

AVALIAÇÃO DE UM ESTIMADOR DE ERRO A POSTERIORI FUNDAMENTADO EM RECUPERAÇÃO DE DESLOCAMENTOS APLICADO EM PROBLEMAS DE VIBRAÇÕES LIVRES

Fernanda Domingues Biagi ⁽¹⁾ (fernandabiagi@alunos.utfpr.edu.br), Jéderson da Silva ⁽¹⁾ (jedersonsilva@utfpr.edu.br), João Luiz do Vale ⁽¹⁾ (joaovale@utfpr.edu.br), Tiago Lima de Sousa ⁽²⁾ (tiago.sousa.eng@gmail.com)

⁽¹⁾ Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Londrina, Departamento Acadêmico de Engenharia Mecânica.

⁽²⁾ Universidade Federal de Pernambuco, Campus Recife, Departamento Acadêmico de Engenharia Mecânica.

RESUMO: A necessidade de minimizar vibrações indesejáveis em estruturas demonstra a importância do estudo desse assunto. Devido à complexidade desses sistemas e da ausência de soluções analíticas para o problema, o estudo e a aplicação de métodos numéricos de aproximação torna-se uma solução. O artigo aborda uma avaliação de um estimador de erro a posteriori baseado em recuperação de deslocamento axial que representa um modo de vibrar atrelado a uma dada frequência natural em um problema de uma barra engastada-livre, unidimensional e contínua analisada no contexto de vibração livre que possui solução analítica para validação. Para medir a qualidade do estimador, determina-se o índice de efetividade, sendo este global ou local, e também os parâmetros de média e desvio padrão em relação a unidade. Vale ressaltar que toda a implementação numérica do problema é feita no software Matlab®. As análises do estimador de erro mostraram que o erro por elemento aumenta à medida que há uma maior variação na solução. Ademais, os resultados obtidos mostram que há a possibilidade de utilizar as medidas de erros locais pois elas são superiores às do erro de frequência na ordem de aproximadamente 2,19, servindo como um guia seguro para um processo de refino adaptativo.

PALAVRAS-CHAVE: ELEMENTO FINITO, FREQUÊNCIA NATURAL, ÍNDICE DE EFETIVIDADE, MODO DE VIBRAR.

EVALUATION OF A POSTERIOR ERROR ESTIMATOR BASED ON RECOVERY OF DISPLACEMENTS APPLIED IN FREE VIBRATION PROBLEMS

ABSTRACT: The need to minimize unwanted vibrations in structures demonstrates the importance of studying this subject. Due to the complexity of these systems and the lack of analytical solutions to the problem, the study and application of numerical approximation methods become a solution. The article addresses an evaluation of a posteriori error estimator based on axial displacement recovery representing a mode of vibration associated with a given natural frequency in a problem of a clamped-free, one-dimensional, continuous bar analyzed in the context of free vibration which has an analytical solution for validation. To assess the quality of the estimator, the effectiveness index is determined, either globally or locally, as well as the mean and standard deviation parameters relative to unity. It is worth noting that all numerical implementation of the problem is carried out in Matlab® software. The analyses of the error estimator showed that the error per element increases as there is greater variation in the solution. Furthermore, the results obtained show that there is the possibility of using local error measures as they are superior to the frequency error by approximately 2.19 orders, serving as a reliable guide for an adaptive refinement process.

KEYWORDS: FINITE ELEMENT, NATURAL FREQUENCY, EFFECTIVENESS INDEX, VIBRATING MODE.

1. INTRODUÇÃO

Problemas envolvendo vibrações de sistemas ocorrem geralmente quando o modelo é retirado do equilíbrio estável (Hibbeler, 2011) e, estudar esse tópico com o intuito de analisar quando a frequência externa de excitação coincide com a frequência natural de vibração do sistema (Rao, 2009), ou seja, analisar o fenômeno da ressonância, é essencial para evitar amplitudes de oscilação significativas e potenciais falhas. A complexidade dos sistemas envolvendo vibrações mecânicas faz com que não haja a obtenção de soluções analíticas para a maioria das estruturas ou componentes mecânicos, exigindo assim a aplicação de métodos numéricos de aproximação. O intuito desses métodos é substituir os infinitos graus de liberdade do sistema por um número finito de variáveis a serem determinadas em um modelo discreto (Soriano, 2009).

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos métodos matemáticos utilizado na análise modal de problemas envolvendo vibrações, consistindo na subdivisão do domínio em elementos finitos acoplados por nós com o objetivo de obter uma solução aproximada por meio de uma forma integral e ponderada do problema original (Fish e Belytschko, 2009). Devido à natureza do método de aproximação é importante destacar a presença de erros associados a solução via método dos elementos finitos (Reddy, 2006).

Existem três categorias fundamentais de erros segundo Reddy (2006): erros numéricos e de quadratura que são resultantes do processo de integração numérica e dos arredondamentos; erros de aproximação de domínio; e erros de aproximação ou discretização. Como ênfase deste trabalho, os erros de aproximação surgem devido à limitação das funções estipuladas para representar a variação das grandezas a calcular.

No contexto de estimativas de erro na discretização associadas ao MEF é possível identificar duas categorias fundamentais: *a priori* e *a posteriori*. Ademais, quando o estimador de erro disponibiliza informações a respeito do comportamento do erro antes de se obter a solução aproximada é chamado de estimador de erro *a priori* (Gräsch e Bathe, 2005). Em contrapartida, um estimador que utiliza informações da própria solução aproximada para obter uma estimativa do erro, ou seja, utilizando valores quantitativos em uma malha específica é chamado de estimador de erro *a posteriori* (Babuska e Rheinboldt, 1978), sendo divididos em estimadores baseados em resíduo e baseados em recuperação.

