UMA ABORDAGEM SOBRE TRANSFORMAÇÕES LINEARES APLICADA NA COMPUTAÇÃO GRÁFICA UTILIZADA EM DISPOSITIVOS MÓVEIS

Ramina Samoa Silva Camargo[1]

Meng Huey Hsu[2]

Resumo. O artigo apresenta uma proposta de abordagem ao conteúdo de transformações lineares de forma aplicada a computação gráfica nos cursos de engenharias e ciências da computação através de objetos como dispositivos móveis utilizando o software GeoGebra como instrumento de transformação e interatividade de forma dinâmica e afim de que o processo de ensino aprendizagem possa se tornar mais significativo.

Palavras chaves: Transformações Lineares. Computação Gráfica.

1. Introdução

O ensino da álgebra linear que é uma disciplina chave do núcleo básico em matemática nos cursos de engenharia e ciência da computação, mas apesar disto, nota-se que há um distanciamento entre o conteúdo ensinado em sala de aula e sua aplicação na prática, causando uma certa dificuldade na aprendizagem do conteúdo, uma vez que segundo Celestino (2000), a álgebra linear introduz uma linguagem e um raciocínio abstrato com os quais os alunos que estudam pela primeira vez não estão acostumados a lidar. Por conta disto, este artigo aborda algumas aplicações de transformações lineares planas e espaciais aplicadas no uso dos dispositivos móveis, como smartphones e tablets, tão largamente usados hoje em dia, para que se compreenda o quão próxima está a prática da teoria apresentada.

As aplicações estão descritas através de três funções básicas utilizadas na interação com os smartphones: mover, girar e zoom. Todos foram calculados manualmente e o resultado de cada ação demonstrada através do software matemático GeoGebra.

2. Transformações Lineares

Nesta seção são conceituados os tópicos conforme definições de Anton (2001) sobre Transformações Lineares que são necessários para o entendimento das aplicações na computação gráfica.

Definição 1 Uma função $T: V \rightarrow W$, onde V e W são espaços vetoriais sobre um corpo K, é dita uma transformação linear se, para todos $u, v \in V$ e para todo $\lambda \in K$, tem-se:

- $T\,(u + v) = T\,(u) + T\,(v)$
- $T\,(\lambda u) = \lambda T\,(u)$

2.1. Existência de uma Transformação Linear

De acordo com Steinbruch (2013) a existência de uma transformação linear é conceituada da seguinte forma:

Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo K, onde a $dim\, V < \infty$. Seja $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base de V e $w_1; w_2, \cdots, w_n$ vetores quaisquer de W. Então existe uma transformação linear $T : V \longrightarrow W; Tv_i = w_i, i = (1, \cdots, n)$.

3. Transformações Lineares aplicadas na Computação Gráfica

Conforme as definições de Gonçalves (2013), mostraremos alguns tipos de transformações lineares planas que serão utilizadas para o embasamento da aplicação na computação gráfica.

3.1. Cisalhamento

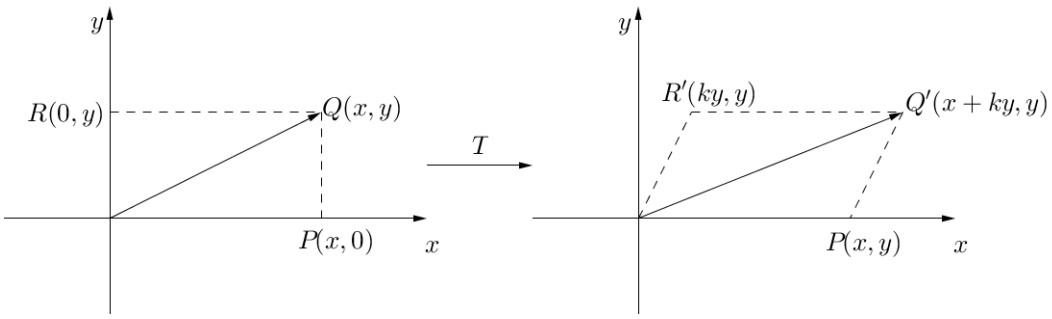
Definição 2 A transformação linear $T : R^2 \longrightarrow R^2$ dada por $T(x, y) = (x + ky, y)$ é denominada de cisalhamento na direção do eixo x. Na forma matricial, temos que:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ky \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Neste caso, diz-se que a matriz representa a transformação T.

