



MODELAGEM COMPUTACIONAL DE SISTEMAS DINÂMICOS COM O *POWERSIM*

Odair José Teixeira da Fonseca ¹

¹ Universidade Federal de Rondônia – email: odairfonseca@unir.br

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma proposta de ensino a partir do processo de modelagem computacional de sistemas dinâmicos com o uso do *Powersim*, um *software* disponível nas versões livre e comercial, no qual a modelagem é realizada por meio da construção de diagramas de fluxos de níveis. Este aplicativo tem como premissa descrever o nível de um tanque como a solução numérica de uma Equação Diferencial Ordinária. Nesse sentido, buscamos explorar uma situação envolvendo uma dinâmica de interação entre populações de brocas e de vespas, implementando as simulações do modelo obtido no *Powersim*. A construção de gráficos e tabelas favorecerá a análise e a interpretação do modelo explorado. Como resultados, são discutidos, a partir das simulações, os conceitos de taxa máxima de variação, de população máxima e mínima de cada espécie, intervalos de crescimento e decrescimento, bem como as soluções de equilíbrio.

Palavras-chave — Sistemas Dinâmicos, Modelagem Computacional, *Powersim*.

ABSTRACT

In this work, we present a teaching proposal based on the process of computational modeling of dynamic systems with the use of *Powersim*, software available in free and commercial versions, in which modeling is carried out through the construction of level flow diagrams. This application's premise is to describe the level of a tank as the numerical solution of an Ordinary Differential Equation. In this sense, we seek to

explore a situation involving interaction dynamics between populations of drills and wasps, implementing simulations of the model obtained in *Powersim*. The construction of graphs and tables will favor the analysis and interpretation of the explored model. As results, based on the simulations, the concepts of maximum rate of variation, maximum and minimum population of each species, growth and decrease intervals, as well as equilibrium solutions are discussed.

Keywords — Dynamic Systems, Computational Modeling, *Powersim*.

1. INTRODUÇÃO

A Modelagem Matemática teve sua origem na Matemática Aplicada, onde a principal preocupação é a utilização de modelos para resolver problemas e apresentar/interpretar as possíveis soluções, por outro lado, Educadores Matemáticos perceberam que a Modelagem Matemática poderia ser utilizada para ensinar conceitos matemáticos, com isso, passou a ser concebida, também, como metodologia para o Ensino de Matemática e, nesse contexto, tem como objetivo contribuir com o processo de ensino e aprendizagem, potencializando a construção do conhecimento.

O desenvolvimento de atividades com Modelagem Matemática, muitas vezes requer o uso de recursos computacionais, pois os computadores viabilizam a realização de simulações com muita agilidade. Nessa perspectiva, Meyer, Caldeira e Malheiros (2019) enfatizam que há uma certa sinergia entre o uso



PROFMAT
Movimento Profissional
em Matemática





V Simpósio de Ensino e Aprendizagem em Matemática

das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) e a Modelagem. Além disso, segundo os autores, as tecnologias digitais auxiliam no desenvolvimento da Modelagem Matemática.

Em um contexto mais amplo, ao longo dos tempos, pesquisadores da Educação Matemática vêm investigando como a integração das tecnologias digitais em sala de aula podem contribuir com o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Por exemplo, Borba e Villareal (2005) buscam evidenciar o potencial das mídias digitais quanto aos aspectos visuais, para isso, argumentam que “a tecnologia computacional enfatiza o componente visual da matemática, mudando o *status* da visualização na Educação Matemática” (p. 96). Além disso, os autores afirmam que a visualização tem valor pedagógico no ensino e na aprendizagem, constituindo assim, uma alternativa para a compreensão do conhecimento matemático. Nesse sentido, pode-se dizer que a utilização de computadores em aulas de matemática potencializa a exploração de múltiplas representações, contribuindo assim, com o processo de construção dos conhecimentos nessa área da ciência.

Nessa perspectiva, considerando que as tecnologias digitais se tornaram uma realidade na vida da maioria das pessoas, inclusive no ambiente escolar, as investigações buscam discutir como utilizar esses recursos como ferramentas de ensino para potencializar a aprendizagem dos estudantes, impactando de maneira a construção de conhecimento.