Os estimadores de erro *a posteriori* baseados em recuperação são fundamentados na diferença entre os valores aproximados pelo MEF e os valores recuperados, os quais podem ser determinados por meio de vários métodos de recuperação como observado nos trabalhos de Zienkiewicz e Zhu (1992), Wiberg *et al.* (1994) e Huang e Yi (2010). O processo de recuperação ocorre por meio de um pós-processamento do gradiente da solução obtida pelo MEF visando aumentar o

grau de continuidade da equação (Ainsworth e Oden, 1997), permitindo assim estimar o erro ao comparar a solução aproximada com a recuperada.

Diversas metodologias foram desenvolvidas para a avaliação da solução recuperada, dentre eles o artigo se baseia na proposta de Zienkiewicz e Zhu (1992) traz uma abordagem chamada de *Superconvergent Patch Recovery* (SPR). Além disso, o artigo de Hager e Wiberg (1999) traz uma abordagem específica a partir do SPR, denominada *Superconvergent Patch Recovery Displacement* (SPRD), que explora um método de recuperação de deslocamentos utilizando padrões de elementos avaliando a super-convergência nos pontos nodais do domínio.

Ademais, ter uma avaliação quantitativa do erro em uma solução de elementos finitos é crucial para a tomada de decisões em um sistema mecânico. Dessa forma, o desenvolvimento e pesquisas de métodos de estimativas de erros assim como técnicas para manipulação de malha é essencial ao se tratar de um problema envolvendo o MEF, contribuindo assim para uma melhoria da qualidade da aproximação utilizada. Além disso, vale ressaltar que os trabalhos de Hager e Wiberg (1999), Wiberg *et al.* (1997) e Fuenmayor *et al.* (2001) trazem uma abordagem envolvendo estimadores de erro na frequência vinculados ao erro no modo de vibrar. No entanto, há uma lacuna na literatura em relação a uma discussão sobre a relação entre eles, o que é um tópico relevante, especialmente para explorar a possibilidade de utilizar informações locais em processos adaptativos para problemas de vibração.

O uso do refino adaptativo para a manipulação da malha com o intuito de melhorar a convergência dos erros na aproximação empregada (Amor-Martin e Garcia-Castilho, 2021), onde há a utilização de informações locais para a realização do refino. De acordo com Song *et al.* (2018), uma malha é composta por elementos não sobrepostos conectados por nós e a precisão da solução encontrada é determinada pelo erro local, o qual é estabelecido pela forma do elemento e seu tamanho. Para o refino adaptativo em uma solução via elementos finitos há diversas técnicas a saber (Zienkiewicz *et al.* 2000): refino *h*, onde há a alteração no tamanho e quantidade de elementos; refino *p* em que ocorre a modificação da ordem das funções de aproximação polinomial; o refino *r*, onde ocorre uma variação no tamanho e posição dos elementos, sem realizar alteração na sua quantidade de elementos; e os refinamentos onde há a combinação entre dois ou mais refinamentos adaptativos.

1.1 Objetivos

O corrente trabalho tem como objetivo analisar um estimador de erro *a posteriori* baseado em recuperação de deslocamento axial associado a um dado modo de vibrar vinculado, respectivamente, a sua frequência natural com o intuito de avaliar quantitativamente a qualidade global e local do estimador de erro em problemas unidimensionais de vibrações livres.

1.2 Justificativas

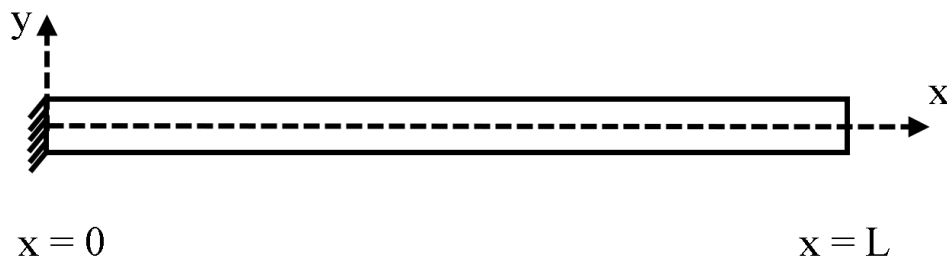
A escolha deste problema foi motivada pelo interesse de avaliar a efetividade do estimador de erro baseado em recuperação de deslocamento axial. O foco está na qualidade deste estimador, que fornece informações tanto do erro da frequência como do modo de vibrar. A análise visa aprimorar a compreensão do comportamento do erro local e a sua relação com os modos de vibrar, contribuindo para uma melhor precisão na solução do problema. Ademais, o estudo aprofundado desse estimador tem o intuito de compreender em detalhes o seu comportamento global e local para que, em um estudo futuro, seja aplicado o refino adaptativo de forma orientada.

2. METODOLOGIA

2.1 Análise modal para uma barra unidimensional engastada-livre

O problema de engenharia estudado consiste em uma barra engastada-livre, unidimensional e contínua analisada no contexto de vibração livre, demonstrado na Figura 1, em que a proposta é avaliar um estimador de erro *a posteriori* baseado em recuperação de deslocamento axial o qual representa um modo de vibrar atrelado a uma dada frequência natural.

