



ESTRELAS GEOMÉTRICAS

GEOMETRIC STARS

MELO, Sandra de Souza ¹,
LAURENTINO, Auta Luciana²

Resumo

Tratamos neste artigo sobre os poliedros simétricos estrelados e a construção de materiais didáticos a partir da fabricação digital. Trata-se de um estudo que vem sendo explorado no projeto de extensão nomeado de 'Perspectiva dos poliedros na visão de Mário Duarte' em que estamos realizando o repasse dos conhecimentos sobre tais poliedros, através da representação bidimensional e tridimensional, com uso da modelagem 2D e 3D para produção de modelos físicos e digitais. No desenvolvimento deste trabalho trazemos conceitos, aplicações e representações sobre os poliedros e a fabricação digital, aplicados aos protótipos. Entende-se ser uma pesquisa participativa, em que o desenvolvimento sistemático das atividades é vivenciado, compartilhado e analisado por todos os atores envolvidos. A metodologia utilizada neste projeto valoriza a participação ativa dos discentes e docentes envolvidos, vem acontecendo no formato presencial e conta com a contínua divisão de atividades em cada encontro para a produção desses artefatos. Como resultado, apresentamos os modelos desenvolvidos para manipulação, visualização e impressão 3D dos poliedros aqui tratados, além do processo de elaboração de materiais que vem sendo realizado.

Palavras-chave: expressão gráfica; extensão; fabricação digital; geometria; poliedros estrelados

Abstract

This article discusses symmetrical star polyhedra and the construction of teaching materials using digital fabrication. This is a study that has been explored in the extension project called 'Perspective of polyhedra in the view of Mário Duarte', in which we are transferring knowledge about such polyhedra, through two-dimensional and three-dimensional representation, using 2D and 3D modeling to produce physical and digital models. In the development of this work, we bring concepts, applications and representations about polyhedra and digital fabrication, applied to prototypes. It is understood to be a participatory research, in which the systematic development of activities is experienced, shared and analyzed by all the actors involved. The methodology used in this project values the active participation of the students and teachers involved, has been taking place in person and relies on the continuous division of activities in each meeting for the production of these artifacts. As a result, we present the models developed for manipulation, visualization and 3D printing

¹ Universidade Federal de Pernambuco, <https://orcid.org/0000-0002-5480-240X>, sandra@ufpe.br

²Universidade Federal de Pernambuco, <https://orcid.org/0000-0002-3478-5614e>, auta.laurentino@ufpe.br

of the polyhedra discussed here, in addition to the process of developing materials that has been carried out.

Keywords: graphic expression; extension; digital manufacturing; geometry; starred polyhedra

1 Introdução

Estas que chamamos no título de nosso artigo de estrelas geométricas, são os poliedros estrelados, e são conhecidos e trabalhados pelos geômetras e matemáticos desde a antiguidade (Sammarone, 2010; Cultura Científica, 2024). Não só foram estudadas pelos matemáticos, mas fascinaram arquitetos e artistas de diferentes períodos que os utilizaram em suas obras tal como se pode observar na *Sagrada família de Barcelona* de Gaudí, ou em 1430, pelo artista e matemático italiano Paolo Uccello, nos mosaicos da *Catedral de San Marcos*, em Veneza, e em *Ordine e caos* de M. C. Escher (1950) (López, 2015; Sammarone, 2010; Cultura Científica, 2024).

Figura 1 – Fachada do nascimento na Sagrada Família de Barcelona – detalhe em destaque nosso.



Fonte:

https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Fachada_del_nacimiento._Templo_Expiatorio_de_la_Sagrada_Familia._Barcelona._Catalu%C3%B1a._Esp%C3%B1a.JPG#filelinks

Figura 2 – Céu de constelação, anjo Gabriel e a virgem Maria.



¹ Universidade Federal de Pernambuco, <https://orcid.org/0000-0002-5480-240X>, sandra@ufpe.br

²Universidade Federal de Pernambuco, <https://orcid.org/0000-0002-3478-5614e>, auta.laurentino@ufpe.br

