

SIMULAÇÃO NUMÉRICA E SIMPLIFICAÇÃO ANALÍTICA UTILIZANDO O MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL PARA DETERMINAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DE UM PÓRTICO METÁLICO COM PERFIL U ENRIJECIDO

Carlos Natã Zenatti ⁽¹⁾ (carloszenatti@alunos.utfpr.edu.br), Paulo Rogerio Novak ⁽¹⁾ (novak@utfpr.edu.br),
Giovanni Bratti ⁽²⁾ (giovannibratti@utfpr.edu.br), Robson Gonçalvez Trentin ⁽²⁾ (robson trentin@utfpr.edu.br),
Diego Rizotto Rossetto ⁽²⁾ (diegorossetto@utfpr.edu.br)

⁽¹⁾ Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR); Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

⁽²⁾ Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR); Departamento de Engenharia Mecânica

RESUMO: *Os estudos em sistemas estruturais compostos por pórticos em diversos setores das Engenharias foram recentemente alavancados em razão de sua vasta aplicabilidade. Nesse aspecto, a tendência é o foco em estruturas metálicas sujeitas a esforços dinâmicos e vibrações. Dessa forma, o atual trabalho consiste em determinar as frequências naturais e os modos de vibração de um pórtico metálico com perfil U enrijecido. Para isso, um modelo analítico simplificado é desenvolvido e resolvido pelo método da superposição modal. Além disso, é realizada uma simulação numérica utilizando o método de elementos finitos. Como o método numérico tende a fornecer soluções aproximadas, uma comparação dos resultados obtidos pelos dois métodos é realizada. Por fim, os resultados evidenciam que mesmo havendo uma maior divergência na segunda e terceira frequência natural, o modelo analítico simplificado demonstrou eficácia na determinação da primeira frequência natural, na representação dos modos de vibração e da função resposta em frequência.*

PALAVRAS-CHAVE: ANÁLISE DINÂMICA, MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS, VIBRAÇÃO, ANÁLISE MODAL.

NUMERICAL SIMULATION AND ANALYTICAL SIMPLIFICATION USING THE MODAL SUPERPOSITION METHOD TO DETERMINE THE NATURAL FREQUENCIES OF A STIFFENED U-PROFILE STEEL FRAME

ABSTRACT: *Studies on structural systems made up of frames in various engineering sectors have recently been boosted due to their vast applicability. In this respect, the trend is to focus on steel structures subject to dynamic forces and vibrations. Therefore, the current work consists of determining the natural frequencies and vibration modes of a metal frame with a stiffened U profile. To do this, a simplified analytical model is developed and solved using the modal superposition method. In addition, a numerical simulation is carried out using the finite element method. As the numerical method tends to provide approximate solutions, a comparison of the results obtained by the two methods is carried out. Finally, the results show that even though there is a greater divergence in the second and third natural frequencies, the simplified analytical model proved to be effective in determining the first natural frequency, in representing the vibration modes and the frequency response function.*

KEYWORDS: DYNAMIC ANALYSIS, FINITE ELEMENT METHOD, VIBRATION, MODAL ANALYSIS.

1. INTRODUÇÃO

Pórticos são sistemas estruturais compostos por elementos de vigas e colunas, usualmente dimensionados a fim de suportar e resistir a esforços mecânicos aplicados. A vasta aplicação dessas estruturas nas Engenharias, principalmente na Engenharia Civil e Engenharia Mecânica, deve-se à alta rigidez lateral e vertical para carregamentos (De Biagi, 2021). De acordo com Heyman (1974), isso ocorre devido ao fato de a deformação estrutural ser menor do que a deformação dos elementos que integram a estrutura, entretanto, essa suposição depende das condições de contorno e dos materiais empregados na estrutura.

Um material usualmente aplicado em sistemas estruturais compostos por pórticos é o aço estrutural, pois suas principais vantagens são: alta eficiência e ductibilidade, resistir à altas deformações sem sair do regime elástico, baixo impacto ambiental, rápida aplicação e acessibilidade (Xue, 2020), motivo pelo qual as estruturas metálicas são atrativas nas aplicações estruturais. Em que pese as análises estruturais estáticas serem sempre realizadas na Engenharia Civil, em muitos casos as análises dinâmicas são também necessárias.

Quando uma estrutura está exposta a um esforço dinâmico, ela pode também estar sujeita ao fenômeno de ressonância, que é quando uma das frequências naturais do sistema coincide com a frequência de uma força externa (Clough e Joseph, 2003; Kappos, 2002; Paultre, 2011; Paz e Kim, 2019; Rao, 2008; Soriano, 2015). Isso ocorre devido ao fato de que os esforços dinâmicos são diferentes dos esforços estáticos, pois possuem uma variação do carregamento ao longo do tempo, podendo causar deslocamentos, forças internas, reações e estresses, ocasionando vibrações excessivas (Paultre, 2011). Ainda, de acordo com Rao (2008) e Soriano (2015), a presença de vibrações pode afetar as estruturas, resultando em desgastes, trincas, afrouxamentos e falhas estruturais, além de afetar os seres humanos com dores, desconfortos e reduzir a qualidade de vida dos usuários.

A fim de agilizar processos na engenharia, as equações analíticas buscam simplificar a compreensão dos parâmetros que afetam os resultados das soluções (Cuha e Peker, 2023; Ward et al., 2007), o que torna os métodos analíticos essenciais às Engenharias. Segundo He e Lee (2009), esses métodos são cruciais para resolver problemas clássicos e modernos. Entre eles, o método da superposição modal é amplamente utilizado na análise de vibrações, pois permite determinar parâmetros como frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibração (Cara, 2016). Contudo, para uma compreensão mais completa do comportamento dinâmico das estruturas, a análise da função resposta em frequência (FRF) é igualmente fundamental, pois fornece uma visão detalhada de como a estrutura reage a diferentes frequências de excitação, evidenciando frequências nas quais a resposta é amplificada ou suprimida.