Dessa forma, neste trabalho, busca-se apresentar uma discussão utilizando a Modelagem Matemática como abordagem para o ensino de sistemas dinâmicos por meio da implementação computacional, com o *Powersim*, a partir do qual, serão realizadas simulações numéricas que fornecerão elementos para a interpretação do modelo explorado e, com isso, contribuir com a compreensão dos conceitos matemáticos inerentes à situação investigada.

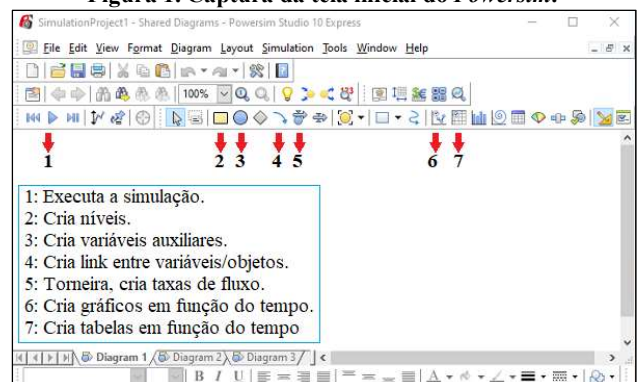
A escolha pelo *Powersim* se justifica em virtude de suas características, pois ele utiliza

diagramas para descrever uma equação diferencial por meio de níveis e taxas de fluxos e, portanto, o processo de desenvolvimento da modelagem computacional pode contribuir com o ensino de Equações Diferenciais, uma vez que, sua implementação evidencia como os parâmetros do modelo se relacionam.

As simulações foram realizadas por meio da versão *Free Powersim Studio 10 Express*, que pode ser acessada pelo *link* oficial de *downloads* <https://powersim.com/downloads/>. Este *software* realiza simulações numéricas utilizando os métodos de Euler ou de Runge-Kutta de segunda, terceira ou quarta ordem, conforme a necessidade do pesquisador. Neste trabalho, foi utilizado o método de Runge-Kutta de quarta ordem, que pode ser configurado no menu *Simulation*, submenus *Simulation Settings* e *Integration*.

Essencialmente, o *Powersim* é um *software* que realiza simulações de sistemas dinâmicos por meio de fluxos de níveis. Os níveis representam as equações do sistema, e as taxas de entrada e de saída são determinadas por meio de torneiras. Na Figura 1, apresentamos a captura de tela inicial destacando as principais ferramentas utilizadas para modelagem e realização das simulações.

Figura 1. Captura da tela inicial do *Powersim*.



Fonte: Própria (2024).

Na próxima seção, serão apresentados os procedimentos metodológicos para o desenvolvimento desta investigação.



V Simpósio de Ensino e Aprendizagem em Matemática

2. MATERIAIS E MÉTODOS

Neste trabalho adotamos a metodologia da Modelagem Matemática, na perspectiva de Bassanezi (2019) para construir um modelo presa-predador do tipo Lotka-Volterra para descrever a interação entre as populações de brocas e vespas. Seguindo os passos apresentados por Dullius (2009), realizamos a modelagem computacional por meio da construção de um diagrama no *Powersim*, a partir do qual, obtemos a solução do modelo realizando simulações computacionais, utilizando o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem. Nesse sentido, os materiais utilizados compreendem um *notebook* e a versão *Free* do *software Powersim*.

3. RESULTADOS

Nesta seção, vamos explorar o *software Powersim*, implementando a modelagem por meio da construção de um diagrama para representar/resolver um sistema dinâmico clássico presa-predador do tipo Lotka-Volterra envolvendo a interação entre populações de brocas e vespas. Além disso, também será realizada uma discussão teórica para interpretar os resultados obtidos por meio de simulações.

Para contextualizar, consideremos que em culturas de cultivo de cana-de-açúcar, é comum observar a ocorrência de pragas, dentre as quais, se destacam as brocas, que segundo Oliveira, Glaeser & Bellon (2012, p. 1) “durante a fase de lagarta abre galerias ascendentes e transversais no interior do colmo da planta; esse fato resulta em danos diretos, como a morte da gema apical e o enraizamento aéreo”. Uma forma eficaz e ecologicamente sustentável de se combater esse tipo de praga é por meio do controle biológico, método que consiste na distribuição de predadores naturais da broca, por exemplo, o controle pode ser feito inserindo uma população de vespas na região infestada por brocas.