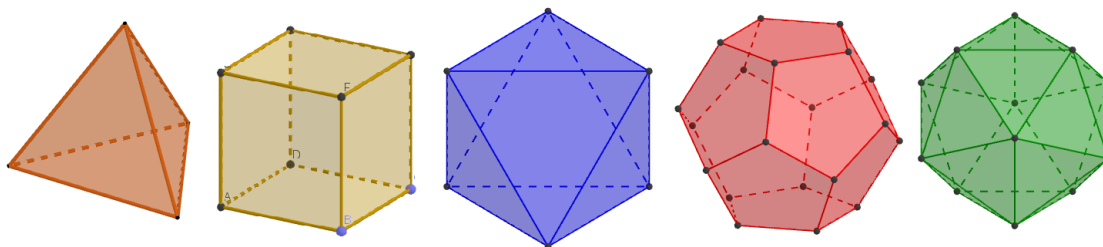
Fonte: LÓPEZ; Mas; Sol. Cultura y matemáticas a la vista de todos (II): Poliedros estrellados y análisis del entorno de la Sagrada Familia de Barcelona. Disponível em <https://17jaem.semrm.com/aportaciones/n165.pdf>. p.05.

Concordamos com Coxeter quando nos fala da razão pela qual se estudam os poliedros:

«La principale ragione per studiare i poliedri regolari è ancora la stessa che al tempo dei Pitagorici, cioè che le loro forme simmetriche interessano il nostro senso artistico». H. S. M. COXETER (Sammareno, 2012, local 02).

Os poliedros regulares que dão origem aos poliedros estrelados são cinco – tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro – e apresentam simetrias e regularidades que tornam possível a construção dos estrelados (Progetto Imagini per la matematica, local 02; Sammarone, 2010; Proyecto Estalmat, 2010, Junta de Andalucía, local 01).

Figura 3 – poliedros regulares



Fonte: as autoras, 2024.

Expomos neste trabalho uma experiência vivenciada no projeto de extensão intitulado ‘Perspectiva dos poliedros na visão de Mário Duarte’¹, que conta com a colaboração dos professores Mário Duarte Costa e Alcy Vieira Costa² como orientadores no desenvolvimento dos estudos sobre os poliedros estrelados. Tratamos sobre os poliedros simétricos estrelados a partir da representação bidimensional e tridimensional, com a finalidade de produzirmos materiais didáticos físicos e digitais para disseminação de tal conteúdo. A metodologia utilizada neste projeto valoriza a participação ativa dos integrantes, através de encontros presenciais e divisão das tarefas por equipe. Para obtenção dos resultados desejados, faz-se necessário o envolvimento de todos os discentes e docentes nas etapas teóricas e práticas desta ação de extensão, a fim de conseguirmos experimentar e registrar o conhecimento passado pelos professores e produzir os modelos didáticos esperados.

¹ Projeto cadastrado no Sistema de Informação e Gestão de Projetos (SIGPROJ), protocolo 398639.2194.155701.06102023, que envolve oito docentes do Departamento de Expressão Gráfica e um docente do Colégio de Aplicação da UFPE.

² Mário Duarte Costa, Recifense, Professor Titular aposentado; Alcy Vieira Costa, Professora aposentada, publicaram vários trabalhos didáticos em formato de apostila e livros sobre geometria.

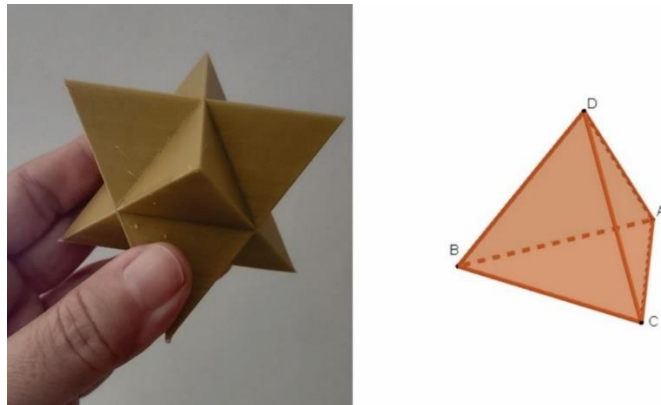
2 Revisão bibliográfica

Nesta seção aprofundaremos os conhecimentos dos poliedros estrelados, apresentando sua origem a partir dos poliedros regulares que originam estas magníficas estrelas geométricas; e também nos debruçaremos sobre fabricação digital, através de impressoras 3D e do corte a laser.

2.1 Poliedros estrelados

Proyecto Estalmat (2010) faz uma diferença entre estrelas e poliedros estrelados regulares, segundo a sua origem, sendo as primeiras originadas de dois poliedros, e os segundos de um único poliedro regular. Na figura 4 temos um exemplo de estrela octângula, formada por um tetraedro e seu simétrico.

