

ANÁLISE DO FENÔMENO DE PROPAGAÇÃO DE TRINCA POR FADIGA ISOTÉRMICA DO MODELO DE AHMAD VIA METODOLOGIA FAST CRACK BOUNDS

Matheus Marquetti⁽¹⁾ matheusmedianeira@gmail.com, Bruno José Banhara⁽²⁾
banharab@gmail.com, Bruno dos Santos⁽³⁾ bsantos@fag.edu.br, Fernando Andrey Bessegatto⁽⁴⁾
bssgtt17@gmail.com, Bernardo Alvarez Mores Rodrigues⁽⁵⁾ bamr2004255@gmail.com

Centro Universitário FAG

RESUMO: *O processo de colapso por fadiga está presente em todo material no qual existem variações térmicas, representando a maior causa de falhas estruturais da indústria metal-mecânica. A falha é caracterizada por uma ruptura frágil, ocasionando acidentes fatais, prejuízos financeiros e significativos para a sociedade e o meio ambiente. A vida útil de um componente submetido a fadiga é determinada pelo processo de nucleação da trinca, sua propagação e posterior ruptura. Para avaliar a vida em fadiga utilizam-se modelos matemáticos que dependem de um elevado custo. Este trabalho tem por objetivo estabelecer cotas para o modelo de propagação de trincas via metodologia “Fast Crack Bounds” (FCB) aplicado ao modelo de Ahmad. Solução esta que se pretende comparar com o método utilizado atualmente, que é o Runge Kutta de quarta ordem (RK4). O resultado desse comparativo, é esperado uma redução do custo computacional para o método FCB, proporcionando uma eficiência superior ao RK4, contendo uma assertividade do resultado da propagação de trincas muito próxima nos dois modelos.*

PALAVRAS-CHAVE: FADIGA TÉRMICA, MECÂNICA DA FRATURA LINEAR ELÁSTICA, FAST CRACK BOUNDS, MODELO DE AHMAD, RUNGE KUTTA DE QUARTA ORDEM.

ANALYSIS OF THE PHENOMENON OF ISOTHERMAL FATIGUE CRACK PROPAGATION IN THE AHMAD MODEL VIA THE FAST CRACK BOUNDS METHODOLOGY

ABSTRACT: *The fatigue collapse process is present in all materials with thermal variations, representing the main cause of structural failures in the metal-mechanical industry. The failure is characterized by brittle fracture, causing fatal accidents, financial losses, and significant impacts on society and the environment. The service life of a component subjected to fatigue is determined by the crack nucleation process, its propagation, and subsequent rupture. Mathematical models, which are costly, are used to evaluate fatigue life. This work aims to establish thresholds for the crack propagation model using the “Fast Crack Bounds” (FCB) methodology applied to the Ahmad model. This solution is intended to be compared with the currently used method, the fourth-order Runge Kutta (RK4). The result of this comparison is expected to show a reduction in computational cost for the FCB method, providing superior efficiency to RK4, with a very close accuracy in crack propagation results for both models.*

KEYWORDS: THERMAL FATIGUE, LINEAR ELASTIC FRACTURE MECHANICS, FAST CRACK BOUNDS, AHMAD MODEL, FOURTH-ORDER RUNGE KUTTA.

1 INTRODUÇÃO

As estruturas presentes na engenharia mecânica são submetidas a cargas que variam ao longo do tempo, e essas oscilações cíclicas de carga podem desencadear o fenômeno da fadiga, como destacado por (Da Rosa, 2002). De acordo com (Callister, 2002), a fadiga representa cerca de 50% a 90% dos colapsos mecânicos, tornando-se um desafio significativo para a previsibilidade de eventos associados à falha mecânica de componentes.

Segundo a (ASTM, 2000), a fadiga é definida como um processo de degradação progressiva, localizada e permanente que ocorre em materiais sujeitos a tensões e deformações cíclicas, resultando na nucleação de trincas e em seguida, na fratura completa do material. A fadiga pode ser classificada em fadiga mecânica, de contato e térmica.

As falhas decorrentes da fadiga térmica podem ser observadas em diversas aplicações, como usinas termoelétricas, cilindros de laminação, motores diesel e turbinas de aeronaves, conforme mencionado por (Junior, 2006). Em resposta a esse problema, modelos matemáticos foram criados para analisar a vida útil de um material submetido a esforços cíclicos, com o objetivo de reduzir os custos financeiros e sociais associados a tais falhas.

Os modelos de propagação de trinca geralmente são desenvolvidos a partir de um problema de valor inicial (PVI), obtidos empiricamente por meio de análise de um determinado material, considerando sua composição química, resistência mecânica e geometria da trinca, como destacado por (Virkunnen, 2001). Nesse contexto, é necessário utilizar métodos numéricos para obter uma solução numérica aproximada, sendo que o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) é o mais utilizado atualmente, embora exija um grande esforço computacional, conforme mencionado por (Santos, 2019).

Para contornar esse problema, (Ávila et al. 2016) propõem a metodologia Fast Crack Bounds (FCB), a qual introduz funções de cota superior e inferior para a função de crescimento de trinca, envelopando o comportamento das soluções dos modelos de propagação de trinca, conforme mencionado por (Santos, 2019). Assim, essa metodologia permite uma análise mais precisa da vida útil de um componente sujeito à fadiga térmica, otimizando os recursos computacionais envolvidos.

