementos finitos por membro.

TABELA 2. Fatores de carga críticos m para a relação $I_{zj} / I_{zi} = 0,1$ (modelo 1).

NE	Método Proposto	SAP2000	Erro relativo (%)
1	5,027242935	2,965244294	4,10E+01
2	-	4,467244041	1,11E+01
5	-	4,950751428	1,52E+00
10	-	5,008679054	3,69E-01
20	-	5,022637328	9,16E-02
50	-	5,026507630	1,46E-02
100	-	5,027059169	3,66E-03

Fonte: Autores (2024).

A partir dos resultados apresentados na Tabela 1, pode-se observar uma pequena diferença nos resultados do SAP2000 em relação ao presente método, mesmo com o uso de 100 elementos finitos. Ressalta-se ainda que a relação $I_{zj}/I_{zi}=0,8$ apresentou um erro superior quando comparada com as demais. A Tabela 3 apresenta os fatores de carga críticos para a viga-coluna biapoiada (modelo 2).

TABELA 3. Fatores de carga críticos m (modelo 2).

I_{zj}/I_{zi}	Método Proposto	SAP2000	Erro relativo (%)
0,1	7,883652404	7,883646773	7,14E-05
0,2	10,04614363	10,04619480	5,09E-04
0,3	11,64811446	11,64821064	8,26E-04
0,4	12,97332330	12,97345843	1,04E-03
0,5	14,12664668	14,12681685	1,20E-03
0,6	15,16032025	15,16052274	1,34E-03
0,7	16,10472200	16,10495469	1,44E-03
0,8	16,97931922	16,99838168	1,12E-01
0,9	17,79745235	17,80707722	5,41E-02
1,0	18,56872484	18,56903920	1,69E-03

Fonte: Autores (2024).

A Tabela 4 apresenta os resultados do modelo 2 para a relação $I_{zj}/I_{zi}=0,1$ considerando diferentes níveis de refinamento de malha pelo SAP2000.

TABELA 4. Fatores de carga críticos m para a relação $I_{zj}/I_{zi}=0,1$ (modelo 2).

NE	Método Proposto	SAP2000	Erro relativo (%)
1	7,883652404	7,389487946	6,27E+00
2	-	7,604033750	3,55E+00
5	-	7,874439573	1,17E-01
10	-	7,882667209	1,25E-02
20	-	7,883486129	2,11E-03
50	-	7,883629358	2,92E-04
100	-	7,883646773	7,14E-05

Fonte: Autores (2024).

Conforme a Tabela 3 verifica-se novamente um erro mais significativo para a relação $I_{zj}/I_{zi}=0,8$. A Tabela 5 apresenta os fatores de carga críticos para a viga-coluna engastada apoiada (modelo 3).

TABELA 5. Fatores de carga críticos m (modelo 3).

I_{zj}/I_{zi}	Método Proposto	SAP2000	Erro relativo (%)
0,1	24,55699157	24,55543584	6,34E-03
0,2	30,40838823	30,40674692	5,40E-03
0,3	34,66287319	34,66115997	4,94E-03
0,4	38,14026616	38,13848991	4,66E-03
0,5	41,13971124	41,13787818	4,46E-03
0,6	43,80891322	43,80702794	4,30E-03
0,7	46,23319595	46,23126204	4,18E-03
0,8	48,46693807	48,51818366	1,06E-01
0,9	50,54722988	50,57154559	4,81E-02
1,0	52,50066308	52,49859880	3,93E-03

Fonte: Autores (2024).

A Tabela 6 apresenta os resultados do modelo 3 para a relação $I_{zj}/I_{zi}=0,1$ considerando diferentes níveis de refinamento de malha pelo SAP2000.

TABELA 6. Fatores de carga críticos m para a relação $I_{zj}/I_{zi}=0,1$ (modelo 3).

NE	Método Proposto	SAP2000	Erro relativo (%)
1	24,55699157	12,51787656	4,90E+01
2	-	19,52566746	2,05E+01
5	-	23,88490409	2,74E+00
10	-	24,39859237	6,45E-01
20	-	24,51793132	1,59E-01
50	-	24,55076535	2,54E-02
100	-	24,55543584	6,34E-03
150	-	24,55630021	2,82E-03

Fonte: Autores (2024).