Figura 4 - Um tetraedro e seu simétrico com respeito a seu centro conformam a estrela octângula³.



Fonte: as autoras, 2024.

Sammarone (2010, local 01), fala da origem dos estrelados a partir dos trabalhos de Kepler:

[...] Quando si affacciò con Keplero la possibilità di ottenere altri poliedri basati su poligoni regolari concavo-convessi, ne sono stati definiti altri quattro, detti poliedri di Keplero-Poinsot. Essi sono determinati dalla compenetrazione di facce a forma di poligoni regolari stellati. Essi sono: [...] il piccolo dodecaedro; [...] il grande dodecaedro; [...] il grande dodecaedro stellato [...]; e il grande icosaedro [...].

Sammarone (2010) ainda defende que em 1810, o matemático francês Louis Poinsot propôs outros dois poliedros estrelados regulares. Atualmente os estudos científicos sobre os sólidos regulares têm apresentado um contínuo desenvolvimento, sustentado pelos instrumentos informáticos.

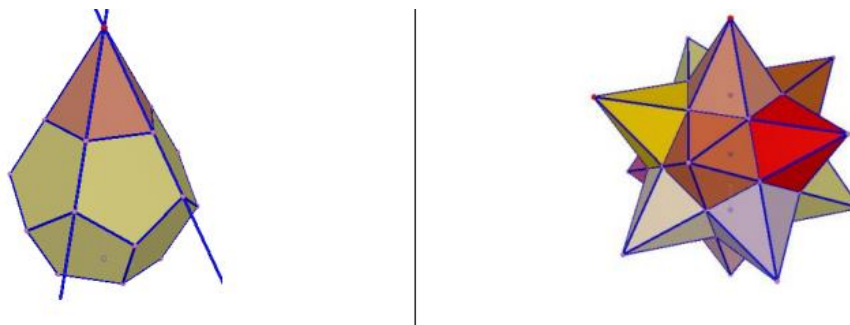
Os poliedros estrelados originados pelo prolongamento das arestas dos lados de suas faces têm o vértice da estrela no eixo da simetria (de face a face, ou de vértice a vértice). Daí ser bastante cômoda a representação por vistas mongeanas de tais poliedros

³ Denominada por Rangel (1982) como bloco poliédrico, que é formado por poliedros que se interceptam.

estrelados na direção de seus eixos de simetria, que são os mesmos de seus poliedros de origem.

Segundo Proyecto Estalmat (2010), é possível construir o Pequeno dodecaedro estrelado⁴ constituído pelo prolongamento das arestas das faces do dodecaedro, tal como se pode observar na figura 5.

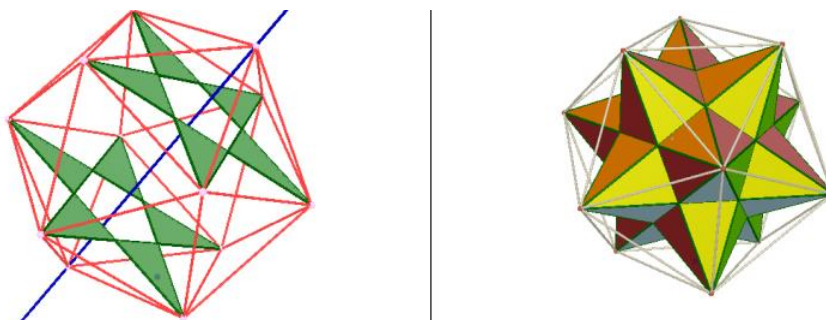
Figura 5 – construção do pequeno dodecaedro estrelado



Fonte: Proyecto Estalmat. Disponível em <https://www.estalmat.org/archivos/POLIEDROS-REGULARES-1.pdf>. p.16.

A regularidade e a dualidade entre os poliedros platônicos permitem que o pequeno dodecaedro estrelado seja obtido também do icosaedro, bastando segundo Proyecto Estalmat que partindo do icosaedro sejam formadas faces estreladas regulares de 5 pontas partindo dos vértices deste poliedro, resultando neste caso o estrelado inscrito nele. A figura 6 nos mostra este raciocínio.

Figura 6 – construção do pequeno dodecaedro estrelado.



Fonte: PROYECTO ESTALMAT. Disponível em <https://www.estalmat.org/archivos/POLIEDROS-REGULARES-1.pdf>. p.17.