FIGURA 1. Modelo de uma barra engastada-livre unidimensional contínua.



Fonte: Biagi *et al.* (2023).

A escolha do problema foi feita de forma que o mesmo possua solução analítica, dessa forma, as frequências naturais e os modos de vibrar são calculados, respectivamente, de acordo com Mendonça e Francello (2019), por:

$$\omega_i^A = \frac{(2i-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{e} \quad \phi_i^A = \sin\left(\left(\omega_i^A \sqrt{\frac{\rho}{E}}\right)x\right), \quad (1)$$

onde ω_i^A refere-se as frequências naturais analíticas e ϕ_i^A os respectivos modos de vibrar, L representa o comprimento da barra, E o módulo de elasticidade, ρ a densidade, x a posição uniaxial ao longo de toda a barra e $i \in \mathbb{N}^*$. Para o problema estudado de vibração livre não amortecido, utiliza-se a equação de movimento (Beer, 2012) dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

onde $\mathbf{u}(t)$ é o vetor deslocamento axial em função do tempo t , $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ o vetor de aceleração em função do tempo t , e $\mathbf{M}$ e $\mathbf{K}$ representam, respectivamente, a matriz de massa e de rigidez do sistema. Uma alternativa para encontrar soluções aproximadas seria através da utilização da análise modal via MEF, discretizando o domínio. Assim, adota-se a solução de um problema de autovalor e autovetor (Rao, 2009) para encontrar as frequências naturais e modos de vibrar do problema (Equação 3).

$$(\mathbf{K}_G + \lambda^M \mathbf{M}_G) \mathbf{U} = \mathbf{0}, \text{ com } \lambda^M = (\omega^M)^2, \quad (3)$$

em que λ^M é a matriz com os autovalores, que representam as frequências naturais ao quadrado, $\mathbf{U}$ é a matriz de autovetores que retratam os modos de vibrar associados a cada frequência e $\mathbf{M}_G$ e $\mathbf{K}_G$ representam, respectivamente, a matriz de massa e de rigidez global do sistema. Para resolver o problema de autovalor e autovetor apresentado na Equação 3, é necessário calcular as matrizes de massa e rigidez globais realizando uma superposição das matrizes de massa e rigidez de cada elemento, percorrendo todos os elementos contidos na malha (Fish e Belytschko, 2009), como mostrado na Equação 4. Assim sendo, a Equação 5 retrata como obter as matrizes elementares.

$$\mathbf{M}_G = \sum_{e=1}^{NEL} \mathbf{M}_e \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_G = \sum_{e=1}^{NEL} \mathbf{K}_e, \text{ em que:} \quad (4)$$

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega_e \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} (\mathbf{dN})^T \mathbf{A} \mathbf{E} (\mathbf{dN}) d\Omega_e. \quad (5)$$

Neste caso, o somatório representa uma superposição entre as matrizes, $\mathbf{N}$ que representa as funções de forma, $\mathbf{dN}$ as derivadas das funções de forma, A é a área elementar, Ω_e representa que

a integração é feita ao longo de todo o elemento, NEL representa o número de elementos, M_e e K_e são, respectivamente, as matrizes de massa e de rigidez do elemento.

2.2 Estimador de erro fundamentado em recuperação para obtenção do erro recuperado em uma dada frequência natural

Em um problema de vibração livre, sendo este unidimensional, é possível calcular uma i -ésima frequência natural analítica (ω_i^A). Considerando o contexto de soluções aproximadas, calcula-se também a i -ésima frequência natural aproximada via MEF (ω_i^M). Ademais, sabe-se que em muitos problemas de engenharia não se tem acesso a solução analítica e, sendo assim, é necessário calcular uma solução recuperada para o sistema, neste caso, uma i -ésima frequência natural recuperada (ω_i^*). Possuindo esses valores de frequências, é possível calcular o erro verdadeiro (Equação 6) e o erro recuperado (Equação 7).

$$\eta_{\omega}^A(\%) = \left(\frac{\omega_i^M - \omega_i^A}{\omega_i^A} \right) 100, \quad (6)$$

$$\eta_{\omega}^*(\%) = \left(\frac{\omega_i^M - \omega_i^*}{\omega_i^*} \right) 100. \quad (7)$$

Para encontrar os valores de frequência natural recuperada, utiliza-se do cálculo do coeficiente de Rayleigh posto como (Wiberg *et al.*, 1997):

$$\lambda_i^* = \frac{\int_{\Omega} (\nabla u_i^*)^T E A (\nabla u_i^*) d\Omega}{\int_{\Omega} (u_i^*)^T \rho (u_i^*) d\Omega}, \text{ com } \lambda_i^* = (\omega_i^*)^2, \quad (8)$$

onde λ_i^* representa o autovalor recuperado, u_i^* o respectivo modo de vibrar recuperado e ∇u_i^* o gradiente do modo de vibrar recuperado, definidos no domínio de cada elemento. A obtenção dos deslocamentos u_i^* para problemas planos de forma explícita é detalhada nos artigos de Wiberg *et al.* (1997), Hager e Wiberg (1999), Wiberg *et al.* (1999) e, para problemas unidimensionais, tem-se o artigo de Biagi *et al.* (2023).