O cisalhamento na direção do eixo x mostrado na Figura 1, transforma o retângulo OPQR no paralelogramo OPQ'R'. Cada ponto (x, y) é deslocado horizontalmente até $(x + ky, y)$. Observar que os pontos sobre o eixo das abscissas não são deslocados, pois possuem a ordenada nula. Por isto, os quadriláteros OPQR e OPQ'R' possuem a mesma base OP.

Figura 1. Cisalhamento na direção do eixo x



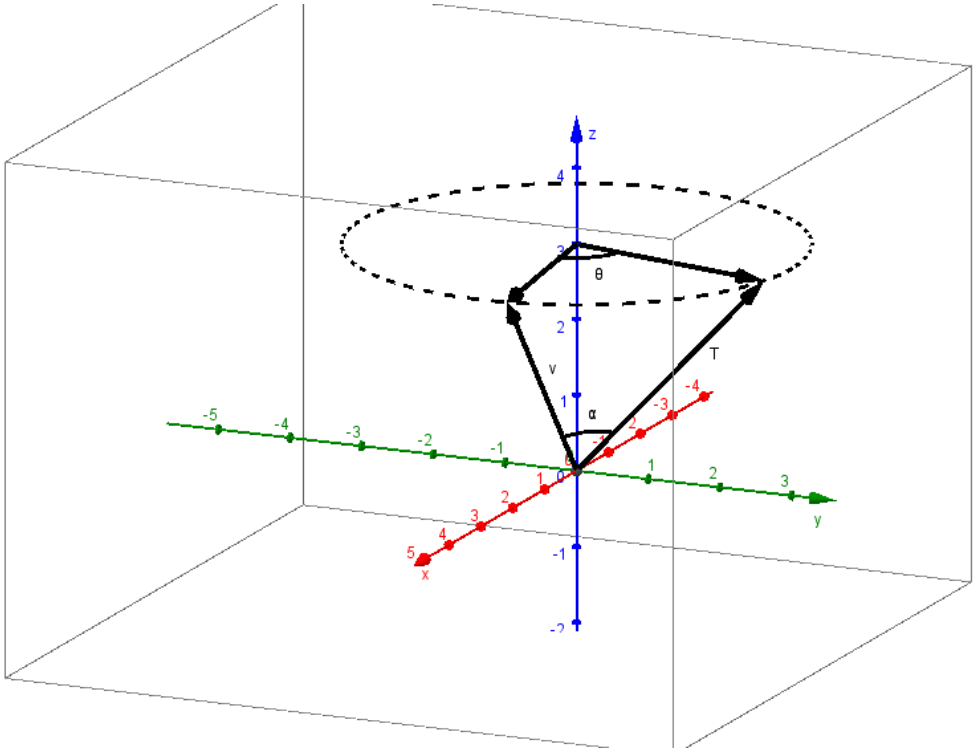
Fonte: próprio autor

3.2. Rotação

Definição 3 A transformação linear $T: R^3 \to R^3$, dada por $T_{\theta,z}(x,y,z) = (xcos\theta - ysen\theta, xsen\theta + ycos\theta, z)$ é denominada de rotação em torno do eixo coordenado z (ver Figura 2). Na forma matricial, temos que:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xcos\theta - ysen\theta \\ xsen\theta + ysen\theta \\ z \end{bmatrix}$$