Com estas possibilidades de diferentes modos de construção e poliedro de origem, podemos inferir que a dualidade tem um papel fundamental nestes poliedros estrelados porque as simetrias que existem em poliedros duais são as mesmas. Dessa forma para construir o pequeno dodecaedro estrelado a partir do dodecaedro, prolongamos as arestas das faces; e para construir o mesmo poliedro estrelado a partir do icosaedro, construímos polígonos estrelados apoiados nos vértices do icosaedro. Isso ocorre porque a simetria

⁴ Denominado *Dodecaedro de 12 vértices*, segundo Rangel (1982) que é construído pelas diagonais dos pentágonos convexos limitados pelas arestas do dodecaedro.

quinaria do dodecaedro se dá de face a face oposta, e a mesma simetria quinaria no icosaedro se dá de vértice a vértice oposto.

No decorrer do nosso trabalho temos apresentado os poliedros, suas propriedades, construção e aplicação na arquitetura, nas artes de maneira geral, mas a sua aprendizagem pode e deve aproveitar a tecnologia disponível para auxiliar na aprendizagem destes conteúdos. Assim sendo, a partir de tecnologias digitais é possível a execução de materiais didáticos que contribuam para este processo de formação. Atualmente contamos na Licenciatura em Expressão Gráfica com laboratórios de fabricação digital e prototipagem rápida, através de impressoras 3D e do corte a laser. Neste projeto iremos realizar o repasse dos conhecimentos sobre poliedros, e trataremos sobre a fabricação digital para produção de modelos didáticos.

2.2 A fabricação digital para produção de modelos didáticos.

A equipe do Laboratório de Experimentação em Artefatos 3D (GRE3D) contribui na realização de atividades práticas a partir da utilização de recursos computacionais, através do emprego de metodologia participativa para a construção de modelos didáticos.

Em suas atividades são abordados temas ligados às tecnologias digitais contemporâneas e suas aplicações junto à área da geometria. Dessa maneira, realizamos um debate/pesquisa sobre a geometria e seu emprego, tratando sobre o uso de *softwares* que possibilitam a realização da representação 2D e a aplicação no corte a laser, como também a Modelagem 3D e a aplicação na impressão 3D.

Seabra et al (2021) apresentam a ideia de que a materialidade digital

[...] está ligada à possibilidade de criar objetos, processos e/ou projetos que expressem materialidade através de dados dentro do ambiente virtual, apresentando propriedades que, anteriormente, só poderiam ser investigadas através do objeto físico real (Seabra et al, 2021, p.90).

Para a criação de modelos didáticos, a modelagem digital dos poliedros estrelados, a partir do conhecimento de sua geração por meio de suas propriedades, pode ser executada por impressão 3D. Estes modelos certamente apoiarão o processo de ensino/aprendizagem auxiliando os alunos no entendimento dos conteúdos ministrados na sala de aula.

Dessa maneira, as modelagens digitais, sejam elas para a representação 2D, ou para a representação 3D, preservam as características e propriedades dos sólidos geométricos, ou de qualquer outro artefato, em sua confecção. Ao modelar um arquivo para impressão 3D, usam-se *softwares* como *Blender*, *Fusion 360*, *Rhinoceros*, na sequência, ajusta-se sua configuração em um fatiador, por exemplo o *software Ultimaker Cura*, que a partir de uma linguagem de programação transforma o arquivo em um código numérico, conhecido

como Gcode, sendo este reconhecido pelo sistema da impressora, assegurando as configurações desejadas para materialização do artefato, em qualquer escala.

Para este projeto de extensão conseguimos imprimir dez poliedros estrelados nas impressoras 3D com filamento plástico PLA (Figura 7), além disso, iniciamos alguns experimentos na impressora de resina, como também, poderemos desenvolver modelos didáticos utilizando a cortadora a laser.

Figura 7 – poliedros estrelados impressos em PLA.



Fonte: as autoras, 2024.

A fabricação digital proporciona, na contemporaneidade, o compartilhamento de arquivos de distintos modelos de artefatos (utilitários ou decorativos), que atendem várias áreas (tecnológica, educativa, residencial, hospitalar...) abertos para *download* e produção em qualquer lugar do mundo, quebrando barreiras geográficas e de acesso à informação. Este projeto contará com um site em que serão disponibilizados todos os modelos dos poliedros estrelados, no formato .stl, produzidos nesta extensão universitária.