2.3 Estimador de erro fundamentado em recuperação para obtenção do erro recuperado em um dado modo de vibrar

Para entender em detalhes o comportamento do estimador de erro é necessário realizar um estudo focado no erro recuperado em um dado modo de vibrar. A formulação apresentada abaixo é pautada nos artigos de Fuenmayor *et al.* (2001), Hager e Wiberg (2000) e Wiberg *et al.* (1999). Primeiramente tem-se o cálculo do erro relativo estimado (η_{ϕ}^*) e do erro relativo analítico (η_{ϕ}^A):

$$\eta_{\phi}^*(\%) = \left(\frac{\|\bar{e}\|^*}{\|\bar{u}\|^h} \right) 100 \text{ e} \quad (9)$$

$$\eta_{\phi}^A(\%) = \left(\frac{\|\bar{e}\|^A}{\|\bar{u}\|^A} \right) 100 . \quad (10)$$

Neste caso, $\|\bar{u}\|^h$ e $\|\bar{u}\|^A$ representam, respectivamente, a norma dos deslocamentos via MEF e analítico, e $\|\bar{e}\|^*$ e $\|\bar{e}\|^A$ representam as normas do erro em deslocamento via quadratura de Gauss da solução empregando MEF e da solução analítica, respectivamente. Sendo assim, o cálculo da norma dos deslocamentos (Equações 11 e 12) é tido como:

$$\|\bar{u}\|^h = \int_{\Omega} u^h d\Omega \text{ e} \quad (11)$$

$$\|\bar{u}\|^A = \int_{\Omega} u^A d\Omega , \quad (12)$$

onde u^h e u^A são, respectivamente, os deslocamentos obtidos via MEF e analítico. Ademais, a determinação das normas do erro da solução via MEF (Equação 13) e analítico (Equação 14) são dadas pelo somatório entre os erros elementares dos deslocamentos previamente calculados, como:

$$(\|\bar{e}\|^*)^2 = \sum_{e=1}^{NEL} (\|\bar{e}\|_e^*)^2 = \int_{\Omega} (u^* - u^h)^2 d\Omega , \quad (13)$$

$$(\|\bar{e}\|^A)^2 = \sum_{e=1}^{NEL} (\|\bar{e}\|_e^A)^2 = \int_{\Omega} (u^A - u^h)^2 d\Omega , \quad (14)$$

Além disso, vale destacar a importância da obtenção dos valores locais de erro na melhoria da eficiência e precisão de processos adaptativos. Esses valores oferecem uma compreensão detalhada sobre os erros em diferentes regiões do domínio e, ao identificar áreas com erros mais significativos, o refino do processo adaptativo pode ser feito de forma direcionada nessas regiões específicas. Sendo assim, os valores locais de erros servem como uma base sólida para orientar a adaptação da malha, sendo possível realizar um refino h-adaptativo como proposto nos artigos de Wiberg *et al.* (1999) e Hager e Wiberg (2000).

2.4 Parâmetros de qualidade dos estimadores de erro

Uma forma de mensurar a qualidade do estimador de erro é por meio da definição de alguns parâmetros. Primeiramente, é feito o cálculo do índice de efetividade global para as frequências (θ_i^ω) através da Equação 15 (Wiberg *et al.*, 1999).

$$\theta_i^\omega = \frac{\omega_i^M - \omega_i^*}{\omega_i^M - \omega_i^A} . \quad (15)$$

Neste caso, o índice θ_i^ω representa a razão entre o erro estimado e o erro verdadeiro para a frequência, onde ω_i^A refere-se à i-ésima frequência natural analítica, ω_i^M a i-ésima frequência natural aproximada e ω_i^* a i-ésima frequência natural recuperada. Outro parâmetro a ser analisado é o índice de efetividade global para um dado modo de vibrar (θ_i^ϕ) dado por:

$$\theta_i^\phi = \frac{\|\bar{e}\|^*}{\|\bar{e}\|^A} \quad (16)$$

Ademais, para esses valores de índice, a média ($\overline{\theta_i^\phi}$) e o desvio padrão em relação a unidade (D_i^ϕ) foram outros critérios empregados na avaliação da qualidade do estimador de erro. Tais valores são obtidos com o auxílio, sequencialmente com o auxílio das Equações 17 e 18.

$$\overline{\theta_i^\phi} = \frac{1}{NEL} \sum_{e=1}^{NEL} (\theta_i^\phi)_e , \quad (17)$$

$$D_i^\phi = \sqrt{\frac{1}{NEL} \sum_{e=1}^{NEL} \left((\theta_i^\phi)_e - 1 \right)^2}. \quad (18)$$

Sendo assim, para a média o comportamento esperado é de tender a unidade à medida em que se aumenta os graus de liberdade, já que está sendo avaliado os índices, os quais também devem tender a unidade. Além disso, o comportamento esperado do desvio padrão em relação à unidade é tender a zero, pois indica a precisão do estimador de erro, ou seja, quanto menor o desvio padrão, mais próximas as estimativas estão da unidade. Esses comportamentos são esperados pois indicam a qualidade do estimador de erro.

2.5 Experimentos numéricos

Neste problema, utilizou-se como parâmetros: área $A = 1 [m^2]$, comprimento $L = 1 [m]$, densidade $\rho = 1 [Kg/m^3]$, e módulo de elasticidade de $E = 1 [Pa]$. Ademais, vale ressaltar que todos os cálculos subsequentes são realizados utilizando o *software Matlab*®.