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver a metodologia FCB para o modelo de Ahmad. Para isso, serão desenvolvidas funções de cota, que serão obtidas a partir da expansão em série de Taylor, retendo os termos de segunda ordem com o resto de Lagrange. Após a obtenção das funções de cota, será realizado um comparativo entre o tempo computacional do método FCB e o método tradicional RK4.

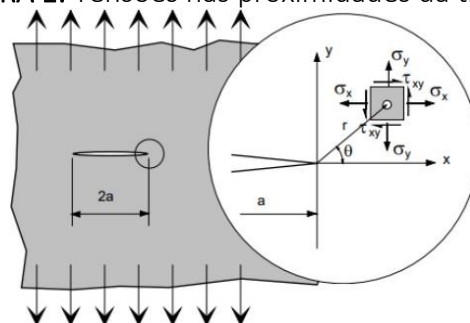
2 MATERIAIS E MÉTODOS

Nos itens subsequentes serão apresentados os conceitos necessários para o entendimento do estudo e as metodologias utilizadas.

2.1 Mecânica da fratura linear elástica

A mecânica da fratura (MF) é uma área de estudo que considera que os elementos mecânicos possuem trincas, mesmo quando não estão submetidos a solicitações, para determinar se essas trincas levarão o componente analisado ao colapso dentro das tensões de trabalho. A MF é dividida em duas categorias principais, a Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP) e a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), ambas fundamentais para a previsão do comportamento estrutural (Santos, 2019). A MFLE se baseia em procedimentos analíticos que relacionam a magnitude e a distribuição de tensões próximas à ponta da trinca com a tensão nominal aplicada ao componente, bem como as dimensões e geometria da trinca. Portanto, a MFLE é fundamentada na teoria da elasticidade (Anderson, 2005) e se desenvolve a partir das hipóteses de que existe uma trinca no material, que este é elástico linear, isotrópico e homogêneo, que as deformações são pequenas, que se trata de um estado plano e que há modos de carregamento. Tendo em vista essas hipóteses, as tensões de trabalho nas proximidades da trinca são definidas, conforme Figura 1, sendo as tensões normais representadas por " σ " responsáveis pela propagação da trinca e as tensões cisalhantes representadas por " τ ".

FIGURA 1: Tensões nas proximidades da trinca.



Fonte: Adaptado de Schivje (2009).

2.2 Fadiga

A degradação ou a falha de um determinado material, causada por cargas cíclicas, define o processo de fadiga (Virkkunen, 2001). Este processo de crescimento de trincas não

ocorre de maneira catastrófica em seu início, seu crescimento é cíclico e depende de fatores como o tamanho inicial de trinca pré-existente, o carregamento ou esforço aplicado ao material e a resistência à fratura final do material, definindo a partir destes dados a vida em fadiga do material (Strohaecker, 2007).

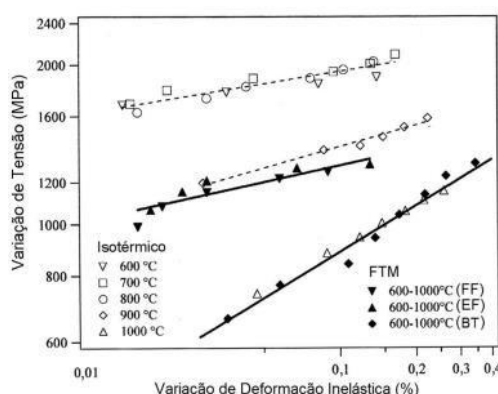
Segundo (Virkkunen, 2001), a fadiga possui três estágios de propagação, iniciação da trinca, crescimento da trinca e fratura final. O período de iniciação da trinca é onde se localiza o princípio da formação da trinca, pequena e sem risco de ruptura. Após determinado número de ciclos, as variações de tensões aplicadas a esse material começa a propagar nucleações de trincas, fazendo com que estas trincas se expandam e até que após um determinado número de ciclos, a trinca no material atinja o último estágio, a zona de ruptura catastrófica, onde ocorre o rompimento do material de forma frágil.

2.3 Fadiga térmica

A fadiga térmica é uma forma de degradação progressiva que ocorre em componentes mecânicos submetidos a ciclos térmicos de aquecimento e resfriamento (Spera, 1976). Essa forma de fadiga é de baixo ciclo, pois ocorre na ordem de grandeza de ciclos inferior a 10^8 . A fadiga de baixo ciclo pode ser classificada em dois tipos: fadiga térmica e fadiga isotérmica. A fadiga térmica ocorre com variações de temperatura ao longo do tempo, enquanto a fadiga isotérmica ocorre em temperatura constante durante todo o ciclo.

Ao observar o gráfico isotérmico conforme Figura 2, nota-se que a amplitude da temperatura é constante, em contraste com o gráfico da fadiga termomecânica (FTM), que apresenta uma amplitude variável, atingindo uma faixa de temperatura que varia entre 600°C e 1000°C. Na fadiga isotérmica, a força motriz do processo de propagação de trincas é a contração e expansão térmica gerada pelos ciclos térmicos aos quais o componente é submetido (Baumgaertner, 2022).