1.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho consiste em determinar as frequências naturais, os modos de vibração e a função resposta em frequência de um pórtico metálico com perfil U enrijecido. Para isso, será desenvolvido um modelo analítico simplificado, para uso nas simulações numéricas através do programa comercial Ansys®.

1.2 Justificativas

Esta pesquisa é motivada pela ampla aplicação de pórticos metálicos em diversas áreas da Engenharia, especialmente na Engenharia Civil e construção civil. Embora as análises dinâmicas não sejam comuns nos projetos de Engenharia Civil, essas estruturas estão sujeitas a esforços dinâmicos ao longo de suas vidas úteis, o que pode causar vibrações excessivas, deformações ou até mesmo a ruína. Um método analítico simplificado facilita a determinação das frequências naturais da estrutura e permite ajustes mais rápidos no projeto para evitar ressonância, comparado às simulações numéricas.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

2.1 Modelo do pórtico

O pórtico é confeccionado em aço estrutural 1020 e formado por uma viga na parte superior e duas colunas, como apresentado na Figura 1. Um sistema de coordenadas foi inserido na figura para facilitar a compreensão. As propriedades geométricas e materiais do pórtico são apresentadas na Tabela 1. Os momentos de inércia de área da seção transversal da coluna foram obtidos analiticamente em relação aos eixos x e z. O momento de inércia de massa da viga foi calculado em relação ao eixo y, que passa pelo centro de massa da viga. As medidas do pórtico e das seções transversais (viga e colunas) demonstradas na Figura 1 estão apresentadas na Tabela 2.

TABELA 1. Propriedades geométricas e materiais do pórtico.

(continua)

Densidade (ρ)	7850	(kg/cm ³)
Módulo de Elasticidade (E)	208	(GPa)
Coeficiente de Poisson (ν)	0,3	-

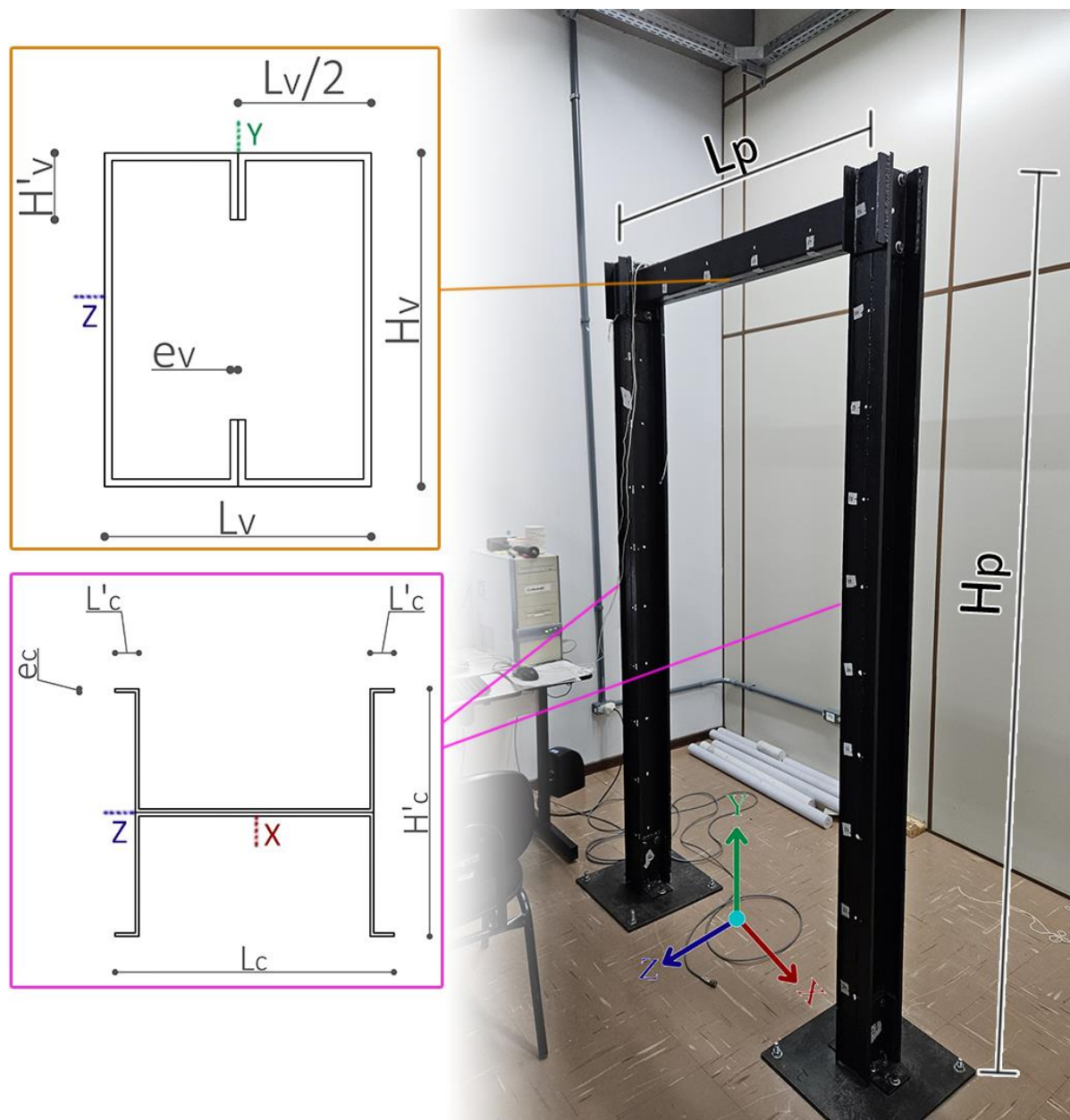
TABELA 1. Propriedades geométricas e materiais do pórtico.