Essencialmente, a vespa é um parasitoide, cujo ciclo de vida perpassa por estágios larvais, a pupa e o adulto. O parasitismo ocorre com a vespa depositando grande quantidade de ovos na

lagarta por meio de uma picada, esses ovos eclodem dando origem às larvas que se alimentam do interior da lagarta, provocando, portanto, a sua morte (Nava, Pinto, & Silva, 2009).

Diante do exposto na breve contextualização, considere uma situação hipotética em que uma região limitada de um cultivo de cana-de-açúcar esteja infestada por uma população de brocas e que o proprietário decida realizar o controle biológico por meio da distribuição de uma população de vespas.

Como hipóteses para formulação do modelo, Bassanezi (2019) considera que: i) a fonte de alimentação das brocas seja a cana-de-açúcar e, portanto, existem recursos suficientes para manutenção da população; ii) as vespas se alimentam exclusivamente das brocas, ou seja, a ausência das brocas implica a extinção das vespas; iii) o único predador natural da broca é a vespa.

Sejam $B(t)$ e $V(t)$ as populações de brocas e vespas em cada instante de tempo t , respectivamente, segundo Bassanezi (2019), a interação entre essas duas espécies pode ser descrita pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = aB - bBV \\ \frac{dV}{dt} = \beta BV - \alpha V \end{cases} \quad (1)$$

em que a, b, α e β são constantes positivas que são chamadas, respectivamente, de ‘coeficiente de crescimento interespecífico da broca’, ‘coeficiente de ataque’, ‘coeficiente de mortalidade das vespas (na ausência de alimento)’ e ‘taxa de crescimento das vespas’ (Bassanezi, 2019). Segundo o autor, essas constantes assumem os respectivos valores: $a = 0,02774893$; $b = 0,00001479$; $\alpha = 1,198293$ e $\beta = 0,0006894$. Com isso, o Modelo (2). pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = 0,02774893B - 0,00001479BV \\ \frac{dV}{dt} = 0,0006894BV - 1,198293V \end{cases} \quad (2)$$



V Simpósio de Ensino e Aprendizagem em Matemática

Agora, vamos proceder com a modelagem computacional por meio da construção de um diagrama no *Powersim* para obter a solução do Modelo (2). Para isso, seguiremos os passos apresentados por Dullius (2009). Inicialmente, observe que cada equação do sistema será representada por um nível, no diagrama. Os termos positivos do lado direito de cada igualdade sugerem que cada nível deve ter uma torneira de entrada. Da mesma forma, os termos negativos indicam que cada nível deve ter uma torneira de saída.

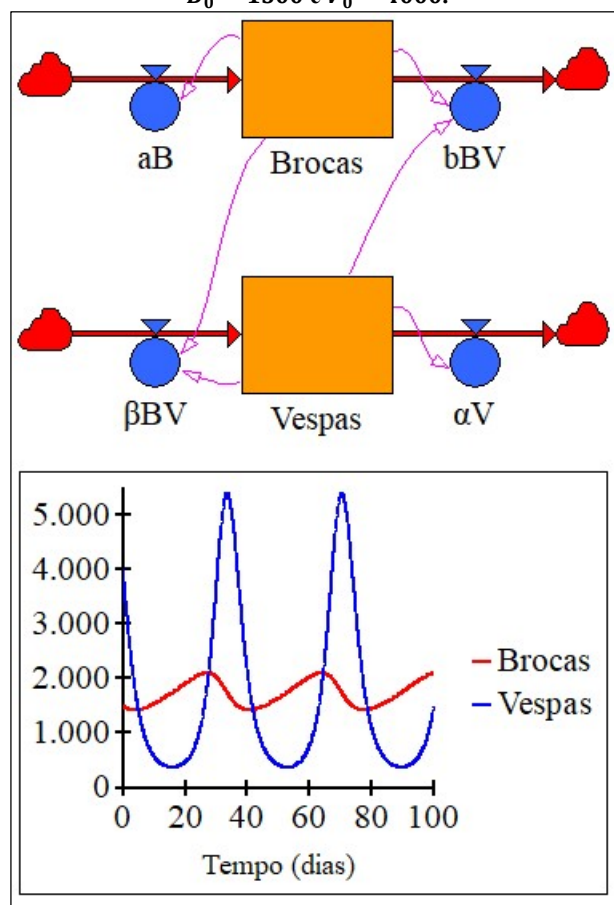
Assim, primeiro construímos os níveis. Para isso, acionamos o retângulo laranja (nº 2 na Figura 1) e clicamos na área de trabalho, para definir cada um dos níveis que devem ser nomeados automaticamente por *Level_1* e *Level_2*. Para renomeá-los, basta clicar no respectivo rótulo e digitar o novo nome, neste caso, por conveniência didática, renomeamos para Brocas e Vespas. Os valores numéricos das condições iniciais devem ser inseridos nos respectivos níveis (retângulos laranjas).