FIGURA 2: Efeitos resultantes para cargas cíclicas isotérmicas e termomecânicas.



Fonte: Adaptado de Engler Pinto Junior e Spinelli (2014).

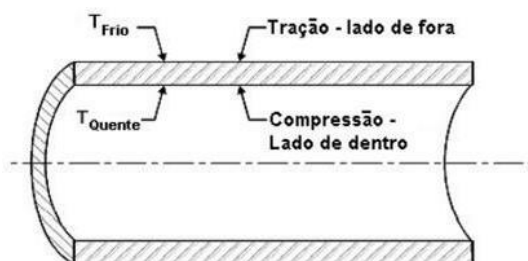
2.4 Contração e expansão térmica

A propagação de trincas em materiais mecânicos é um processo complexo que envolve a interação de vários fatores, incluindo a variação de temperatura e as tensões internas geradas pela dilatação ou contração térmica. Como mostrado na Figura 3, essas tensões térmicas podem resultar em restrições locais no material, que podem levar à propagação de trincas. Esse processo é descrito em três etapas distintas: nucleação, propagação e fratura, conforme ilustrado na Figura 4.

Na nucleação, pequenas trincas começam a se formar na superfície do material devido ao surgimento de tensões locais. Na propagação, essas trincas começam a se propagar gradualmente no material à medida que são expostas a ciclos térmicos repetidos. Finalmente, na fratura, a trinca se torna grande o suficiente para causar o colapso do material, resultando em falha mecânica.

O processo de propagação de trincas pode ser acelerado por impurezas no material e ciclos de tensão mecânica com ciclos de temperatura. Por isso, é crucial entender a mecânica da fratura para reduzir o risco de falhas em componentes sob variações de temperatura e condições adversas (Junior, 2006).

FIGURA 3: Restrição local devido a propriedades do material e à fadiga térmica.



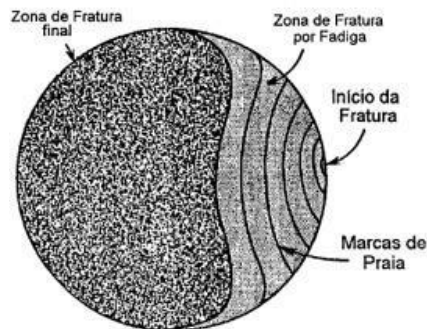
Fonte: Adaptado de Alvarenga (2006).

2.5 Etapas da fadiga

A nucleação da trinca se dá inicialmente na superfície do material, ela se propaga em torno de 45º do eixo de tensões, o crescimento da trinca ainda de forma microscópica é gerada a cada ciclo e mensurada na escala de micrometros, no qual ficam mantidas na estrutura cristalográfica do material (Riva, 2004).

Em seguida inicia-se a propagação da trinca, alterando da escala microscópica para a escala macroscópica, onde a estrutura cristalográfica perde o efeito sobre a propagação da trinca e esta é substituída pelas tensões aplicadas (Rosa, 2002).

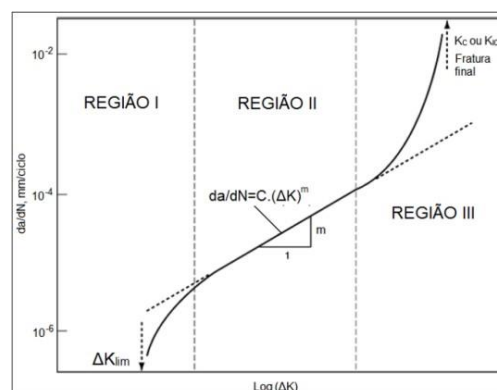
FIGURA 4: Representação esquemática das etapas da fadiga



Fonte: Adaptado de Reed-Hill (1982).

Quando o processo de propagação de trinca chega a região 3, ocorre a ruptura do material, denominada ruptura frágil ou catastrófica, essa ruptura ocorre mesmo se aplicada no material tensões abaixo da tensão de escoamento, pode ser verificado as 3 regiões descritas acima demonstradas pelo gráfico da figura 5.

FIGURA 5: Diagrama $\log da/dN$ pelo $\log (\Delta K)$



Fonte: Adaptado de Menegazzo (2021).

A Equação 1 demonstrada abaixo é o modelo que representa o crescimento da trinca por número de ciclos “ da/dN ”, em função do elemento forçante “ ΔK ” (Santos, 2019).

$$\Delta K = \sqrt{\pi a f(a)} \Delta \sigma \quad [1]$$

Onde, “ $f(a)$ ” é a função “tamanho da trinca”, “ $\Delta \sigma$ ” é a tensão aplicada sobre o material e “ a ” a dimensão inicial da trinca.

Para que possa determinar a vida em fadiga, há modelos matemáticos desenvolvidos para as três fases.