(conclusão)

Inércia de área da seção transversal da coluna (I_x)	$1,135 \times 10^{-6}$	(m^4)
Inércia de área da seção transversal da coluna (I_z)	$4,154 \times 10^{-7}$	(m^4)
Inércia de massa da Viga (I_v)	1,449	($kg.m^2$)

Fonte: Autores (2024).

FIGURA 1. Seções transversais e dimensões do pórtico metálico com eixos de coordenadas, dimensões em milímetros.



Fonte: Autores (2024).

TABELA 2. Medidas da estrutura.

Nomenclatura	Medida (mm)
H_p	2100
L_p	1000
H_v	100
L_v	80
H'_v	20
e_v	2,28
H_c	104
L_c	117
L'_c	10
e_c	1,5

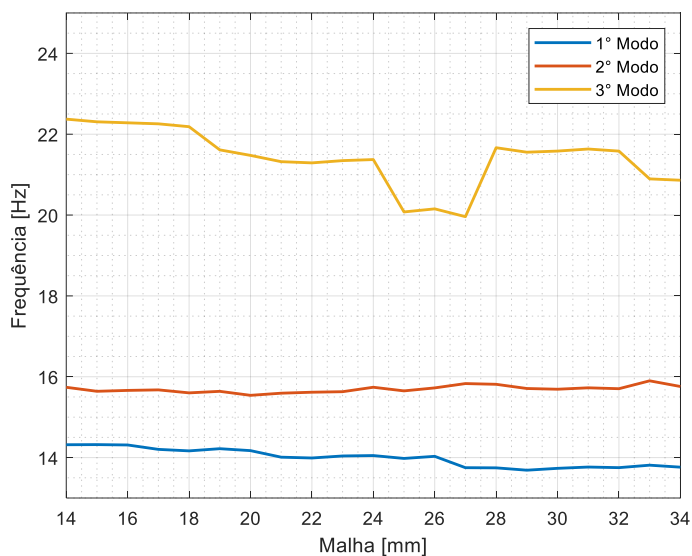
Fonte: Autores (2024).

2.2 Modelo numérico

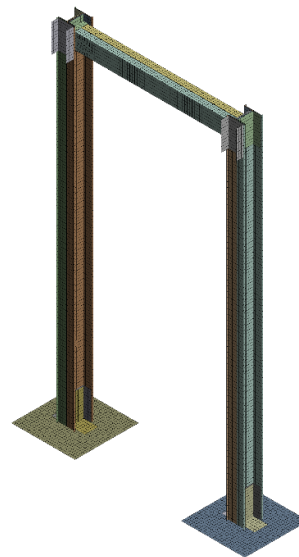
A modelagem numérica foi realizada no programa Ansys® que utiliza o método de elementos finitos. As frequências naturais e os modos de vibração do pórtico foram obtidos pela análise modal, e a FRF da receptância foi obtida pela análise harmônica, utilizando o método da superposição modal. Um fator de amortecimento (ζ) de 0,01 foi inserido para que as amplitudes de respostas não tendessem ao infinito. A faixa de frequência analisada foi de 0 Hz a 30 Hz.

Para obter resultados mais precisos nas análises dinâmicas, a escolha do tamanho dos elementos foi baseada numa análise de convergência das três primeiras frequências naturais do sistema. Para isso, foram realizadas simulações das frequências naturais, escolhendo-se um tamanho máximo de elemento para cada simulação. Iniciou-se com um tamanho de 34 mm e finalizou-se no tamanho de 14 mm, conforme pode ser observado nos resultados apresentados na Figura 2(a). Verificou-se que, para tamanhos de elementos menores que 16 mm, os valores destas três frequências sofreram pequenas modificações. Assim, foi adotado um tamanho máximo de elemento de 15 mm, o que resultou numa malha composta por 15933 nós e 14663 elementos. As condições de contorno adotadas foram: engaste da base com o solo e contato semirrígido entre todos os elementos estruturais.

FIGURA 2. Análise de convergência de malha e malha da estrutura.



(a)

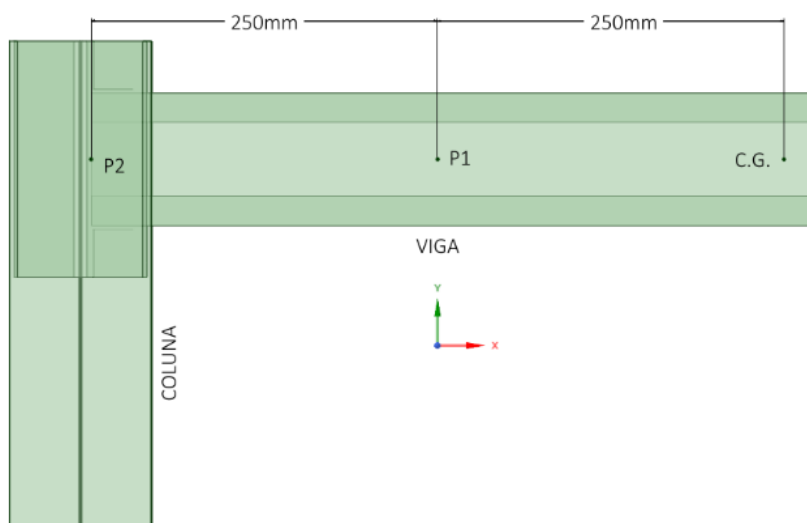


(b)

Fonte: Autores (2024).