3 O projeto dos poliedros estrelados

A Geometria gráfica bidimensional e tridimensional é voltada para os estudantes do ensino médio e superior das áreas de Arquitetura, Engenharia, Expressão Gráfica, Design e Matemática, e nelas são tratados o estudo das formas geométricas que podem ser aplicadas em artefatos físicos e digitais, como edificações, modelos didáticos, joias, jogos, mobiliários, entre outros. Nosso projeto tem sido realizado com a consultoria do Professor Titular da UFPE, Mário Duarte, através da sua expertise na área da geometria, com recorte nos poliedros estrelados. Estamos estudando o grupo de poliedros estrelados, na sua perspectiva, com a finalidade de repassar o conhecimento e produção de modelos didáticos a partir da fabricação digital.

Este conhecimento vem sendo repassado de maneira sistemática, com o envolvimento dos atores envolvidos, a partir de uma interação que garante a aprendizagem do tema proposto, a observação dos fenômenos, a discussão e o compartilhamento dos conceitos e materiais produzidos para o estudo dos poliedros estrelados. Assim, podemos tratar como uma pesquisa participante de acordo com as ideias de Severino (2016).

3.1 Os objetivos do projeto

Objetivo Geral

Estudar um grupo de poliedros estrelados, na perspectiva do professor Mário Duarte, para produção de modelos didáticos a partir da fabricação digital.

Objetivos Específicos:

Repassar os conhecimentos sobre poliedros para estudantes da graduação de Licenciatura em Expressão Gráfica e de Design;

Tratar sobre a fabricação digital através de oficinas focadas na impressão 3D e no corte a laser;

Registrar todo o processo das aulas e das oficinas para produção de recursos didáticos (apostilas, site, vídeos).

3.2 As etapas do projeto

A metodologia de Desenvolvimento do projeto vem ocorrendo com encontros presenciais e participação direta de todos os envolvidos neste projeto na discussão e distribuição das tarefas.

Como etapas, estamos realizando oficinas teóricas e práticas sobre geometria, modelagem de artefatos, impressão 3D e corte a laser. Nas figuras que se seguem podem ser apreciados os encontros nos quais as atividades têm sido desenvolvidas.

Na Geometria, uma das principais áreas estudadas é a geometria espacial. Essa área abrange o estudo dos objetos relacionando-os com o espaço em que está inserido, tanto bidimensionalmente como tridimensionalmente. Tais áreas são indicadas pela Base Nacional Comum Curricular (Brasil, Ministério da Educação, 2018) para o ensino fundamental e médio. Durante os encontros com o professor Mário Duarte (Figura 8), os conceitos e propriedades dos poliedros são apresentados e exemplificados com modelos tridimensionais (Figura 9). Também, durante as atividades promove-se discussões relacionadas a geometria espacial por meio dos poliedros, suas simetrias e representações (Figura 10).

Figura 8 – apresentação e discussão sobre os poliedros



Fonte: as autoras, 2024.

Figura 9 – modelos e slide com os conteúdos discutidos e apresentados para modelagem



Fonte: as autoras, 2024.

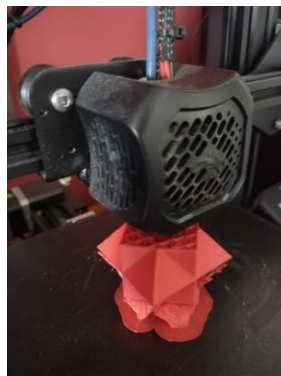
Figura 10 – apresentação e discussão teórica sobre os poliedros



Fonte: as autoras, 2024.

A partir de tecnologias digitais é possível a execução de materiais didáticos que contribuam para o processo de formação. Atualmente contamos na Licenciatura em Expressão Gráfica com laboratórios de fabricação digital e prototipagem rápida, através de impressoras 3D e do corte a laser. Neste projeto estamos realizando o repasse dos conhecimentos sobre poliedros tratando sobre a fabricação digital para produção de modelos didáticos, tal qual se pode ver na figura 11.

Figura 11 – fabricação digital 3D de poliedro



Fonte: as autoras, 2024.

Listamos a seguir os poliedros estudados e explorados digitalmente até o momento: cubo e um octaedro regular, bloco de 2 tetraedros, estrelado do cuboctaedro 1, estrelado do cuboctaedro 2, dodecaedro regular estrelado de 20 pontas, dodecaedro regular

estrelado de 12 pontas, dodecaedro côncavo, estrelado do troncotetraedro, icosidodecaedro estrelado e o icosaedro dodecaedro estrelado.