Primeiramente, por meio da Equação 1, é possível calcular de forma analítica todas as frequências naturais e modos de vibrar do sistema, seguindo uma abordagem semelhante adotada por Lima (2012) em seu estudo. Outra abordagem utilizada é via MEF, onde é empregada a análise modal para encontrar as frequências naturais e modos de vibrar aproximados. Para a análise via MEF, utiliza-se funções polinomiais lineares, onde há sempre dois nós por elemento. Ademais, será feito o estudo do estimador de erro via SPRD para calcular as frequências naturais e os modos de vibrar recuperados, sendo que a solução recuperada se torna polinomial quadrática, conforme mostrado no artigo de Wiberg *et al.* (1999).

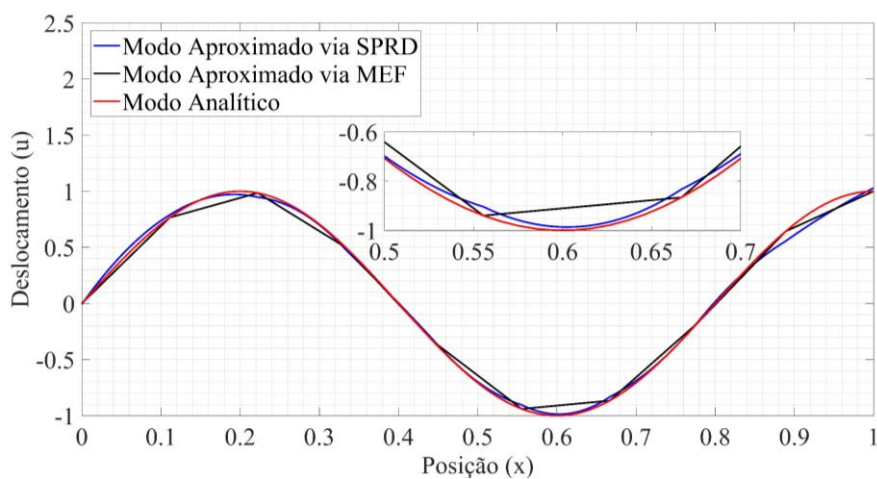
Em seguida, é elaborado um gráfico comparando o comportamento das três soluções: analítica, aproximada e recuperada, avaliando o mesmo modo de vibrar em uma mesma malha e, após isso, é feito uma análise do erro elementar do modo de vibrar escolhido. Posteriormente, é feita uma análise variando os graus de liberdade considerando diferentes malhas, avaliando o índice do modo de vibrar, a média, o desvio e a razão entre o erro recuperado do modo de vibrar pelo erro analítico da frequência. Por fim, obtém-se os valores do erro recuperado para as frequências e para os modos de vibrar onde será elaborado um gráfico com diferentes malhas variando os graus de liberdade avaliando também o índice de efetividade pela frequência através da Equação 15 e os valores do índice pelos modos de vibrar por meio da Equação 16.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1 Análise do estimador no modo de vibrar

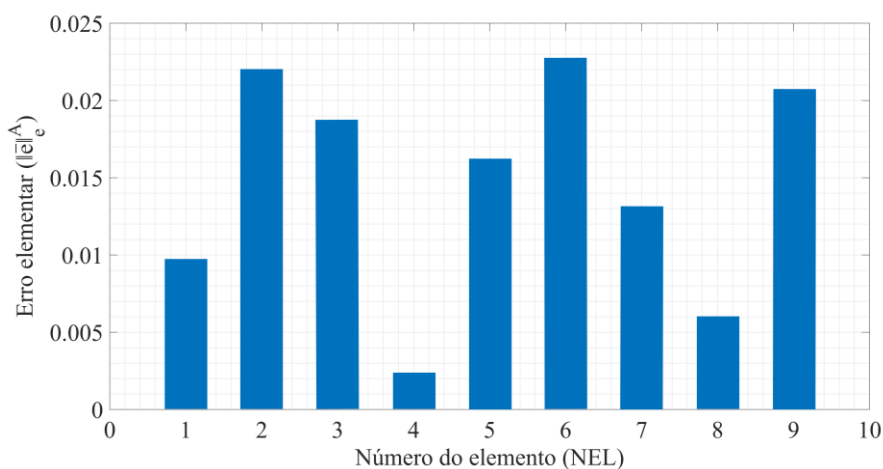
Com a análise das frequências naturais e seus respectivos modos de vibrar de forma analítica e via MEF, é feito o cálculo da solução via SPRD. Com as três soluções disponíveis, elabora-se a Figura 2a para comparar um modo de vibrar escolhido aleatoriamente, sendo o terceiro modo de vibração selecionado neste caso. Para uma visualização mais clara, optamos por uma malha com 9 elementos. Ademais, a Figura 2b apresenta o erro elementar do modo de vibrar por elemento.

FIGURA 2. Avaliação do terceiro modo de vibrar para uma malha com 9 elementos para: (a) Solução analítica, aproximada e recuperada via SPRD; (b) Erro elementar por posição.



(a)

Fonte: Biagi *et al.* (2023).