2.6 Modelos matemáticos para propagação de trinca

A seguir serão apresentados os modelos matemáticos utilizados necessários para o entendimento do estudo

2.6.1 Método numérico runge-kutta de quarta ordem

O método RK é baseado na aproximação da função por um polinômio de Taylor, no qual as derivadas são eliminadas e a função é avaliada em cada etapa. (Valle, 2012). O método RK procura obter uma estimativa mais precisa da derivada, levando em consideração uma maior quantidade de pontos ao longo do intervalo "[x_n, x_{n+1}]". (Sterza e Brandi, 2016), sendo assim descrito pela Equação 2:

$$y_{n+1} = y_n + h \quad [2]$$

A constante de inclinação " y_{n+1} " é calculada por meio da determinação da inclinação em vários pontos dentro do subintervalo. A ordem do método refere-se ao número de pontos utilizados no subintervalo para calcular o valor da inclinação. Ao aplicar a Equação (1) com " $n = 4$ ", e considerando " $x = x_{n+1} = x_n + h$ " e " $a = x_n$ ", temos a Equação 3:

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n+h}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_n) + \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(\xi) \quad [3]$$

O processo para determinar as constantes adequadas com $\xi \in (t_n, t_{n+1})$ para a quarta ordem do método Runge Kutta, visa encontrar as constantes que satisfaçam a Equação 4:

$$y_{n+1} = y_n h (c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + c_4 k_4) \quad [4]$$

Em que as constantes k_1, k_2, k_3 e k_4 são dadas pela Equação 5:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n) \\ k_2 &= f(t_n + a_1 h, x_n + \beta_1, h k_1) \\ k_3 &= f(t_n + a_2 h, x_n + \beta_2, k_1 + \beta_3 h k_2) \\ k_4 &= f(t_n + a_3 h, x_n + \beta_4, k_1 + \beta_4 k_2 + \beta_5 h k_3) \end{aligned} \quad [5]$$

Resolvendo o sistema, a equação do modelo RK4 é dada pela Equação 6:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6} f(k_1) + 2f(k_2) + 2f(k_3) + f(k_4); \\ k_1 &= y_n \\ k_2 &= y_n + \left(\frac{h}{2}\right) f(k_1) \\ k_4 &= y_n + (h) f(k_3) \end{aligned} \quad [6]$$

Na presente abordagem, o símbolo "K1" denota o coeficiente angular na extremidade esquerda do intervalo, "K2" corresponde ao coeficiente angular no ponto médio do intervalo, "K3" representa a segunda aproximação do coeficiente angular no ponto médio e "K4" é o coeficiente angular em $(y_n + h)$. Contudo, essa técnica requer considerável poder de processamento computacional. Para mitigar esse problema, utiliza-se a estratégia denominada Fast Crack Bounds (FCB).

2.7 Metodologia "fast crack bounds"

Conforme (Ávila et al. 2015), a meta da metodologia FCB consiste em estabelecer os limites inferior " a_{CI} " e superior " a_{CS} " para a função de propagação de trinca. Tais funções devem se aproximar com precisão da solução numérica aproximada obtida pelo método numérico de RK4 e devem estar em conformidade com a seguinte desigualdade conforme (Machado Jr, 2015), demonstra na Equação 7:

$$(a_{ci}(N)) \leq a(N) \leq (a_{cs}(N)), \forall N \in [N_0, N_1]; \quad [7]$$

As funções cota são adquiridas por meio da série de Taylor da função tamanho de trinca, onde são mantidos os termos de segunda ordem com resto de Lagrange, como descrito por (Machado Jr, 2015) na Equação 8.

$$a(N) = a_0(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2a}{dN^2}(\eta)(N - N_0)^2, \quad [8]$$

com $\eta \in [N_0, N_1];$

Em relação à propagação de trincas, " $a(N)$ " representa o tamanho da trinca após um determinado número " N " de ciclos, enquanto " a_0 " corresponde ao tamanho inicial da trinca.

Por meio das funções limites superiores e inferiores, é viável obter uma estimativa numérica para a função de tamanho da trinca.

2.8 Metodologia do estudo

A metodologia empregada no presente estudo é delineada por meio de um procedimento dividido em três etapas distintas e criteriosamente definidas. Inicialmente, na fase inicial, coleta-se as amostras relevantes, seguida da aplicação do método FCB ao modelo concebido por Ahmad. O objetivo principal dessa etapa é determinar ao problema em análise uma formalização matemática consistente, e assim determinar os limitantes inferior e superior que regem o modelo de propagação de trincas.

Na segunda etapa, adota-se uma abordagem que emprega um software de código aberto, com o propósito de desenvolver algoritmos fundamentais. Estes algoritmos são desenhados para efetuar a simulação dos modelos matemáticos propostos, nomeadamente o método FCB e o esquema de Runge-Kutta de quarta ordem. Estes esquemas são então aplicados ao molde de propagação de trincas delineado por Ahmad. Uma vez que a fase de simulação é concluída, os dados gerados são submetidos a uma análise meticulosa, marcando assim o início da terceira e última etapa do procedimento.

Os resultados obtidos nessa terceira etapa elaboram-se uma base de dados, a qual se destina à comparação da eficácia do método proposto neste trabalho com o método padrão amplamente adotado na literatura.

2.9 Levantamento de amostras

Os detalhes usados para simular o método FCB foram extraídos das informações nas Tabelas 1 e 2. Essas tabelas trazem dados sobre o que os materiais são feitos e suas propriedades físicas e mecânicas. Essas informações foram retiradas de um estudo feito por (Virkkunen, 2001).