Figura 2. Rotação no eixo z



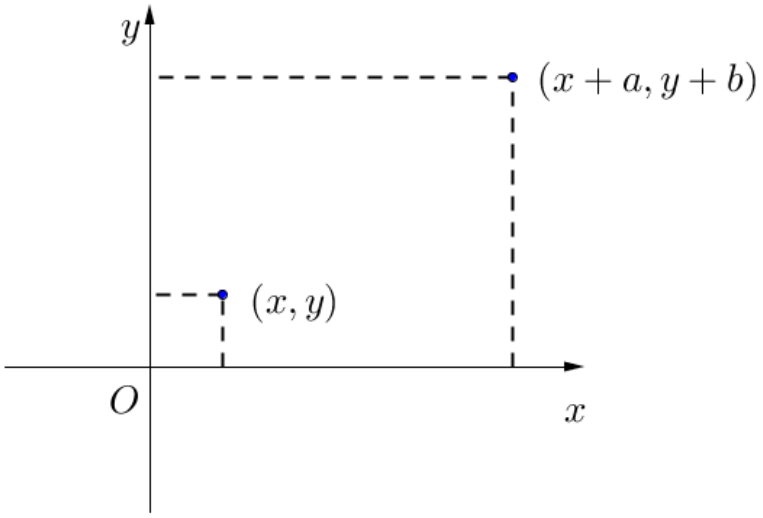
Fonte: próprio autor

3.3. Translação

Definição 4 A transformação $T: R^2 \longrightarrow R^2$, dada por $T(x,y) = k(x + a, y + b)$ (ver Figura 3) é denominada linear se, e somente se, $a = b$. Na forma matricial, temos que:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Figura 3. Translação Linear, sendo $a = b$



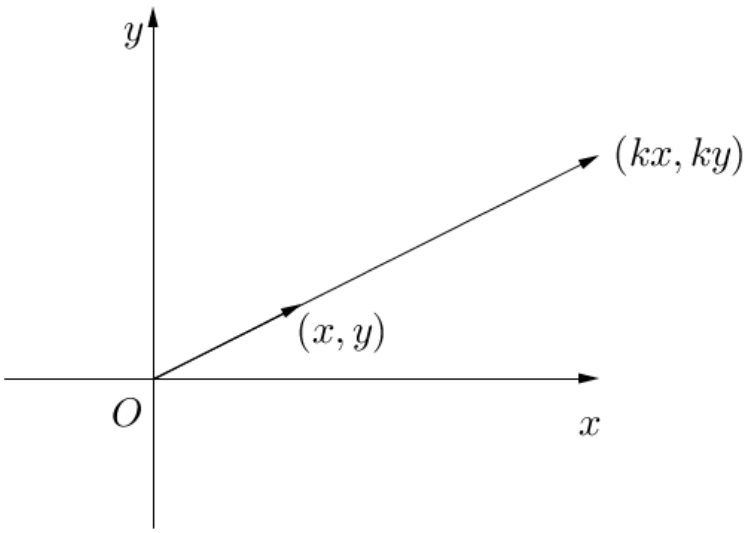
Fonte: próprio autor

3.4. Dilatação ou Contração

Definição 5 A transformação linear $T: R^2 \to R^2$, dada por $T(x, y) = k(x, y)$ é denominada de dilatação ou contração, conforme a Figura 4. Na forma matricial, temos que:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Figura 4. Dilatação do vetor em k pontos



Fonte: próprio autor

Se $|k| > 1$, T é uma dilatação;

Se $|k| > 1$, T é uma contração;

Se $|k| = 1$, T é identidade;

Se $|k| < 0$, T troca o sentido do vetor.

Neste caso, diz-se que a matriz representa a transformação T.

4. Aplicações na Computação

O sistema de coordenadas cartesianas é o mais utilizado para trabalhar com gráficos. O computador usa um sistema de coordenadas parecido, mas com algumas diferenças importantes. Como por exemplo a coordenada y, em que os computadores, o zero está no topo da tela.

Estas diferenças, apesar de importantes, não serão consideradas nesta seção, cujo foco principal é mostrar a aplicação de Transformações Lineares na computação.

4.1. Computação Gráfica

Conforme Conci (2003), os objetos criados virtualmente em um dispositivo são desenhados usando coordenadas que identificam suas dimensões e posição na tela. Estas informações são usadas para que, quando na interação com o usuário (seja através do mouse e/ou touchscreen), o sistema saiba exatamente o objeto da tela que deve ser trabalhado e a ação a ser executada.