Conforme a Tabela 5 observa-se uma boa concordância nos resultados entre ambos os métodos. A Tabela 7 apresenta os fatores de carga crítico para a viga-coluna biengastada (modelo 4).

TABELA 7. Fatores de carga críticos m (modelo 4).

I_{zj} / I_{zi}	Método Proposto	SAP2000	Erro relativo (%)
0,1	32,89293994	32,89345430	1,56E-03
0,2	41,46914293	41,46954627	9,73E-04
0,3	47,77159593	47,77192400	6,87E-04
0,4	52,95740455	52,95767158	5,04E-04
0,5	57,45226555	57,45247943	3,72E-04
0,6	61,46752978	61,46769561	2,70E-04
0,7	65,12580237	65,12592376	1,86E-04
0,8	68,50549059	68,58113976	1,10E-01
0,9	71,66022935	71,69773508	5,23E-02
1,0	74,62856872	74,62857097	3,01E-06

Fonte: Autores (2024).

A Tabela 8 apresenta os resultados do modelo 4 para a relação $I_{zj} / I_{zi} = 0,1$ considerando diferentes níveis de refinamento de malha pelo SAP2000.

TABELA 8. Fatores de carga críticos m para a relação $I_{zj} / I_{zi} = 0,1$ (modelo 4).

NE	Método Proposto	SAP2000	Erro relativo (%)
2	32,89293994	32,15483317	2,24E+00
5	-	33,23953654	1,05E+00
10	-	32,95367781	1,85E-01
20	-	32,90637955	4,09E-02
50	-	32,89500909	6,29E-03
100	-	32,89345430	1,56E-03
150	-	32,89316830	6,94E-04

Fonte: Autores (2024).

Diante das análises realizadas, no geral pode-se verificar que as respostas obtidas pelo *software* SAP2000 mostraram-se muito próximas das respostas encontradas pelo método proposto ao utilizar uma malha com 100 elementos finitos. No entanto, na tentativa de melhorar ainda mais

os resultados, malhas mais refinadas poderiam ter sido empregadas a depender da condição de contorno e/ou da relação I_{zj} / I_{zi} . Além disso, para a relação $I_{zj} / I_{zi} = 0,1$ é possível verificar que os modelos 2 e 4 apresentaram respostas mais estáveis em relação aos modelos 1 e 3. Isso acontece devido as condições de contorno de cada modelo, na qual os modelos 2 e 4 apresentam modos de flambagem com características mais simétricas em relação ao centro do membro quando comparados com os modelos 1 e 3.

Em geral, verifica-se também que a convergência das respostas pelo SAP2000 em análises de flambagem envolvendo elementos não prismáticos submetidos à força normal variável exige que um número considerável de elementos finitos por membro seja empregado, tendo em vista a complexidade do problema. Normalmente, modelos computacionais baseados no MEF consideram que a força normal é constante ao longo do elemento, o que justifica a necessidade de uma discretização adequada.

4. CONCLUSÕES

Diante dos exemplos apresentados, as análises de flambagem usando uma discretização mínima (1 ou 2) elemento(s) finito(s) por membro mostraram-se uma boa concordância quando comparadas às soluções numéricas tradicionais via MEF ao utilizar 100 elementos finitos por membro. Além disso, os resultados obtidos pelo método proposto são independentes da discretização do modelo.

Entretanto, para a relação $I_{zj} / I_{zi} = 0,1$ verificou-se que o uso de apenas um elemento finito por membro pelo SAP2000 nos modelos 1, 2, 3 e 4 gerou um erro de 41,0%, 6,27%, 49,0% e 2,24%, respectivamente, justificando assim a necessidade do uso de mais elementos finitos por membro em análises numéricas via MEF. Nos modelos 1, 2 e 3 observou-se que os resultados obtidos pelo SAP2000 ficaram inferiores aos resultados encontrados pelo método proposto para diferentes níveis de discretização, ou seja, a favor da segurança. Em contrapartida, no modelo 4 ficaram superiores, isto é, contra a segurança, exceto a malha de 2 elementos finitos.

Desta forma, análises de flambagem envolvendo membros não prismáticos sob força normal variável realizadas pela presente proposta comprovam a eficiência e exatidão da formulação apresentada.

DECLARAÇÃO DE RESPONSABILIDADE

Os autores são os únicos responsáveis por este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais) pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

AL-SADDER, S. Z. Exact expressions for stability functions of a general non-prismatic beam-column member. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 60, n. 11, p. 1561-1584, 2004.