TABELA 1: Composição química das amostras

Amostra	Material	Cr	Ni	Mo	Mn	Si	Outros
A	AISI 304L	17,4	10,2	-	1,6	0,8	-
B	AISI 316	17,9	12,7	2,7	1,33	0,3	-
C	AISI 321	17,8	10,7	0,4	1,6	0,3	0,1Cu;0,5Ti;0,2Co
D	AISI 321	19,6	10	-	0,9	0,7	0,4Ti
E	AISI 321	19,6	10	-	0,9	0,7	-

F	AISI 347	17,3	9,2	0,4	1,5	0,4	0,4Cu;0,5Cb;0,1Co
G	AISI 347	17,3	9,2	0,4	1,5	0,4	0,4Cu;0,5Cb;0,1Co
H	3RE60	18,5	4,9	2,9	1,5	1,5	0,1N
I	ACX-100	23,4	5,3	2,2	0,6	0,6	0,2N

Fonte: Adaptado de Virkkunen (2001).

TABELA 2: Propriedade físicas e mecânicas das amostras

Amostra	Material	R _p (MPa)	R _p (MPa)	E (GPa)	k (W/mK)	a (10 ⁶ K ⁻¹)
A	AISI 304L	180	460	200	15	16
B	AISI 316	205	510	200	15	16,5
C	AISI 321	180	460	205	15	16
D	AISI 321	205	500	200	15	16
E	AISI 321	205	500	200	15	16
F	AISI 347	205	510	200	15	16
G	AISI 347	205	510	200	15	16
H	3RE60	450	730	200	15	14
I	ACX-100	460	660	200	15	13

Fonte: Adaptado de Virkkunen (2001).

A equação é composta pelos seguintes termos: “R_p” representa o limite de escoamento, “R_m” representa a máxima resistência a tração, o módulo de elasticidade é representado pelo “E”, já o “k” e o “a” representam a condutividade térmica e a difusidade térmica do material, respectivamente.

2.10 Método fast crack bounds aplicado ao modelo de ahmad

O modelo matemático para evolução de trinca é equacionado pela Equação 9:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } a \text{ e } C^1, \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN} = C[\sqrt{\pi a} * f(a) * \Delta\sigma]^m - T + C[\Delta\varepsilon_{TOT} * \sqrt{\pi a}]^{(1+2m)} \\ a(N_0) = a_0 \end{cases} \quad [9]$$

Utilizando a expansão em série de Taylor com resto de Lagrange, considerando também as seguintes hipóteses na Equação 10:

$$\begin{aligned}
 H1: \Delta \varepsilon(N) &= \Delta \varepsilon, \forall N \in [N_0, N_1]; \\
 H2: f &\in C^1(\mathbb{R}^+); \\
 H3: 0 < f(a_0) &\leq f(x) \leq f(y), x \leq y \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\
 H4: f'(a_0) &\leq f'(x) \leq f'(y), x \leq y \forall x, y \in [a_0, a_1];
 \end{aligned} \tag{10}$$

A primeira ideia, chamada de $H1$, parte do pressuposto de que a deformação total permanece constante. A segunda ideia, $H2$, assegura que a forma de ajustar a intensidade da deformação é suave e contínua. A terceira ideia, $H3$, estabelece que a mudança na forma geométrica precisa sempre ser para um tamanho maior ou, no mínimo, igual. Por fim, a quarta ideia, $H4$, garante que quando olhamos para a forma geométrica e sua evolução, nunca diminuimos sua inclinação ao longo do tempo. Todas essas ideias são a base do teorema que vai nos ajudar a definir até onde podemos chegar com a função de tamanho da trinca (Santos, 2019).

Teorema do método FCB aplicado ao modelo de Ahmad. Sendo respeitadas as hipóteses $H1, H2, H3, H4$ " a " $\in [a_0, a_1]$, através das funções " $f(\cdot)$ " e " $\Delta(\cdot)$ ", então pode-se validar as cotas, superior e inferior pela Equação 11:

$$\begin{cases}
 a_{cs}(N) = a_0 + \left\{ C[\sqrt{\pi a} * f(a) * \Delta \sigma]^m - T + C[\Delta \varepsilon_{TOT} * \sqrt{\pi a}]^{(1+2m)} \right. \\
 \quad \left. + \frac{1}{2} \left[m C^2 \left(\frac{\sqrt{\pi} \cdot \Delta \varepsilon}{\varepsilon f} \right)^{2m} \cdot \left(\frac{(a)^m}{2(a)^*} \right) \right] (N - N_0)^2 \right\} \\
 a_{ci}(N) = a_0 + \left\{ C[\sqrt{\pi a} * f(a) * \Delta \sigma]^m - T + C[\Delta \varepsilon_{TOT} * \sqrt{\pi a}]^{(1+2m)} \right. \\
 \quad \left. + \frac{1}{2} \left[m C^2 \left(\frac{\sqrt{\pi} \cdot \Delta \varepsilon}{\varepsilon f} \right)^{2m} \cdot \left(\frac{(a_0)^m}{2(a_0)} \right) \right] (N - N_0)^2 \right\}
 \end{cases} \tag{11}$$

Prova: Das hipóteses $H2, H3$ e $H4$, através da série de Taylor de segunda ordem com resto de Lagrange, segundo (Santos, 2015), tem-se a Equação 12:

$$a(N) = a_0 + \frac{da}{dN} (N - N_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 a}{dN^2} (\eta) \right) (N - N_0)^2, \text{ com } \eta \in [N_0, N_1] \tag{12}$$