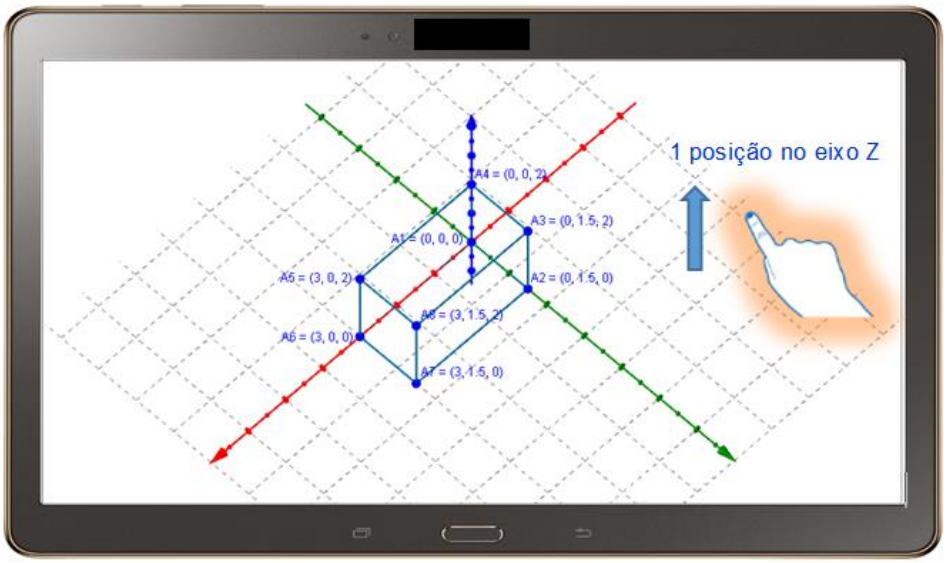
Dentre as aplicações da transformação linear na computação gráfica, serão demonstradas as três funções básicas e mais frequentemente utilizadas pelos usuários nos dispositivos móveis como smartphones e/ou tablets: mover, girar e zoom.

Para melhor entendimento, o objeto será desenhado sobre o plano cartesiano, onde os cálculos serão aplicados ao gráfico através do software matemático GeoGebra.

4.1.1. Mover

A ação de mover o objeto baseia-se no reconhecimento do toque na tela, associado ao movimento contínuo do dedo, até e que este se desprenda da tela. A cada movimento, um algoritmo interno calcula a diferença entre a posição inicial e a posição atual, a diferença encontrada é aplicada a todos os pontos do objeto usando a transformação linear translação, conforme mostra a Figura 5 que a tela foi movida para cima (eixo z) apenas uma posição.

Figura 5. Ação de mover objeto (translação)



Fonte: próprio autor

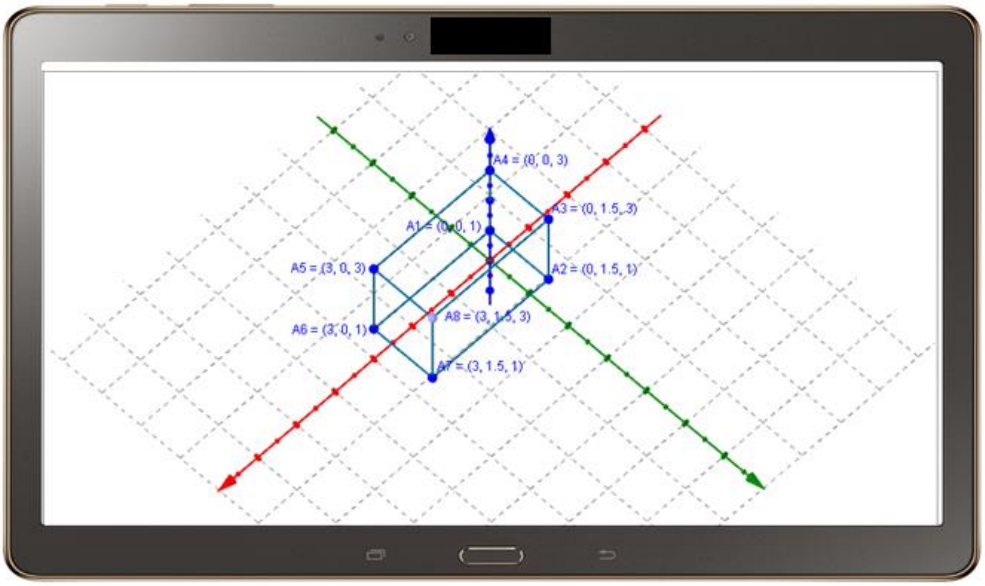
Então tem-se da posição inicial multiplicados pela matriz transformação:

$$P = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] . \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1{,}5 & 1{,}5 & 0 & 0 & 0 & 1{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1{,}5 & 1{,}5 & 0 & 0 & 0 & 1{,}5 & 1{,}5 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

E a matriz resultante obtêm os novos vértices como mostra a Figura 6.

Figura 6. Resultado da ação mover (translação)

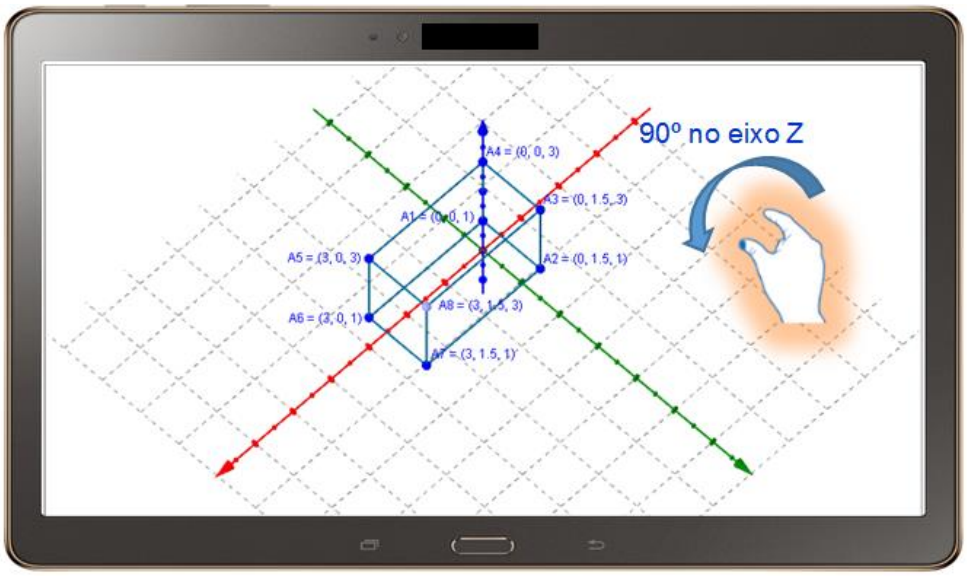


Fonte: próprio autor

4.1.2. Girar

A ação de girar o objeto baseia-se no reconhecimento do toque na tela por dois dedos, associado ao reconhecimento do movimento de rotação em qualquer direção, até que estes se desprendam da tela. Um algoritmo interno aplica a todos os pontos do objeto o ângulo formado pelo movimento usando a transformação linear rotação, conforme Figura 7.

Figura 7. Ação de girar o objeto (rotação)