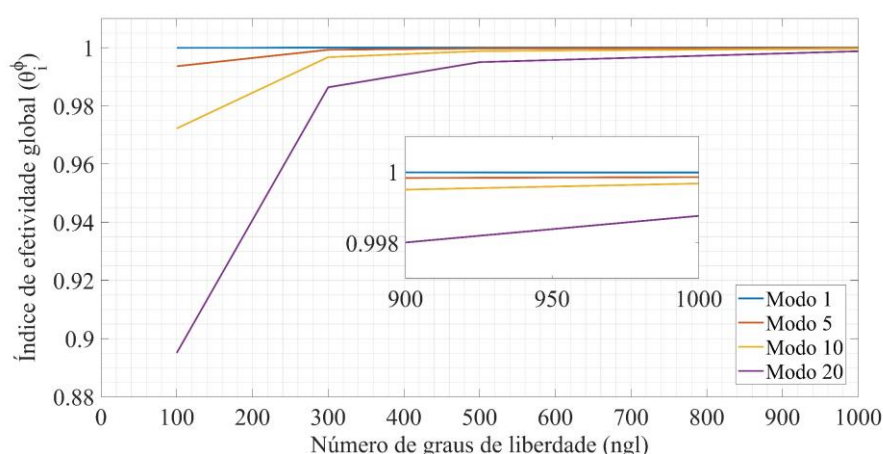


(b)

Fonte: Autores (2024).

A partir da Figura 2a é possível observar que a solução SPRD tem um melhor comportamento ao comparar com a solução via MEF, como pontuado nos trabalhos de Wiberg *et al.* (1999) e Hager e Wiberg (2000) para problemas bidimensionais e, em problemas unidimensionais, o trabalho de Biagi *et al.* (2023), os quais explicitam os detalhes desse comportamento. Observando a Figura 2b é possível ver que o valor do erro por elemento aumenta conforme há uma maior variação nas curvaturas da solução analisada. Com os valores dos erros de deslocamentos obtidos, calcula-se o índice de efetividade para o modo de vibrar considerando diferentes malhas e então é elaborada a Figura 3 mostrando esse comportamento.

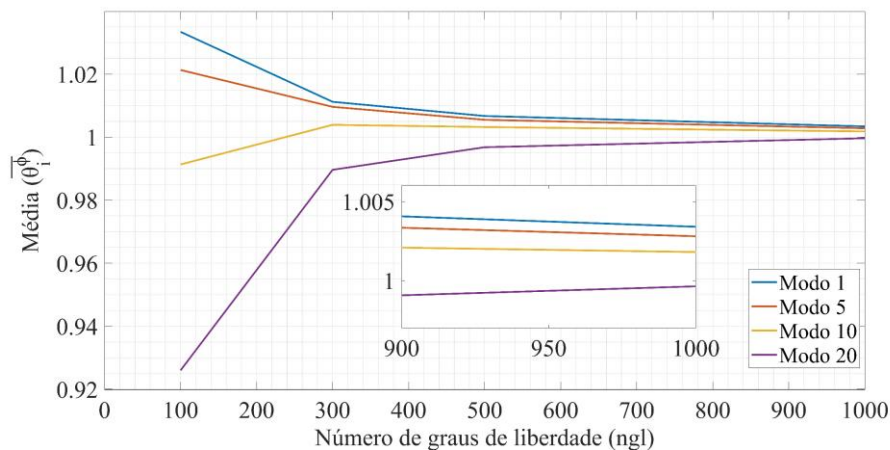
FIGURA 3. Avaliação do estimador de erro a posteriori baseado em recuperação de deslocamento axial em diferentes malhas considerando o índice de efetividade global.



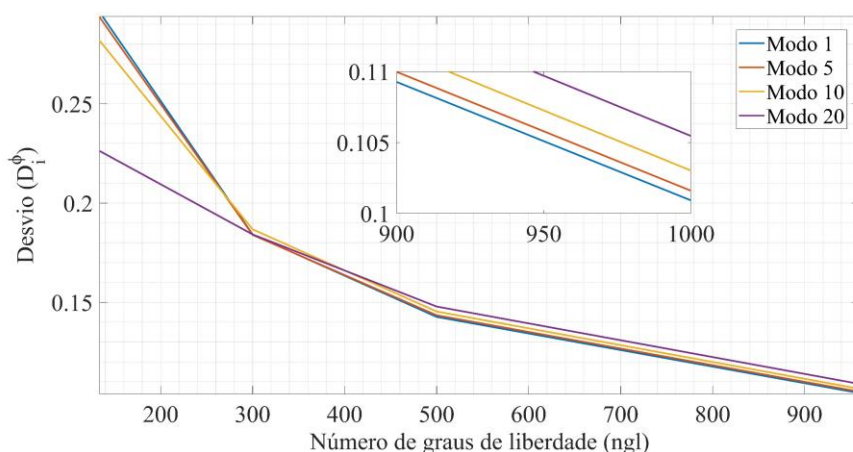
Fonte: Autores (2024).

Na Figura 3, estão apresentados os valores do índice de efetividade para os quatro modos de vibração: primeiro, quinto, décimo e vigésimo. Também é mostrada a variação desse índice conforme o número de elementos finitos aumenta. A escolha dos modos foi feita de forma arbitrária e nota-se que o comportamento monotônico crescente da técnica SPRD pontuado nos trabalhos de Biagi *et al.* (2023, p.11), Hager e Wiberg (1999, p. 449) e Wiberg *et al.* (1999, p. 86) é observado no gráfico acima, podendo constatar que o primeiro modo de vibração possui de fato o melhor erro recuperado dentre todo o espectro dos modos de vibrar. Para compreender melhor o comportamento dos modos de vibrar e sua influência nas soluções, elaborou-se a Figura 4 que avalia parâmetros como média dos valores dos índices obtidos, calculado através da Equação 17, e desvio padrão dos valores dos índices em relação a unidade, por meio da Equação 18.