Com base nas hipóteses H2, H3 e H4, podem ser descritas as desigualdades a seguir na Equação 13:

$$a(S) \leq a(t), S \leq t \in [N_0, N] \rightarrow (a(s))^m \leq (a(t))^m \quad [13]$$

Pelas hipóteses H2, H3 e H4, obtém-se a Equação 14:

$$(f(S))^m \leq (f(t))^m \rightarrow \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot f\right)^m \leq \left(a^{\frac{1}{2}} \cdot f\right)^m(t), s \leq t \text{ com } s, t \in [N_0, N] \quad [14]$$

Desse modo, pode-se afirmar na Equação 15:

$$(\Delta \varepsilon)^m(a(S)) \leq (\Delta \varepsilon)^m(a(t)) \quad [15]$$

Uma vez que $C > 0$, temos a Equação 16:

$$\frac{da}{dN}(s) \leq \frac{da}{dN}(t), s \leq t \text{ com } s, t \in [N_0, N] \quad [16]$$

A segunda derivada em função do tamanho de trinca pode ser descrita pela Equação 17 como:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 a}{dN^2} &= \frac{d}{dN} \left(\frac{da}{dN}(a) \right) \frac{da}{dN}(a(N)) = \\ &= mC^2(\Delta k(a))^{2m} + \\ &+ C^2(\sqrt{a\pi} \cdot \Delta \varepsilon)^2 \cdot (\sqrt{\pi} \cdot \Delta \varepsilon \cdot a^{2m})^{2m} \left[\frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{m\sqrt{a}}{a} \right] \end{aligned} \right. \quad [17]$$

Fazendo a substituição da Equação 17 na Equação 12 da expansão da série de Taylor com resto de Lagrange, obtém-se na Equação 18:

$$\left\{ \begin{aligned} a(N) &= a_0(N_0)C[\sqrt{\pi a} * f(a) * \Delta \sigma]^m - T + C[\Delta \varepsilon_{TOT} * \sqrt{\pi a}]^{(1+2m)}(N - N_0) \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left[mC^2(\Delta k(a))^{2m} \cdot \left[\frac{1}{2(a)^*} + \left(\frac{f'}{f} \right)(a) \right] \right] (N - N_0)^2 \right] (N - N_0)^2 \end{aligned} \right. \quad [18]$$

Substituindo a Equação 18 na Equação 12, escreve-se a Equação 19:

$$a_{cs}(N) = a_0 + \left[C[\sqrt{\pi a} * f(a) * \Delta\sigma]^m - T + C[\Delta\epsilon_{TOT} * \sqrt{\pi a}]^{(1+2m)} + \frac{1}{2} \left[mC^2 \left(\frac{\sqrt{\pi} \cdot \Delta\epsilon}{\epsilon f} \right)^{2m} \cdot \left(\frac{(a)^{*m}}{2(a)^{*}} \right) \right] (N - N_0)^2 \right] (N - N_0) \quad [19]$$

A equação 19 representa a fórmula da medida da trinca, que consiste no tamanho inicial da trinca somado ao valor obtido a partir da equação do modelo de Ahmad e ao resultado da segunda derivada [17]. Dessa forma, estamos lidando com uma aproximação matemática chamada de série de Taylor de segunda ordem, que leva em conta a segunda derivada e inclui um termo de erro de Lagrange para considerar possíveis imprecisões.

2.11 Aplicação computacional

Para análise do custo computacional para o sistema RK4 e para o modelo FCB, aplicado ao modelo de Ahmad, utilizou-se o software GNU Octave 7.1.0.

Os resultados obtidos adviram do processamento de um computador dotado de um processador 11th Gen Intel® Core™ i7-11390H @ 3.40GHz e memória RAM de 8GB.

Os dados utilizados para aplicação computacional foram retirados do artigo publicado por (Ahmad e Yates, 1994), abaixo na Tabela 3 encontra-se os valores e descrição das variáveis utilizadas.

TABELA 3: Dados utilizados para modelagem.

Variável	Descrição	Valor estipulado
Δk	Fator de intensidade de tensão	$4,8 \text{ Mpa} \sqrt{m}$
m	Constante do material	2,5
C	Constante do material	$1,285 * 10^{-11}$
da/dN	Limite da taxa de crescimento	$1 * 10^{-10} m/c$
T	Aumento da trinca por fadiga	$5,49 * 10^{-10}$
k	Coeficiente de variação cíclica de endurecimento	939,14
σ_{UTS}	Tensão de tração final cíclica	815 Mpa
R	Taxa de carga (min carga/ máx carga)	-1
H	Constante quando o material e a taxa de carga é fixa	0,4

Fonte: Adaptado de Ahmad e Yates (1994).

Para definição dos cálculos foi determinado que o tipo de trinca seria trinca superficial em uma placa de largura infinita com trinca central, isso significa que a largura da placa é muito superior ao tamanho inicial de trinca, sendo considerada assim como infinita. Com isso, é aplicado um fator de correção para o modelo de trinca selecionado, o qual será mencionado no tópico abaixo.

3 RESULTADOS

A seguir serão apresentados os resultados obtidos com o estudo realizado.