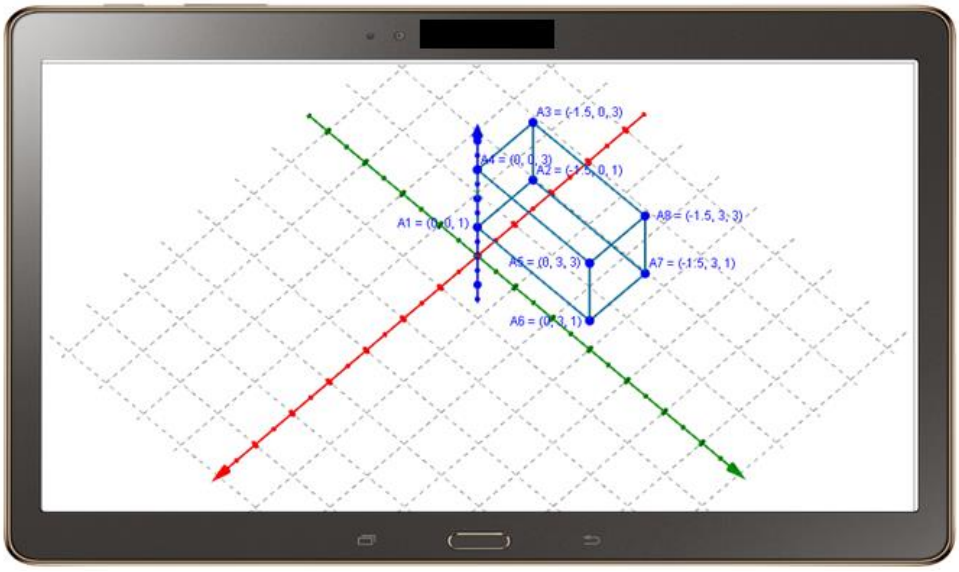
Fonte: próprio autor

No exemplo da Figura 7, supõe-se que houve o reconhecimento do ângulo de 90º graus de rotação no eixo z. A matriz resultante gera uma nova posição de vértices (ver Figura 8). Então tem-se os pontos da posição inicial multiplicados pela matriz transformação:

$$P = \begin{bmatrix} cos90° & -sen90° & 0 \\ sen90° & cos90° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1{,}5 & 1{,}5 & 0 & 0 & 0 & 1{,}5 & 1{,}5 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1{,}5 & -1{,}5 & 0 & 0 & 0 & -1{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Figura 8. Resultado da ação girar (rotação)



Fonte: próprio autor

4.1.3. Zoom

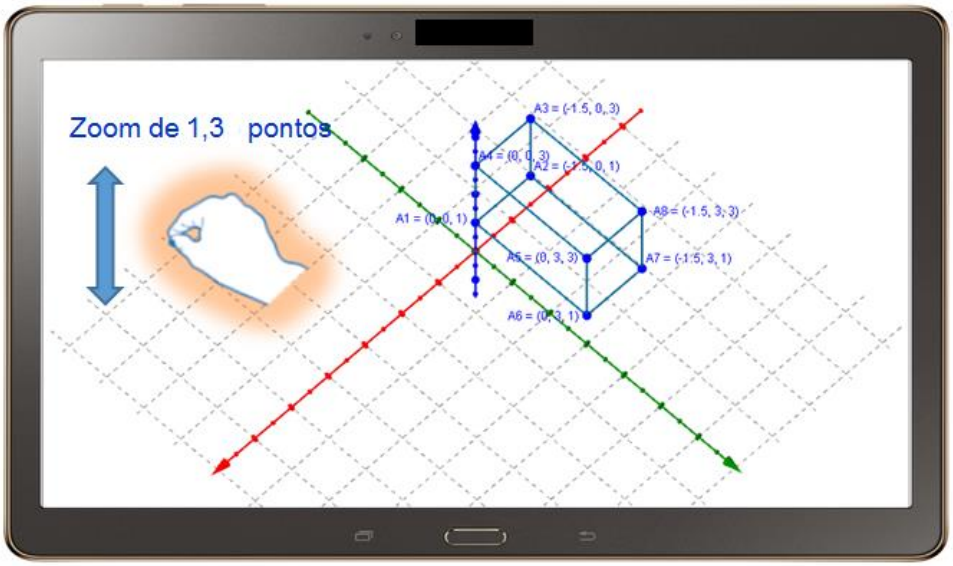
A ação de zoom no objeto baseia-se no reconhecimento do toque na tela por dois dedos, associado ao reconhecimento do movimento de distanciamento ou aproximação dos dois pontos originais (o que vai definir se é dilatação ou contração), até que estes se desprendam da tela. A cada movimento, um algoritmo interno aplica a diferença a todos os pontos do desenho na tela usando a transformação linear dilatação ou contração, conforme Figura 9.