Para a análise harmônica, foi aplicada uma força harmônica de 1 N nas direções z e x no ponto de extremidade da viga (P2) e foram medidos os deslocamentos resultantes nos pontos de extremidade (P2), em um ponto intermediário (P1) e no centro de massa (C.G.). O ponto P2 foi selecionado como local para aplicação da força por não ser um ponto nodal e por permitir que uma grande quantidade de frequências seja excitada. A Figura 3 ilustra as coordenadas e as distâncias entre os pontos.

FIGURA 3. Ponto de aplicação da força da resposta harmônica.

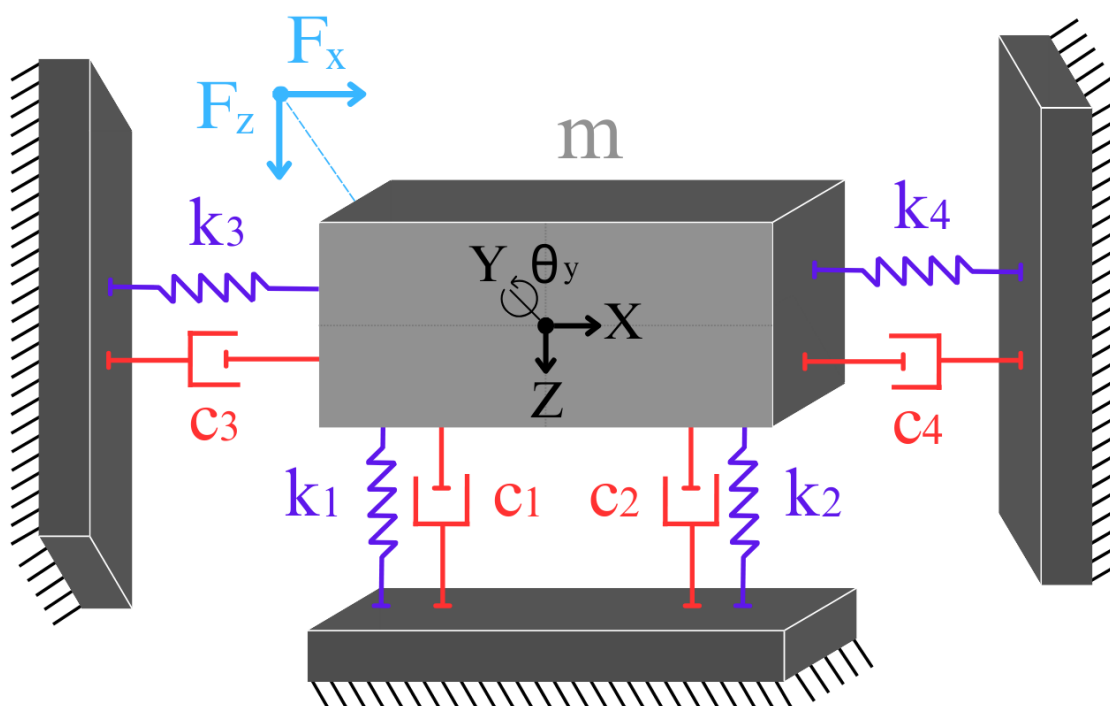


Fonte: Autores (2024).

2.3 Modelo Analítico

A Figura 4 representa o pórtico através de um modelo analítico discreto simplificado de três graus de liberdade utilizado para determinação das três primeiras frequências naturais da estrutura, relativas aos movimentos de translação em z, rotação em y e translação em x.

FIGURA 4. Modelo analítico/discreto.



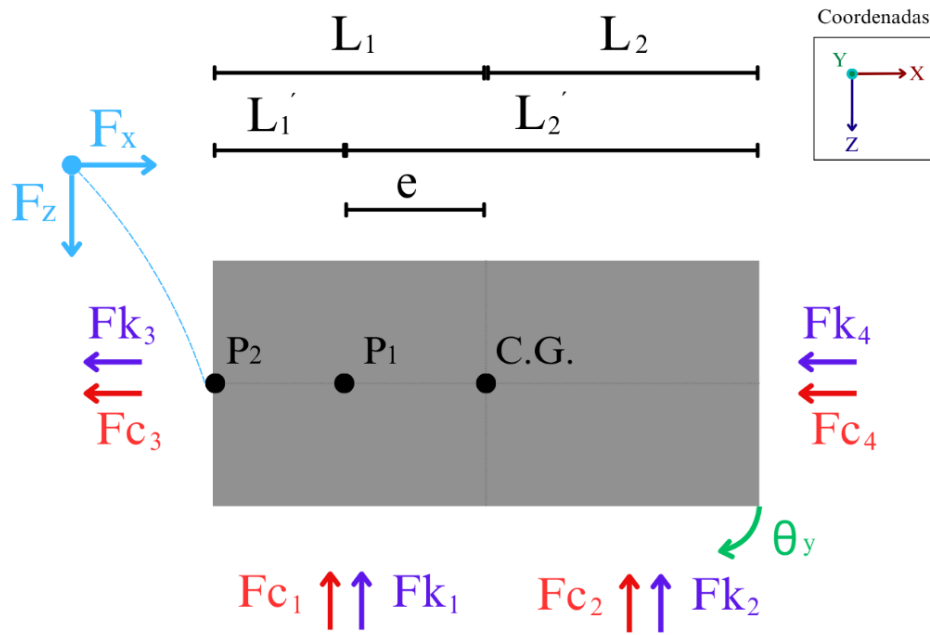
Fonte: Autores (2024).