3.1 Placa de largura infinita e trinca central

O problema utiliza a função de correção do fator de intensidade de deformação para o caso de “placa com largura infinita e trinca central”, o qual é determinado por (Bannantine et al. 1989), e descrito abaixo na Equação 20.

$$f(a) = 1, \quad em (N_0, N_1) \quad [20]$$

Aplicando o fator de correção é então analisado os dados para o modelo de Ahmad. Será apresentado nos resultados, o material analisado, resultado das funções do tamanho de trinca e tempo de cálculo pelos métodos RK4 e FCB.

A equação de cota superior possui valores atrelados ao valor inicial de “ a^* ”, sendo que “ a^* ” deve ser maior que “ a_0 ”. Estes valores são definidos a partir de $a^* = \beta a^*$, logo β deve ser maior que 1. Assim, qualquer valor inserido para “ β ” não pode exceder a cota superior, o que significa que se deve obter um valor para a cota superior maior do que o valor obtido pelo método RK4. Este valor é determinado empiricamente (Machado, 2015).

Para determinar o desempenho das cotas, foi definida uma função de desvio relativo como na Equação 21.

$$\delta_{inferior, superior}: \{0, 1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por:}$$

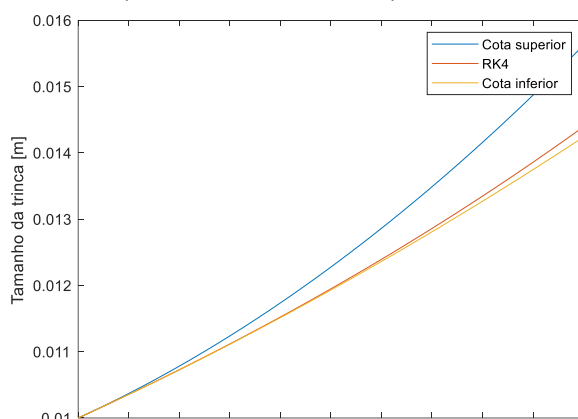
$$\delta_{inferior, superior}(N_K): 100 \left(\frac{a_{cs, ci} - a_{RK4}}{a_{RK4}} \right) (N_K) [\%], \forall N_K \{0, 1, \dots, N\} \quad [21]$$

Com isso, serão apresentados a seguir os gráficos comparativos entre o método RK4 e FCB, com tamanho de trinca e número de ciclos e o comparativo dos custos computacionais de ambos as metodologias.

3.2 Desempenho das cotas via metodologia FCB

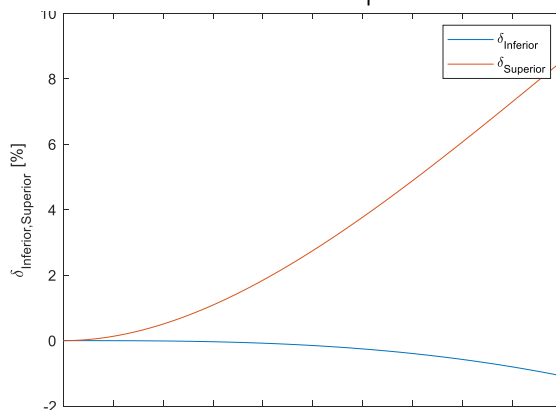
Para iniciar a simulação, é necessário definir a variável “ a^* ” encontrada de forma empírica, entre o intervalo analisado de números de ciclos “ N ”, adotando-se o menor valor de modo que não seja descumprida a solução numérica aproximada do RK4, conforme demonstrado nas Figuras 6 e 7.

FIGURA 6: Funções de cota superior e inferior comparada com RK4. Valor de $a^* = 2,0a_0$.



Fonte: Banhara (2023).

FIGURA 7: Função desvio relativo entre cota superior e inferior. Valor de $a^* = 2,0a_0$.



Fonte: Banhara (2023).

3.3 Análise dos resultados

Através dos resultados obtidos, obteve-se também os tempos para cada modelo computacional, sendo obtido o tempo tanto para o modelo de RK4, quanto para o modelo FCB, analisando os dados, podemos verificar que o FCB produziu o resultado utilizando menos tempo computacional que o modelo padrão RK4. Podemos indicar também através da Equação 22 qual a razão entre os tempos apresentados indicado por “p”.

$$p = \left(\left(\frac{T_{RK4} - T_{FCB}}{T_{FCB}} \right) * 100 \right) \quad [22]$$

“ T_{RK4} ” indica o tempo computacional para o método RK4 e “ T_{FCB} ” indica o tempo computacional utilizado para o método FCB. Abaixo segue os dados obtidos e o resultado da aplicação da equação 22, demonstrados na Tabela 4.

TABELA 4: Resultados obtidos.

RK4 (s)	FCB (s)	p %
0,4948478	0,0055138	8874,71

Fonte: Banhara (2023).

4 CONCLUSÃO

Este artigo apresenta um estudo de conclusão de curso realizado como parte do programa de bacharelado em engenharia mecânica na instituição Centro Universitário FAG. O foco da pesquisa está na análise do fenômeno de propagação de trincas por fadiga isotérmica no modelo de Ahmad, utilizando a abordagem da metodologia de Fast Crack Bounds (FCB), sob a orientação do Professor Mestre Engenheiro Bruno dos Santos.