No exemplo da Figura 9, supõem-se houve o reconhecimento de dilatação de 1,3 pontos. Então tem-se os pontos da posição inicial multiplicados pela matriz transformação:

$$P = \begin{bmatrix} 1{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1{,}5 & -1{,}5 & 0 & 0 & 0 & -1{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1{,}3 & 1{,}3 & 4 & 4 & 4 & 1{,}3 & 1{,}3 & 4 \end{bmatrix}$$

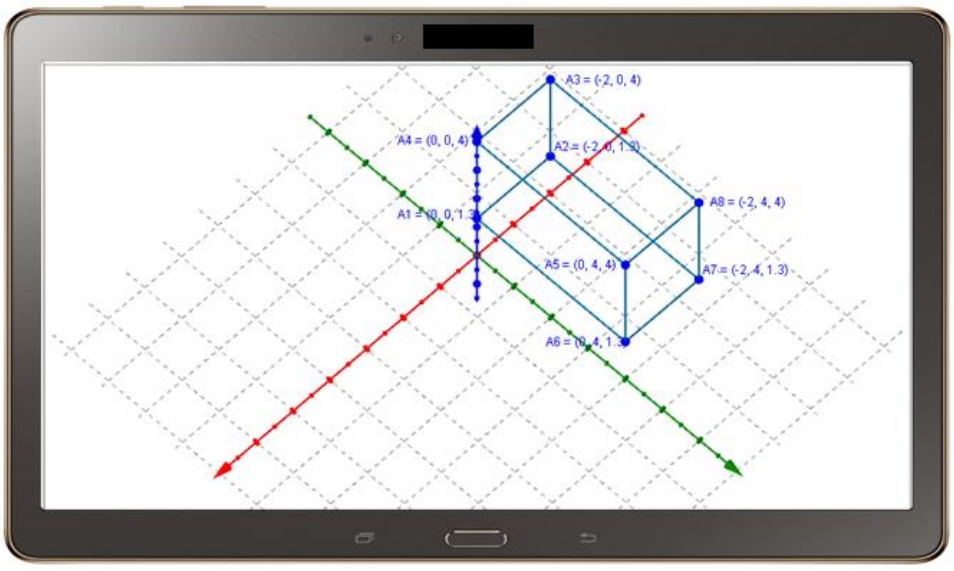
Figura 9. Ação de zoom no objeto (dilatação)



Fonte: próprio autor

Na Figura 10 mostra o resultado da matriz resultante P depois da dilatação.

Figura 10. Resultado do zoom aplicado ao objeto (dilatação)



Fonte: próprio autor

5. Considerações Finais

A partir dos exemplos apresentados neste artigo, pode-se compreender que o emprego das transformações lineares aplicado na computação gráfica está tão presente, principalmente nos dispositivos móveis onde os gráficos precisam ser cada vez melhores, que esta relação chega a estar implícita quando se trata de um ou de outro. Daí a oportunidade de usar esta associação como material didático no ensino deste assunto nas disciplinas que envolvem álgebra linear como uma abordagem diferenciada para atrair a atenção e o interesse dos estudantes de engenharia e ciência da computação.

Referências

ANTON, H.; RORRES, C. Álgebra Linear com Aplicações. Porto Alegre, Bookman, 2001.

CELESTINO, M. R. Ensino-aprendizagem da álgebra linear: as pesquisas brasileiras na década de 90. São Paulo, PUC, 2000.

CONCI, A.; AZEVEDO, E. Teoria da Computação Gráfica. Rio de Janeiro, Editora Campus, 2003.

GONÇALVES, H. S. A Importância das Matrizes e Transformações Lineares na Computação Gráfica. Dissertação de Mestrado em Matemática. Universidade Federal de Goiás. Goiânia, 2013.

STEINBRUCH, A; WINTERLE, P. Álgebra Linear. São Paulo, Pearson, 2013.