ARISTIZABAL-OCHOA, J. D. First- and Second-Order Stiffness Matrices and Load Vector of Beam-Columns with Semirigid Connections. *Journal of Structural Engineering*, v.123, n.5, p.669–678, May 1997.

BANERJEE, J. R.; WILLIAMS, F. W. Exact Bernoulli-Euler Static Stiffness Matrix for a Range of Tapered Beams-Columns. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.23, p.1615–1628, 1986.

BLEICH, F. Buckling strength of metal structures. McGraw-Hill, Inc., New York, N. Y, 1952.

BURGOS, R. B.; MARTHA, L. F. C. R. Exact Shape Functions and Tangent Stiffness Matrix for the Buckling of Beam-Columns Considering Shear Deformation. XXXIV *Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2013)*, Pirenópolis, GO, Brazil, 2013.

CHEN, W. F.; LUI, E. M. Structural Stability: Theory and Implementation. New York: Elsevier, 1987.

CHEN, W. F.; LUI, E. M. Stability Design of Steel Frames. Boca Raton: CRC Press, 1991.

CHEN, Y. Z.; CHEUNG, Y. K.; XIE, J. R. Buckling Loads of Columns with Varying Cross Sections. *Journal of Engineering Mechanics*, v.115, n.3, p.662–667, December 1989.

EISENBERGER, M. Buckling loads for variable cross-section members with variable axial forces. *International Journal of Solids and Structures*, v. 27, n. 2, p. 135-143, 1991.

GOTO, Y.; CHEN, W. F. Second-Order Elastic Analysis for Frame Design. *Journal of Structural Engineering*, v.113, n.7, p.1501–1519, July 1987.

HUANG, Y.; LI, X.-F. An Analytic Approach for Exactly Determining Critical Loads of Buckling of Nonuniform Columns. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v.12, n.4, p.13p., 2012.

IU, C. K.; BRADFORD, M. A. Second-order elastic finite element analysis of steel structures using a single element per member. *Engineering Structures*, v.32, n.9, p.2606–2616, September, 2010.

KREYSZIG, E. Advanced Engineering Mathematics. 10 ed. USA: John Wiley & Sons, Inc., 2011.

KUTIS, V.; MURÍN, J. Stability of a slender beam-column with locally varying Young's modulus. *Structural Engineering and Mechanics*, v.23, n.1, p.15–27, May 2006.

MURÍN, J.; KUTIS, V. 3D-beam element with continuous variation of the cross-sectional area. *Computers & Structures*, v.80, n.3-4, p.329–338, February 2002.

REZAIEE-PAJAND, M.; SHAHABIAN, F.; BAMBAEECHEE, M. Stability of Nonprismatic Frames with Flexible Connections and Elastic Supports. *KSCE Journal of Civil Engineering*, v.20, p.832–846, March 2016.

RODRIGUES, M. A. C. Soluções integradas para as formulações do problema de não linearidade geométrica. Tese de Doutorado. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2019.

RODRIGUES, M. A. C.; BURGOS, R. B.; MARTHA, L. F. A Unified approach to the timoshenko 3D Beam-Column element tangent stiffness matrix considering higher-order terms in the strain tensor and large rotations. *International Journal of Solids and Structures*, v. 222-223, 111003, 2021. 22 p.

RUBIN, H. Analytische Berechnung von Stäben und Stabwerken mit stetig veränderlichen Systemgrößen nach Theorie I. und II. Ordnung. *Bautechnik*, v.76, n.4, p.316– 327, April 1999.

SILVA, L. E.; BURGOS, R. B. Second-order two-cycle analysis of frames based on interpolation functions from the solution of the beam-column differential equation. *REM-International Engineering Journal*, v. 76, n. 2, p. 139-146, 2023.

TAHA, M.; ESSAM, M. Stability behavior and free vibration of tapered columns with elastic end restraints using the DQM method. *Ain Shams Engineering Journal*, v.4, n.3, p.515–521, September 2013.

TIMOSHENKO, S. T.; GERE, J. M. Theory of Elastic Stability. 2 ed. Singapore: McGraw-Hill International Book Company, 1963.

WUNDERLICH, W.; PILKEY, W. D. Mechanics of Structures Variational and Computational Methods. 2 ed. Boca Raton, Florida: CRC Press, 2003.