As torneiras de entrada e saída são construídas com a ferramenta de taxa de fluxo (nº 5 na Figura 1). As conexões das torneiras com os níveis/tanques são definidas com o recurso de criar *link* (nº 4 na Figura 1). Para definir os valores das respectivas torneiras, efetuamos um duplo clique sobre o círculo (neste caso, colorido de azul) e, na caixa de diálogo, inserimos os respectivos valores. Por exemplo, a torneira de entrada do nível das brocas foi definida digitando $0,02774893 * \text{Brocas}$, no campo *Definition* da janela de diálogo. Ressaltamos que, neste caso, a variável 'Brocas' deverá estar relacionada com a respectiva torneira por meio da ferramenta de criação de *link* (seta rosa na Figura 2). De maneira análoga, definimos as relações das demais torneiras.

A janela gráfica é construída por meio do recurso *Creating a Time Graph* (nº 6 na Figura 1). Após a construção da janela gráfica na área de trabalho do *Powersim*, clicamos com o botão direito e acessamos a opção *Properties*, uma caixa de diálogos será aberta, na opção

Parameters, acessamos a aba *Component 1* e selecionamos as variáveis que desejamos plotar o gráfico, efetuamos um duplo clique e, em seguida, clicamos em *Apply* e *Ok* (ou duplo enter). Para rodar a simulação, acione o botão *Toggle Play* (nº 1 na Figura 1). Lembrando que, por padrão, o *Powersim* realiza as simulações utilizando o Método de Euler com *timestep*=1. Para alterar o *timestep* e o método de simulação, acessamos *Simulation* e *Simulation Settings*. Na Figura 2, apresentamos uma configuração de diagrama contendo os gráficos das populações de brocas e de vespas.

Figura 2. Diagrama do *Powersim* para solução do Modelo (2). Os gráficos foram obtidos por meio de simulações numéricas com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com *timestep*=0,0625, no intervalo [0,100] e condições iniciais $B_0 = 1500$ e $V_0 = 4000$.



Fonte: Própria (2024).

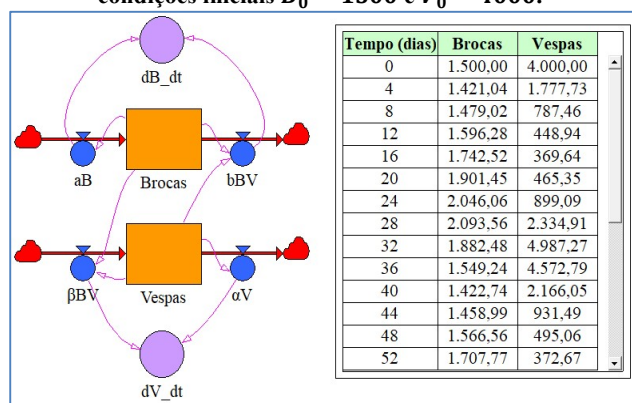
Na Figura 2, observe que os gráficos não permitem inferir os valores máximos e mínimos

V Simpósio de Ensino e Aprendizagem em Matemática

das respectivas populações. Essa análise pode ser explorada por meio da tabela de evolução temporal. Na .

Figura 3, apresentamos uma configuração do diagrama com uma tabela contendo os valores numéricos da solução do modelo.