Os autores que dissertam sobre as configurações de tais poliedros, os estrelados e os regulares, contribuem para esta discussão ao apresentarem os seus conceitos, formar e aplicações. O Sammarone (2010) parte de uma abordagem histórica, expõe a origem e descrição dos poliedros. Já o Proyecto Estalmat (2010) traz a percepção distinta entre estrelas e poliedros estrelados regulares, além de seus detalhes construtivos e traçados. Estas informações contribuem para a formação integral dos discentes participantes deste projeto, por garantirem o estudo e discussão das teorias sistematizadas sobre o tema, somada à prática durante o processo da modelagem digital e materialização dos artefatos através da impressão 3D.

4 Conclusão

Este estudo dos poliedros estrelados vem promovendo encontros inesquecíveis com a presença dos professores Mário Duarte e Alcy Costa, junto a equipe de docentes e discentes da Licenciatura em Expressão Gráfica. Nesta parceria, estamos conseguindo produzir um acervo de materiais didáticos, desenvolvimento de artigos, que será compartilhado em um site e este possibilitará o acesso a quem se interessar pelo assunto e pela produção de artefatos, seja física ou digital sobre o tema aqui exposto. A disposição dos professores orientadores é um exemplo de dedicação para nossa área e os membros da LEG que integram o projeto de extensão estão contribuindo em todo o processo de ensino-aprendizagem e construção dos modelos 2D e 3D. Trata-se de um assunto cujas aplicações são inesgotáveis, tanto no ambiente voltado à educação, quanto no mercado de trabalho. O desenvolvimento deste projeto de extensão, segundo Severino (2026), contribui para a construção do conhecimento por conseguir agregar as dimensões epistemológica, pedagógica e social da pesquisa na graduação, através da extensão universitária. Respectivamente, estimula a assimilação entre o conhecimento, com o processo de ensino-aprendizagem, a partir da prática vivenciada no cotidiano dos estudantes. Dessa maneira, esta atividade de extensão promove a importância de tais projetos na formação superior, ao proporcionar a aproximação e troca de saberes entre os atores envolvidos, cada um com a sua especificidade e entendimento.

Colaboradores

A Professora Sandra de Souza Melo desenvolveu a parte teórica deste artigo e a Professora Auta Luciana Laurentino contribuiu com a parte da descrição do processo da fabricação digital e do projeto de extensão, além de ter realizado os experimentos com a impressão 3D que ilustra este trabalho.

Agradecimentos

Agradecemos ao Laboratório GREA3D Móvel pela parceria para a produção dos modelos didáticos dos poliedros estrelados. Agradecemos aos professores Mário Duarte e Alcy Duarte pelo aporte teórico sobre os conteúdos.

Referências

BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

CULTURA CIENTÍFICA. **Los poliedros de Kepler-Poinsot.** Disponível em <https://culturacientifica.com/2024/02/07/poliedros-kepler-poinsot/>. Acesso em 20/05/2024.

JUNTA DE ANDALUCIA. **Clasificaciones de los poliedros.** In Conoce las matemáticas. Disponível em https://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/21003232/helvia/sitio/upload/conoce_las_mates__solidos__clasificaciones_poliedros.pdf. Acesso em 23/05/2024.

LÓPEZ, María de los Desamparados. **Astronomía y geometría en las estrellas de Gaudí.** Disponível em <https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1171603/Lopez2017Astronom25C325ADa.pdf>. E em <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/astronomia-y-geometria-en-las-estrellas-de-gaudi/>. Acesso em 23/05/2024.

PROYECTO ESTALMAT - Castilla y León. **Poliedros Regulares.** Disponível em <https://www.estalmat.org/archivos/POLIEDROS-REGULARES-1.pdf>. Acesso em 20/05/2024.

PROGETTO IMMAGINI PER LA MATEMATICA. I **poliedri regolari stellati.** Disponível em https://www.matematita.it/personali/index.php/i_poliedri_regolari_stellati?blog=6. Acesso em 20/05/2024.

RANGEL, Alcyr Pinheiro. **Poliedros.** Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 1992. 74p. ISBN 8521601883.

SAMMARONE, Sergio. **SCHEDA DI APPROFONDIMENTO - I poliedri regolari.** Bologna: Zanichelli Editore SpA, 2010. 02 p. Disponível em https://www.didatticarte.it/Blog/documenti/Zanichelli_Sammarone_Poliedri_Regolari.pdf. Acesso em 20/05/2024.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico.** 24 ed. rev. e atual. - São Paulo: Cortez, 2016.