No modelo foi considerada a rigidez lateral das colunas (k_{1-2}) na direção z, a rigidez lateral da coluna (k_{3-4}) na direção x, a massa total da estrutura (m_T). Além disso, a excitação foi realizada na direção z, e na direção x com uma força harmônica (F_z e F_x) de 1 N. Um fator de amortecimento (ζ) de 0,01 igual ao modelo numérico também foi adicionado. A Equação 1 representa a equação de movimento da estrutura, em função da matriz de massa (M), matriz de amortecimento (C) e matriz de rigidez (K) com base na aplicação de uma força (F).

$$[M] \cdot \{\ddot{x}\} + [C] \cdot \{\dot{x}\} + [K] \cdot \{x\} = \{F\} \quad (1)$$

A Figura 5 apresenta o diagrama de corpo livre da estrutura.

FIGURA 5. Diagrama de corpo livre do modelo analítico.



Fonte: Autores (2024).

Dessa forma, a equação do sistema é mostrada na Equação 2.

$$\begin{bmatrix} m_T & 0 & 0 \\ 0 & m_T & m_T \cdot e \\ 0 & m_T \cdot e & I_p \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_3 + c_4) & 0 & 0 \\ 0 & (c_1 + c_2) & (c_2 \cdot L_2' - c_1 \cdot L_1') \\ 0 & (c_2 \cdot L_2' - c_1 \cdot L_1') & (c_1 \cdot L_1'^2 + c_2 \cdot L_2'^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \dots \quad (2)$$

$$\dots \begin{bmatrix} (k_3 + k_4) & 0 & 0 \\ 0 & (k_1 + k_2) & (k_2 \cdot L_2' - k_1 \cdot L_1') \\ 0 & (k_2 \cdot L_2' - k_1 \cdot L_1') & (k_1 \cdot L_1'^2 + k_2 \cdot L_2'^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ z \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_z \\ -F_z \cdot L_1' \end{Bmatrix}$$

A Equação 3 mostra de forma desacoplada a Equação 2, pelo método da superposição modal, Φ é matriz de autovetores.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\zeta_2\omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta_3\omega_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ z \\ \theta \end{Bmatrix} = [\Phi]^T \begin{Bmatrix} F_x \\ F_z \\ -F_z \cdot L_1' \end{Bmatrix} \quad (3)$$

A Equação 4 expressa a rigidez lateral das colunas na direção z e a Equação 5 expressa a rigidez lateral da coluna na direção x, dependendo do módulo de elasticidade (E), momento de inércia da seção transversal da coluna em relação ao eixo x (I_x), momento de inércia da seção transversal da coluna em relação ao eixo z (I_z) e altura da coluna (L_c).

$$k_1 = k_2 = \frac{3 \cdot E \cdot I_x}{L_c^3} , \quad (4)$$

$$k_3 = k_4 = \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{L_c^3} . \quad (5)$$

A Equação 6 define a massa equivalente (m_T) do sistema sendo a soma da massa da viga (m_v) com as massas das colunas (m_c).

$$m_T = m_v + 0,23 \cdot m_c \cdot 2 \quad (6)$$

As equações de 1 a 6 foram implementadas numa rotina no programa Matlab®.

3. RESULTADOS

Na Tabela 3, são comparados os resultados das frequências naturais obtidas através do modelo analítico simplificado proposto e do método numérico do Ansys®, junto com seus respectivos erros relativos. A frequência natural analítica foi determinada pela solução da Equação 2, enquanto a frequência natural numérica foi obtida pela análise modal no programa Ansys®. Observa-se que o primeiro modo de vibração apresentou um erro relativo significativamente menor em comparação aos demais.

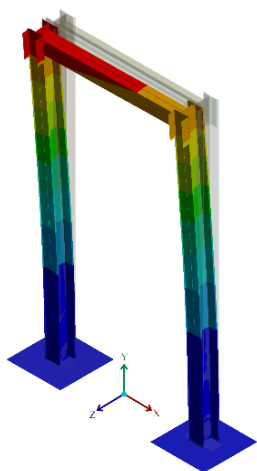
TABELA 3. Comparação numérico e analítico: frequências naturais e erros relativos.

Modo	Tipo do modo	Numérico (Hz)	Analítico (Hz)	Fator de amortecimento	Erro relativo (%)
1	1º de flexão em z	14,32	14,06	0,01	1,83
2	1º de flexão em x	15,64	18,06	0,01	15,47
3	1º de torção em y	22,31	25,85	0,01	15,91

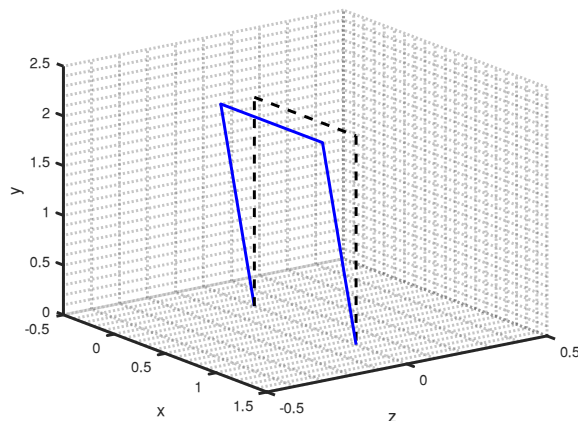
Fonte: Autores (2024).

A Figura 6 mostra os modos de vibração da estrutura, divididos conforme segue: as Figuras 6(a) e 6(b) apresentam o primeiro modo de flexão numérico e analítico na direção z; as Figuras 6(c) e 6(d) mostram o primeiro modo de flexão numérico e analítico na direção x; e as Figuras 6(e) e 6(f) ilustram o primeiro modo de torção numérico e analítico em torno do eixo y. Nas Figuras 6(b), 6(d) e 6(f), a linha tracejada em preto representa a estrutura sem movimento, enquanto a linha contínua em azul representa a estrutura em movimento no seu respectivo modo de vibração.