Figura 3. Diagrama do Powersim para solução do Modelo (2). Os valores numéricos da tabela foram obtidos por meio de simulações numéricas com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com $timestep=0,0625$, no intervalo $[0,100]$ e condições iniciais $B_0 = 1500$ e $V_0 = 4000$.



Fonte: Própria (2024).

A partir da análise dos valores numéricos exibidos na tabela é possível observar que os valores mínimos aproximados das populações de brocas e vespas são, respectivamente, 1421 e 369. Explorando os demais resultados da simulação por meio da barra de rolagem lateral da tabela também se constata que os valores máximos são 2099 e 5401, respectivamente.

Além disso, também podemos analisar o comportamento das taxas de variação das respectivas populações. Para isso, utilizamos o recurso do Powersim para criar variável auxiliar (nº 3 na Figura 1). Observe que as taxas dB_dt e dV_dt , são definidas, respectivamente, pelas diferenças $aB - bBV$ e $\beta BV - \alpha V$. Na .

Figura 3, é possível observar o diagrama após a inserção das variáveis auxiliares.

A análise das taxas de variação pode ser melhor explorada com o recurso da tabela temporal, a partir da qual é possível investigar os intervalos em que a taxa de variação em função do tempo é negativa ou positiva, e os pontos onde atingem os valores máximos (pontos de inflexão

das respectivas curvas populacionais). Na Figura 4, apresentamos um recorte da tabela construída com o Powersim, na qual são exibidos os valores numéricos das populações de brocas e vespas e suas respectivas taxas de variação em função do tempo.

Figura 4. Recorte da tabela de evolução temporal do Powersim. Os valores numéricos foram obtidos por meio de simulações numéricas com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com $timestep=0,0625$, no intervalo $[0,100]$ e condições iniciais $B_0 = 1500$ e $V_0 = 4000$.

Tempo (dias)	dB_dt	Vespas	dV_dt	Brocas
0	-47,12	4.000,00	-656,77	1.500,00
1	-31,75	3.345,68	-639,99	1.460,70
2	-18,29	2.737,51	-570,53	1.435,86
3	-7,06	2.211,53	-479,95	1.423,37
4	2,07	1.777,73	-388,66	1.421,04
5	9,40	1.430,91	-307,05	1.426,91
6	15,26	1.159,14	-238,79	1.439,35
7	19,98	948,86	-183,89	1.457,06
8	23,82	787,46	-140,68	1.479,02
9	26,97	664,31	-107,03	1.504,46
10	29,59	570,91	-80,84	1.532,78
11	31,81	500,75	-60,30	1.563,51
12	33,70	448,94	-43,91	1.596,28
13	35,32	411,94	-30,49	1.630,81
14	36,71	387,30	-19,05	1.666,84
15	37,88	373,46	-8,76	1.704,15
16	38,83	369,64	1,11	1.742,52
17	39,54	375,78	11,28	1.781,72
18	39,97	392,57	22,55	1.821,50
19	40,05	421,56	35,85	1.861,54
20	39,68	465,35	52,38	1.901,45

Fonte: Própria (2024).

A partir dos valores numéricos exibidos na tabela podemos explorar como as taxas de variação dB_dt e dV_dt se relacionam com as respectivas populações. Por exemplo, a variação das brocas é negativa até o quarto dia, aproximadamente, instante em que as brocas atingem a população mínima. Também é possível notar que a taxa de variação das brocas atinge o valor máximo (ponto de inflexão das brocas) após 19 dias, por outro lado, a população de vespas atinge o valor mínimo três dias antes.

Analogamente, a taxa de variação das vespas muda de negativa para positiva aproximadamente no dia 16, instante em que as vespas atingem a população mínima. A variação máxima das vespas ocorre no instante $t = 30$, três dias após a população de brocas atingirem o valor máximo. Dessa forma, a tabela ajuda a compreender os intervalos em que os ciclos mudam durante o passar do tempo.