FIGURA 4. Avaliação do estimador de erro baseado no modo de vibrar em diferentes malhas considerando os parâmetros: (a) Média; (b) Desvio.



(a)



(b)

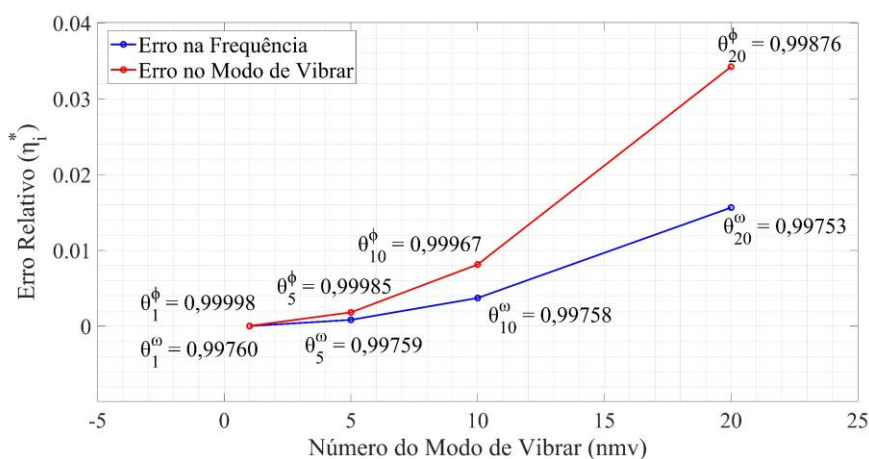
Fonte: Autores (2024).

A Figura 4a exibe a média dos valores calculados do índice para cada modo de vibração. Observa-se que, independentemente do modo de vibração em análise, à medida que o número de elementos aumenta, a média dos valores tende a se aproximar da unidade, assim como os próprios índices de efetividade. Na Figura 4b, observa-se que o desvio calculado tende a zero, como era esperado. Observando uma malha mais grosseira, nota-se que o desvio é maior para o primeiro modo e menor para o vigésimo modo e, ao analisar uma malha mais refinada é possível observar que o desvio padrão em relação a unidade se aproxima mais de zero. Isso ocorre devido ao fato de que o índice de efetividade tende a unidade a medida em que a malha é mais refinada, gerando valores menores de desvio padrão, tornando as estimativas de erro mais próximas da unidade.

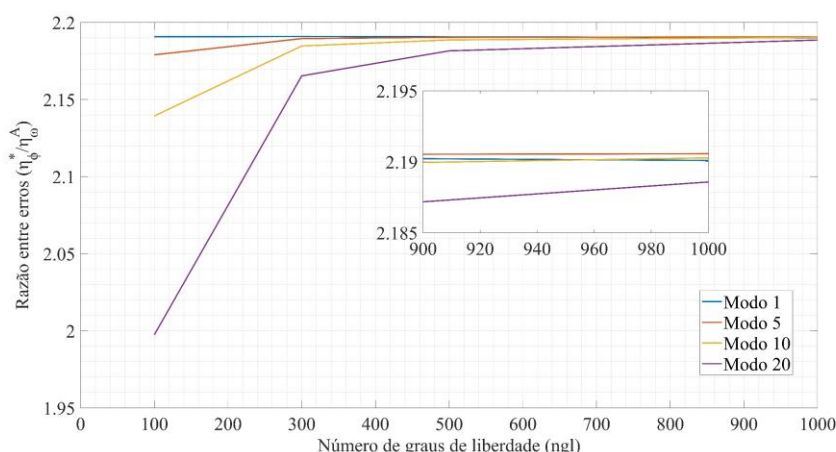
3.2 Comparação com os valores do estimador atrelados a frequência natural

Com todos os valores de erro recuperado, levando em consideração erro na frequência e no modo de vibrar, elaborou-se a Figura 5a com o intuito de comparar os erros tendo em vista os valores de índice de efetividade em ambos os casos. Ademais, a Figura 5b tem o objetivo de complementar essa análise ao observar o comportamento da razão entre os erros mostrados na Figura 5a, avaliados em diferentes malhas e diferentes modos de vibrar.

FIGURA 5. Avaliação do estimador de erro em diferentes malhas considerando: (a) Erro recuperado na frequência e no modo de vibrar considerando seus respectivos índices; (b) Razão entre o erro recuperado no modo de vibrar e o erro na frequência.



(a)



(b)

Fonte: Autores (2024).

Comparando os valores dos erros em cada modo da Figura 5a é possível observar que, à medida que vai aumentando o número do modo de vibrar, tanto o erro analítico da frequência quanto o erro recuperado do modo de vibrar aumentam e que, independentemente do modo analisado, o erro da frequência é sempre menor. Ao observar os valores dos índices na mesma figura nota-se que os índices do modo de vibrar se aproximam mais rapidamente da unidade ao comparar com os índices de frequência. Na Figura 5b, ao fazer a razão entre os valores dos erros, nota-se que esse valor tende a aproximadamente 2.19, ou seja, o erro recuperado no modo de vibrar tende a ser duas vezes maior do que o erro analítico da frequência. A partir disso, é possível deduzir que é viável utilizar as medidas de erro locais por elas serem superiores as de erro globais, atuando como um direcionamento confiável para um processo de refino adaptativo.