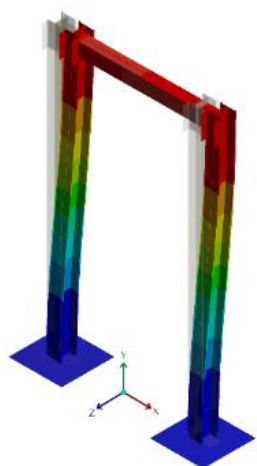
FIGURA 6. Comparação dos modos de vibração da estrutura: (a), (c) e (d) numérico; e (b), (d) e (f) analítico.



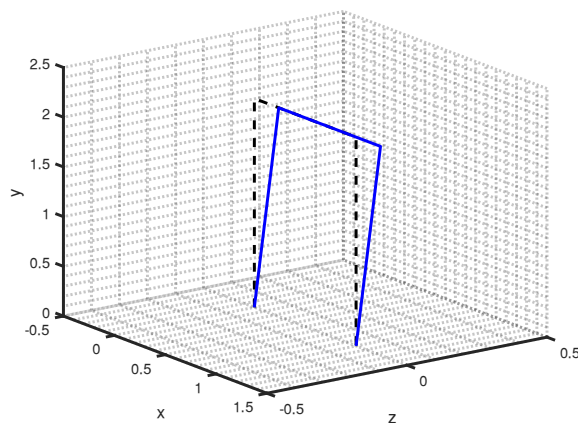
(a) 1º modo de vibração numérico (14,32 Hz)



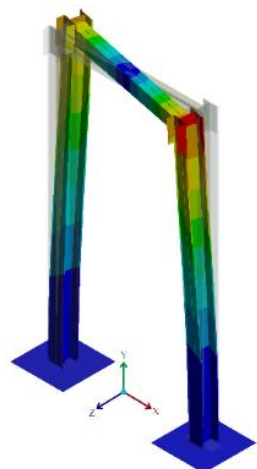
(b) 1º modo de vibração analítico (14,06 Hz)



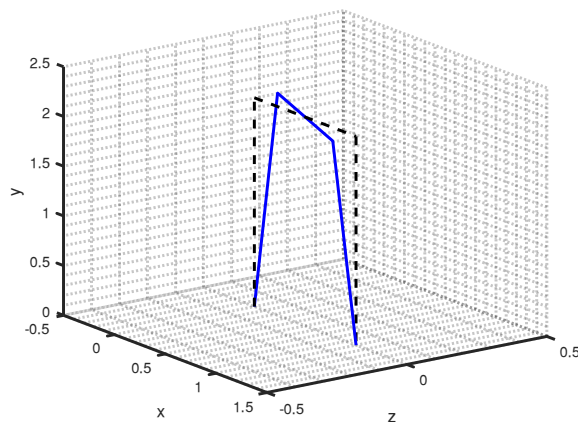
(c) 2º modo de vibração numérico (15,64 Hz)



(d) 2º modo de vibração analítico (18,06 Hz)



(e) 3º modo de vibração numérico (22,31 Hz)



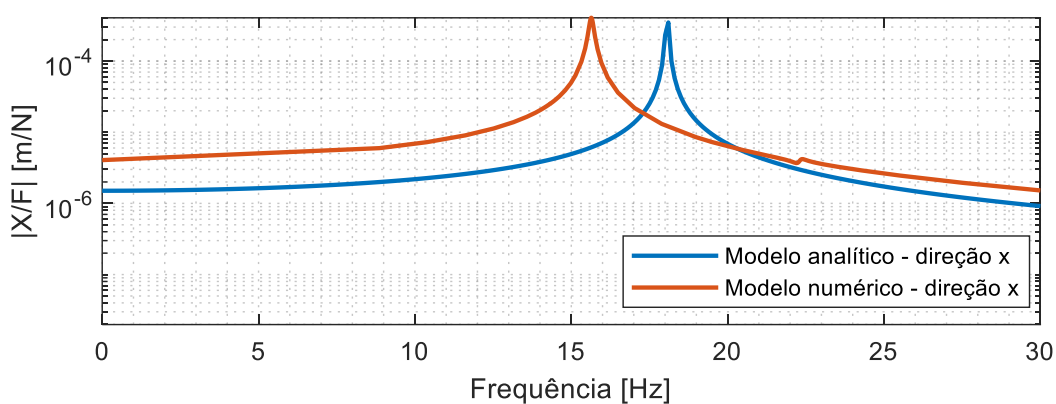
(f) 3º modo de vibração analítico (25,85Hz)

Fonte: Autores (2024).

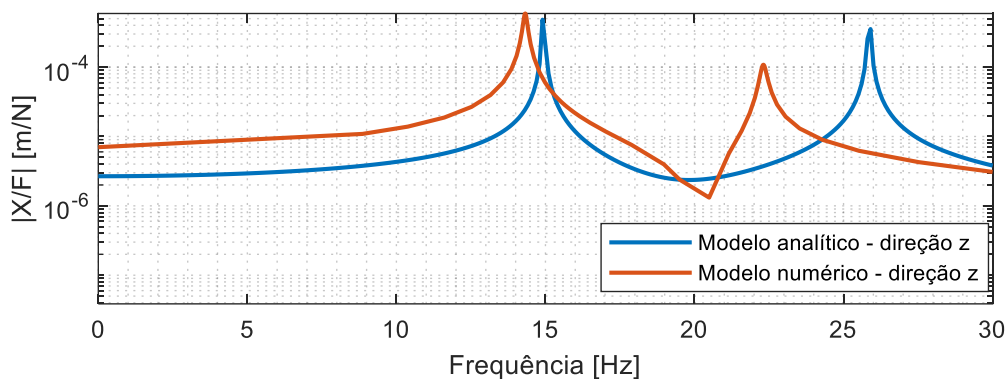
Na Figura 7, é apresentada a resposta no ponto 1 do módulo da receptância em função da frequência para uma força de 1 N aplicada no ponto 2 na direção x e z.