V Simpósio de Ensino e Aprendizagem em Matemática

4. DISCUSSÃO

Conforme os resultados apresentados, temos que a interação entre as populações de brocas e de vespas ocorrerá em ciclos de coexistência. Isto significa dizer que a população de vespas não será suficiente para eliminar completamente as brocas do canavial. Na Tabela 1, apresentamos os intervalos de crescimentos e decrescimentos para cada população, considerando o intervalo de simulação $[0,100]$. Esses intervalos foram obtidos a partir da exploração dos valores numéricos exibidos na tabela de evolução temporal do *Powersim*, conforme ilustrado na Figura 4. Naturalmente, os intervalos apresentados são aproximados, visto que o *Powersim* exibe, na tabela temporal, valores inteiros da variável independente tempo.

Tabela 1. Intervalos de crescimento e decrescimento das populações de brocas e de vespas. Os resultados foram obtidos por meio de simulações numéricas com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com $timestep=0,0625$, no intervalo $[0,100]$ e condições iniciais $B_0 = 1500$ e $V_0 = 4000$.

População de brocas		População de vespas	
Intervalos	Cresc./Decresc.	Intervalos	Cresc./Decresc.
$0 \leq t < 4$	Decrescente	$0 \leq t < 16$	Decrescente
$4 \leq t < 28$	Crescente	$16 \leq t < 34$	Crescente
$28 \leq t < 41$	Decrescente	$34 \leq t < 53$	Decrescente
$41 \leq t < 65$	Crescente	$53 \leq t < 71$	Crescente
$65 \leq t < 79$	Decrescente	$71 \leq t < 90$	Decrescente
$79 \leq t \leq 100$	Crescente	$90 \leq t \leq 100$	Crescente

Fonte: Própria (2024).

Observe que o recurso da tabela de evolução temporal pode fornecer elementos que auxiliam a compreensão da situação explorada, pois combinando as informações da Tabela 1 com as informações dos gráficos, pode-se observar, mais facilmente, os períodos em que os respectivos ciclos ocorrem.

Considerando a coexistência das populações, então deve existir um ponto no qual brocas e vespas entram em equilíbrio, também conhecido como soluções constantes, digamos que esse ponto seja do tipo $P(\bar{B}^*, \bar{V}^*)$, cujos valores podem ser obtidos investigando, na tabela temporal, quando as taxas de variações mudam de sinal. Essencialmente, o equilíbrio das vespas e das brocas são observados quando $\frac{dB}{dt} = 0$ e

$\frac{dV}{dt} = 0$, respectivamente. Dessa forma, podemos obter as aproximações para as respectivas populações de equilíbrio por meio da exploração dos valores numéricos exibidos na tabela do *Powersim*. Por exemplo, conforme ilustrado na Figura 5, observamos na tabela que no instante $t = 64$, $dB_{dt} = 0,31$ (valor mais próximo de zero para a taxa de variação das brocas), temos também que $V(64) = 1866$, o que implica $\bar{V}^* = 1866$ como uma aproximação para o equilíbrio da população de vespas.

Figura 5. Recorte da tabela de evolução temporal do *Powersim*. Os valores numéricos foram obtidos por meio de simulações numéricas com o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com $timestep=0,0625$, no intervalo $[0,100]$ e condições iniciais $B_0 = 1500$ e $V_0 = 4000$.

Tempo (dias)	dB_dt	Vespas	dV_dt	Brocas
59	36,68	624,96	105,09	1.982,09
60	33,64	748,58	144,09	2.017,37
61	29,05	917,62	196,55	2.048,86
62	22,36	1.147,44	266,27	2.074,77
63	12,98	1.456,89	356,07	2.092,69
64	0,31	1.866,06	465,00	2.099,63
65	-15,90	2.390,17	583,24	2.092,12
66	-35,19	3.027,55	685,88	2.066,78
67	-55,80	3.742,69	730,49	2.021,28
68	-74,53	4.452,61	668,05	1.955,80
69	-87,52	5.033,58	471,88	1.874,15
70	-91,90	5.359,87	168,11	1.783,66

Fonte: Própria (2024).

Por outro lado, no instante $t = 16$, $dV_{dt} = 1,11$ (valor mais próximo de zero para a taxa de variação das vespas), temos também que $B(16) = 1742$, de onde segue que $\bar{B}^* = 1742$ é uma aproximação para a população de equilíbrio das brocas. Isso significa que 1742 brocas são suficientes para manter uma população de 1866 vespas. Naturalmente, essa análise pode ser explorada no sentido do uso didático do *Powersim*, pois ele fornece valores aproximados para os conceitos investigados.