Este trabalho teve durante sua elaboração a aplicação da metodologia FCB no modelo de Ahmad para determinação da propagação de trincas. Utilizou-se o modelo de cotas para comparar as metodologias FCB e RK4 utilizando os dados de amostra extraída do trabalho proposto por Ahmad.

A partir disso, foi possível confirmar a eficiência do método FCB sobre o método RK4 para a análise do fenômeno “tamanho de trinca”, onde encontrou-se uma eficiência de 8.874,71% maior para o modelo FCB em comparação com o modelo usual.

DECLARAÇÃO DE RESPONSABILIDADE

Os autores são os únicos responsáveis por este trabalho.

REFERÊNCIAS

American Society for Testing and Materials. ASTM E 823-96: Standard Terminology Relating to Fatigue and Fracture testing. West Conshohocken, ASTM, 2000.

ALVARENGA JÚNIOR, A. Avaliação Experimental Dos Efeitos Da Fadiga Térmica Nas Propriedades Mecânicas De Um Aço Inoxidável Austenítico. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 145 p., 2006.

BANHARA, B. J. Análise do fenômeno de propagação de trinca por fadiga isotérmica do modelo de ahmad via metodologia fast crack bounds. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Centro Universitário Fundação Assis Gurgacz, Cascavel, 18 p., 2023.

BAUMGAERTNER, L. G. Análise do fenômeno de propagação de trinca por fadiga isotérmica do modelo de taira via metodologia fast crack bounds. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Centro Universitário Fundação Assis Gurgacz, Cascavel, 2022.

CARDOSO, P. C. Determinação do Parâmetro Relevante para Caracterização de Dano em Fadiga em Aço Inoxidável Austenítico. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 68 p., 2016.

MACHADO JUNIOR, W. M. Aplicação da Metodologia Numérica “Fast Bounds Crack” para uma Estimativa Eficiente da Evolução do Tamanho de Trinca. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 66 p., 2015.

MENEGAZZO, G. H. Análise teórica e numérica do fenômeno de fadiga térmica do modelo de Solomon via metodologia “Fast Crack Bounds”. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Centro Universitário Fundação Assis Gurgacz, Cascavel, 2021.

RIVA, I. R. Análise de fadiga de estruturas metálicas com ênfase em offshore. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Departamento de Mecânica Aplicada A Estruturas, Universidade Federal do Rio de Janeiro Escola Politécnica, Rio de Janeiro, 160 p., 2004.

SANTOS, B. Quantificação Da Incerteza Do Modelo De Forman Via Metodologia "Fast Crack Bounds". Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 105 p., 2019.

VIRKKUNEN, I. Thermal Fatigue of Austenitic and Duplex Stainless Steels. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Department Of Mechanical Engineering, Helsinki University Of Technology, Spoo, 115 p., 2001.

AHMAD, H. YATES, J. R. An elastic-plastic model for fatigue crack growth at notches. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 17, No. 6, p 651-660, 1994.

ENGLER-PINTO JÚNIOR, C. C.; SPINELLI, D. Isothermal and thermomechanical fatigue of a nickel-base superalloy. *Tecnologia em Metalurgia, Materiais e Mineiraç o*, São Paulo, v. 11, p. 125-130, 2014.

TAIRA, S.; FUJINO, M. Effect of Temperature on the Rate of Fatigue Crack Propagation in Steels during Low Cycle Fatigue*. *Transactions Isij*, [s. l], v. 16, p. 147-152, 1976.

BANNANTINE, J. A.; COMER, J. J.; HANDROCK, J. L. Fundamentals of Metal Fatigue Analysis. Prentice Hall: [s. l.] 1989.

CALLISTER, W. D. Fadiga In: CALLISTER, W. D. Ciência e engenharia de materiais: Introdução. 5. ed. Utah: Ltc, p. 166-185. 1999.

REED-HILL, R. E. Princípios de metalurgia física ed 2. Gb. Dois, Rio de Janeiro, Brasil, 1982

ROSA, E. Análise de resistência mecânica de peças e componentes estruturais: Mecânica da Fratura e Fadiga. Grante, Florianópolis, Brasil, 2002.

SCHIVJE, J. Fatigue of Structures and Materials 2nd Ed. Delft University of Technology, Faculty of Aerospace Engineering, Delft, The Netherlands, 2009.

SPERA, D. A. Thermal Fatigue of Materials and Components. ASTM International, Pensilvânia, EUA, 1976.

STROHAECKER, T. R. Mecânica da fratura. Labor rio de Metalurgia Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil. 99p, 2007.

VALLE, K. N. F. Métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta. Pós-Graduação em Matemática para professores com ênfase em cálculo, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil, 40p., 2012.

STERZA, R. L; BRANDI, A. C. Comparação entre métodos numéricos: Runge-Kutta de quarta ordem e previsor-corretor. C.Q.D. – Revista Eletr nica Paulista de Matemática, Bauru, v. 7, p. 12-22, dez. 2016. DOI: 10.21167/cqdvol7ermac201623169664rlsacb1222. Disponível em: <<https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v07a02-comparacao-entre-metodos-numericos.pdf>>. Acesso em: 04 de outubro de 2023.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Centro Universitário FAG, Fundação Araucária de Apoio ao Desenvolvimento Científico Tecnológico do Estado do Paraná e à Secretaria da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior do Paraná