Verifica-se que, nas Figuras 7(a), 8(a) e 9(a), as respostas obtidas na primeira frequência natural, na direção x, foram de, aproximadamente, 0,38 mm para o modelo numérico e 0,34 mm para o analítico. Estes valores são os mesmos nos 3 pontos em função da alta rigidez da viga na direção x.

FIGURA 7. Comparação numérica e analítica da FRF da receptância do ponto 1 na direção x (a) e na direção z (b).



(a)



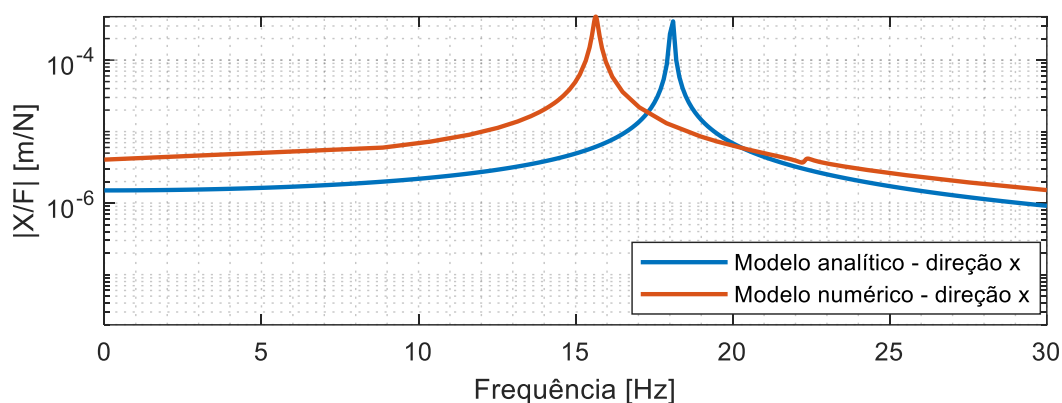
(b)

Fonte: Autores (2024).

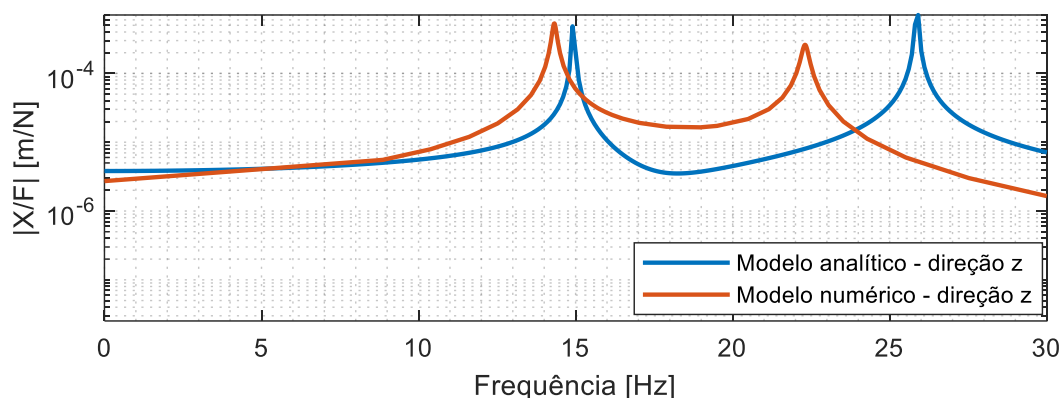
Na Figura 8, é apresentada a resposta no ponto 2 do módulo da receptância em função da frequência para uma força de 1 N aplicada no ponto 2 na direção x e z. Comparando o resultado para o terceiro modo de vibração das Figuras 7 e 8, observa-se que tanto o resultado do modelo numérico quanto o resultado do modelo analítico apresentam valores de amplitude maiores no ponto 2 do que

no ponto 1. Este fato é coerente com a representação física do modo de vibração apresentada nas Figuras 6(e) e 6(f).

FIGURA 8. Comparação numérica e analítica da FRF da receptância do ponto 2 na direção x (a) e na direção z (b).



(a)

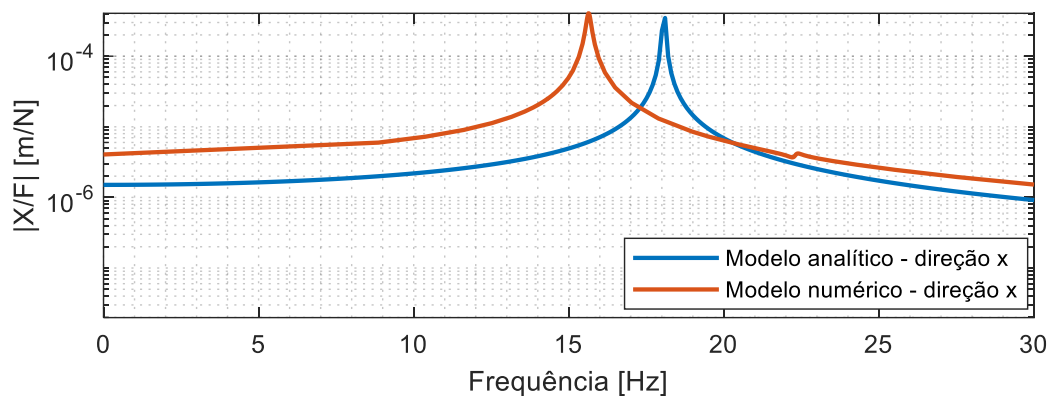


(b)