Por fim, observe que os valores encontrados são razoavelmente próximos aos valores de equilíbrio exatos, $B^* = 1738$ e $V^* = 1876$ (Bassanezi, 2019). Podemos estimar o erro relativo de aproximação dividindo o módulo da diferença entre os valores exato e aproximado pelo valor aproximado (Ruggiero, & Lopes, 1996). Essencialmente, os erros relativos para as



V Simpósio de Ensino e Aprendizagem em Matemática

aproximações dos pontos de equilíbrio são,
 $ER_{B^*} = \frac{|1738-1742|}{1742} \approx 0,002$ e $ER_{V^*} = \frac{|1876-1866|}{1866} \approx 0,005$, respectivamente.

A partir das simulações computacionais com o *Powersim*, é possível explorar vários aspectos conceituais. Por exemplo, o *software* viabiliza a interpretação por meio dos gráficos, ou seja, a visualização, que Borba e Villareal (2005) afirmaram ser uma característica das mídias digitais com valor pedagógico. Além disso, o recurso computacional confere agilidade na realização de simulações, permitindo explorar vários cenários da situação modelada, potencializando a investigação e a experimentação. Dessa forma, observa-se que o uso de recursos computacionais auxilia no desenvolvimento de Modelagem Matemática conforme argumentado por Meyer, Caldeira & Malheiros (2019).

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos uma abordagem de ensino de sistemas dinâmicos utilizando a modelagem computacional para explorar a interação entre populações de brocas e vespas por meio de um modelo matemático presa-predador do tipo Lotka-Volterra. As simulações foram implementadas no *Powersim* utilizando o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem.

A partir dos resultados obtidos com as simulações, foram explorados os valores das quantidades máxima e mínima de brocas e vespas, os intervalos em que as respectivas populações apresentaram comportamento crescente e decrescente, pontos de inflexão, bem como as soluções de equilíbrios.

Podemos observar que o *Powersim* tem o potencial de apresentar contribuições significativas para a compreensão conceitual dos elementos inerentes à situação explorada. Dessa forma, o *software* pode contribuir de maneira satisfatória com o ensino de conceitos relacionados à teoria de sistemas dinâmicos.

Por fim, o processo de construção de diagramas se constitui como uma importante

ferramenta para o ensino e aprendizagem de conceitos que envolvam taxas de variação, uma vez que, a sua implementação exige a compreensão do modelo matemático construído por meio de uma equação Diferencial, cuja solução será representada, no diagrama, por um nível que estará vinculado às respectivas taxas de fluxos, conforme as características da equação utilizada para descrever a situação explorada.

REFERÊNCIAS

- Bassanezi, R. C. (2019). *Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática*. (ed. 4, 2ª reimp.) Editora Contexto.
- Borba, M. C., & Villareal, M. E. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. (Mathematics education library; v. 39). Springer.
- Dullius, M. M. (2009). *Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico*. 2009. 514f. Tese. (Doutorado em Enseñanza de las Ciencias). Universidad de Burgos. Burgos, Espanha.
- Meyer, J. F. C. A., Caldeira, A. D., & Malheiros, A. P. S. (2019). *Modelagem em Educação Matemática*. 4 ed. Belo Horizonte, Autêntica Editora.
- Nava, D. E., Pinto, A. S., & Silva, S. S. (2009). *Controle biológico da broca da cana-de-açúcar*. Embrapa Clima Temperado. Pelotas, RS. (Documentos 287). Disponível em: <https://ainfo.cnptia.embrapa.br/digital/bitstream/item/79313/1/documento-287.pdf>
- Oliveira, H. N., Glaeser, D. F., & Bellon, P. P. (2012). *Recomendações para obter um controle biológico mais eficaz da broca-de-cana-de-açúcar*. Embrapa Agropecuária Oeste. Dourados, MS. (Comunicado técnico 181).



Ruggiero, M. A. G., & Lopes, V. L. R. (1996).
Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais. (ed. 2), Makron Books.



PROFMAT
Mestrado Profissional
em Matemática