4. CONCLUSÕES

O presente trabalho constituiu-se na implementação matemática de um modelo de uma barra engastada-livre, unidimensional e contínua avaliada no contexto de vibração livre, com o intuito de determinar as frequências naturais e modos de vibrar do sistema por meio da análise de um estimador de erro a posteriori baseado em recuperação de deslocamento axial o qual representa um modo de vibrar atrelado a uma dada frequência natural.

Por meio das análises realizadas para o estimador de erro foi possível deduzir que o erro por elemento aumenta à medida que há um aumento na variação da curvatura da solução. Avaliando o índice de efetividade para o modo de vibrar, nota-se que os valores são bons e possuem a mesma tendência observada no comportamento do índice de efetividade para a frequência devido ao estimador de erro ter características não locais atreladas a cada elemento. Por fim, ao comparar ambos os índices de efetividade conclui-se que, em razão dos índices locais chegarem mais rápido a unidade que os índices globais, é possível analisar o problema considerando somente as informações de efetividade local.

Sendo assim, uma vez que foi possível estudar detalhadamente os modos de vibrar e seu comportamentos, uma análise subsequente abrangeria uma implementação do refino adaptativo com a finalidade de controlar e limitar os erros de aproximação do problema.

DECLARAÇÃO DE RESPONSABILIDADE

Os autores são os únicos responsáveis por este trabalho.

REFERÊNCIAS

AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. A posteriori error estimation in finite element analysis. Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, v. 142, p. 1-88, 1997.

AMOR-MARTIN, A. GARCIA-CASTILHO, L.E. Adaptive Semi-Structured Mesh Refinement Techniques for the Finite Element Method. Applied sciences. 2021, 11, 3683.

BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. Error estimates for adaptive finite element computations. SIAM Journal on Numerical Analysis, v. 18, p. 736-754, 1978.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R.; CORNWELL, P. J. Mecânica vetorial para engenheiros: Dinâmica. 9 ed. Porto Alegre, Brasil: AMGH Editora Ltda, 2012. ISBN 978-85-8055-144-0.

BIAGI, F. D.; VENTURA, B. P. J.; SILVA, J.; VALE, J. L.; Análise de erros de discretização em problemas unidimensionais de vibrações livres utilizando o método dos elementos finitos. Vitória – ES. 23º Congresso Internacional de Engenharia Mecânica e Industrial, 2023.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. Um Primeiro Curso em Elementos Finitos. Rio de Janeiro, Brasil: LTC, 2009. v. 1. ISBN 978-85-216-1701-3.

FUENMAYOR, F.J. RESTREPO, J.L. TARANCÓN, J.E. BAEZA L. Error estimation and h -adaptive refinement in the analysis of natural frequencies. Finite Elements in Analysis and Design, v. 38, p. 137-153, 2001.

GRÄTSCH, T.; BATHE, J. K. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. Computers and Structures, v. 83, p. 235-265, 2005.

HAGER, P.; WIBERG, N. Adaptive eigenfrequency analysis by superconvergent patch recovery. Computer methods in applied mechanics and engineering, v. 176, p. 441-462, 1999.

HAGER, P. WIBERG, N. Error estimation and h -adaptivity for eigenfrequency analysis of plates in bending: numerical results. Computer e structures, v. 78, p. 1-10, 2000.

HIBBELER, R. C. Dinâmica: Mecânica para Engenharia. 12. ed. São Paulo, Brasil: Pearson Prentice Hall, 2011. ISBN 978-85-7605-814-4.

HUANG, Y.; YI, N. The Superconvergent Cluster Recovery Method. Journal of Scientific Computing, vol. 44, pp. 301–322, 2010.

LIMA, R. Q. Análise de vibrações estocásticas em sistemas mecânicos. Dissertação em Engenharia Mecânica – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 148 p., 2012.

MENDONÇA, P.T.R.; FRANCELLO, E.A. O Método dos Elementos Finitos aplicado a Mecânica dos Sólidos. 1 ed. Santa Catarina, Brasil: Orsa Maggiore, 2019. ISBN 978-85-907153-1-3.

RAO, S. Vibrações Mecânicas. 4. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009. ISBN 978-85-7605-200-5.

REDDY, J. N. An introduction to the Finite Element Method. New York: 3. ed. Mc Graw Hill, 2006.

SONG, C. OOI, E. T. PRAMOD, A. L. N. NATARAJAN, S. A novel error indicator and an adaptive refinement technique using the scaled boundary finite element method. Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 94, p. 10-24, 2018.

SORIANO, H. L. Elementos Finitos: Formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas. [S. l.]: Ciência Moderna, 2009.

WIBERG, N. E.; ABDULWAHAB, F.; ZIUKAS, S. Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 37, pp. 3417–3440, 1994.

WIBERG, N.; ABDULWAHAB, F.; LI, X. D. Error estimation and adaptive procedures based on superconvergent patch recovery (SPR) techniques. Archives of computational methods in engineering, v. 4, p. 203-242, 1997.

WIBERG, N. BAUSYS, R. HAGER, P. Adaptive *h*-version eigenfrequency analysis. Computer e structures, v. 71, p. 565-584, 1999.

ZIENKIEWICZ, O.C. TAYLOR, R.L. ZHU, J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Oxford: 5 ed. Butterworth-Heinemann, 2000.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: the recovery technique. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33.1331–1364, 1992.