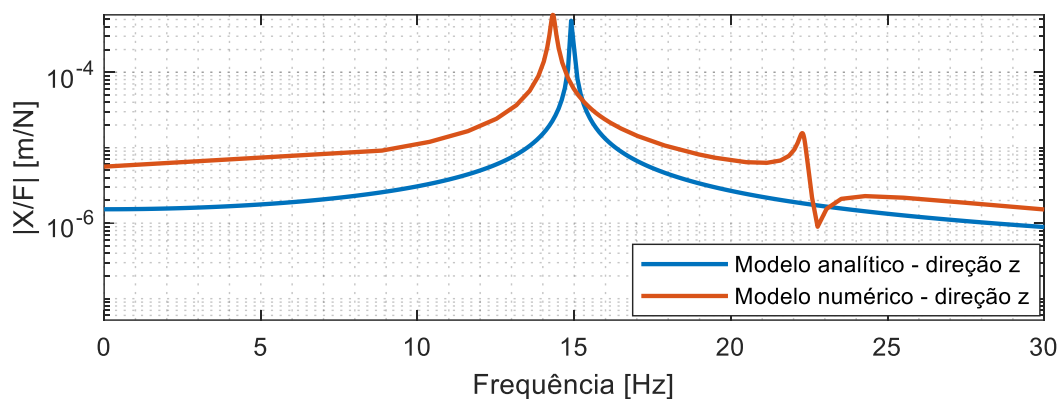
Fonte: Autores (2024).

Na Figura 9, é apresentada a resposta no centro de massa do módulo da receptância em função da frequência para uma força de 1 N aplicada no ponto 2 na direção x e z. Na Figura 9(b), observa-se que, para o modelo numérico, existe uma amplitude de deslocamento de 0,0151 mm na frequência de 22,31 Hz, enquanto que, para o modelo analítico, a amplitude é zero. Este fato ocorre devido ao fato de que o modelo analítico considera que a viga é simétrica. Assim, o deslocamento no centro de massa deve ser zero para este terceiro modo de vibração.

FIGURA 9. Comparação numérica e analítica da FRF da receptância do nó centro de massa na direção x (a) e na direção z (b).



(a)



(b)

Fonte: Autores (2024).

4. CONCLUSÕES

Este trabalho buscou desenvolver um modelo analítico de três graus de liberdade para encontrar as três primeiras frequências naturais e os modos de vibração de um pórtico metálico com perfil U enrijecido. As equações de movimento do sistema foram resolvidas de forma desacoplada pelo método da superposição modal, utilizando uma rotina desenvolvida no programa Matlab®. A simulação numérica do pórtico foi realizada utilizando o método de elementos finitos através do programa Ansys®.

As comparações das frequências naturais obtidas pelo método numérico e pelo método analítico apresentaram maiores erros para o segundo modo de vibração (15,47 %) e no terceiro modo de vibração (15,9 %). É possível que estes erros estejam atribuídos às simplificações realizadas no modelo analítico, com influência de prováveis diferenças do momento de inércia da viga e do

acoplamento entre a viga e as colunas. No entanto, os resultados dos modos de vibração e das FRF's de receptância demonstraram boa coerência. Isso é evidenciado pelo fato de que os três modos de vibração foram semelhantes em ambos os modelos. Além disso, as FRF's mostraram picos em evidência com comportamentos similares, apesar dos erros relativos nas frequências.

Mesmo havendo uma maior divergência na segunda e terceira frequência natural, o modelo analítico simplificado demonstrou eficácia na determinação da primeira frequência natural apresentando erro relativo de 1,83 % e, na representação dos modos de vibração e FRF's. Futuramente, pretende-se melhorar o modelo e realizar uma análise experimental do pórtico estudado.

DECLARAÇÃO DE RESPONSABILIDADE

Os autores são os únicos responsáveis por este trabalho.

AGRADECIMENTO

Este estudo foi financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código 001.

REFERÊNCIAS

DE BIAGI, V. Energy redistribution patterns in damaged elastic frames. International Journal of Mechanical Sciences, v. 194, 2021. Elsevier Ltd.

CARA, J. Computing the modal mass from the state space model in combined experimental-operational modal analysis. Journal of Sound and Vibration, v. 370, p. 94–110, 2016. Academic Press.

CLOUGH, R. W.; JOSEPH, P. Dynamics of structures. New York: Computers & Structures, Inc, 2003.

ÇUHA, F. A.; PEKER, H. A. Finding Solutions to Undamped and Damped Simple Harmonic Oscillations via Kashuri Fundo Transform. MANAS Journal of Engineering, v. 11, n. 1, p. 154–157, 2023. Kyrgyz-Turkish Manas University.

HE, J. H.; LEE, E. W. M. New analytical methods for cleaning up the solution of nonlinear equations. Computers and Mathematics with Applications, dez. 2009.

HEYMAN, JACQUES. Beams and framed structures. Pergamon Press, 1974.

KAPPOS, A. Dynamic Loading and Design of Structures. 1º ed. New York: Spon Press, 2002.

PAULTRE, P. Dynamics of Structures. New Jersey: John Wiley & Sons, 2011.

PAZ, M.; KIM, Y. H. Structural dynamics: theory and computation. Cham: Springer International Publishing, 2019.

RAO, S. S. Vibrações Mecânicas. São Paulo: Prentice Hall/Sp, 2008.

SORIANO, H. L. Introdução à dinâmica das estruturas. Elsevier, 2015.

WARD, J. D.; YU, C. C.; DOHERTY, M. F. Plantwide operation of processes with crystallization. AIChE Journal, v. 53, n. 11, p. 2885–2896, 2007.

XUE, C. Research on steel structure technology in civil engineering construction. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, v. 474, n. 7, 2020. Institute of Physics Publishing.