Modelagem e Linearização de um Sistema Calha-Bola para projeto de Controladores Digitais: PID e via Realimentação de Estados

Isabelle Caroline Sousa Gonçalves * **Igor Ribeiro Pereira** *
Gabriel Lopes dos Santos * **Micaellen Christie Cecilia Carvalho** *

* *Curso de Engenharia Mecatrônica, CEFET-MG, Campus Divinópolis, (e-mail: isabellecsg08@gmail.com, igoribeiro.275@gmail.com, gabriellopessantos21@gmail.com, mica.christie@hotmail.com).*

Resumo: Este trabalho descreve a modelagem e linearização de um sistema calha - bola utilizando MATLAB e Simulink. Foram projetados e comparados dois controladores digitais: um PID e outro baseado em espaço de estados. A análise quantitativa e qualitativa, utilizando índices de desempenho e especificações de projeto, mostrou que o controlador PID teve melhor atuação no processo, oferecendo respostas e desempenho superiores. Esses resultados destacam a eficácia do controlador PID para otimizar o sistema calha - bola

Palavras-chaves: Calha - bola, Projeto de controladores, PID, Realimentação de estados.

1. INTRODUÇÃO

Para o estudo e desenvolvimento do trabalho, buscou-se utilizar o sistema conhecido como calha-bola, conforme ilustrado na Figura 1.



Figura 1. Exemplar de um sistema Calha-Bola físico.

Este sistema visa equilibrar uma bola controlando sua posição ao longo da calha usando um atuador - um motor DC - que recebe sinais de um sensor de posição (da Silva Alves et al. (2020)). No entanto, foi constatado que o sistema é MIMO (Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas), o que significa que é necessário controlar simultaneamente a posição angular do motor e a posição linear da bola na calha. Partindo disso, focou apenas no controle da posição angular da barra da planta em estudo.

Os objetivos deste trabalho incluem apresentar a modelagem de caixa branca do sistema completo, em seguida realizar a linearização, determinar o período de amostragem e a discretização do sistema. Além disso, pretende-se realizar o projeto e a avaliação de dois controladores: o primeiro utilizando PID e o segundo utilizando realimentação de estados.

A organização do trabalho se encontra da seguinte forma: na Seção 2 está disposto uma revisão de métodos necessário pra o desenvolvimento do trabalho. Na Seção 3 está a descrição do modelo a ser analisado. Na Seção 4, apresenta os resultados e as devidas análises obtidas. Por fim, a Seção 5 apresenta a conclusão do trabalho.

2. PRELIMINARES

2.1 Modelagem do Atuador

Comumente utiliza como atuador do sistema, um motor CC, no qual também é conhecido como motor DC - *Direct Current Motor*. Sendo assim, sua modelagem dinâmica será fundamentada pelo circuito disposto na Figura 2.

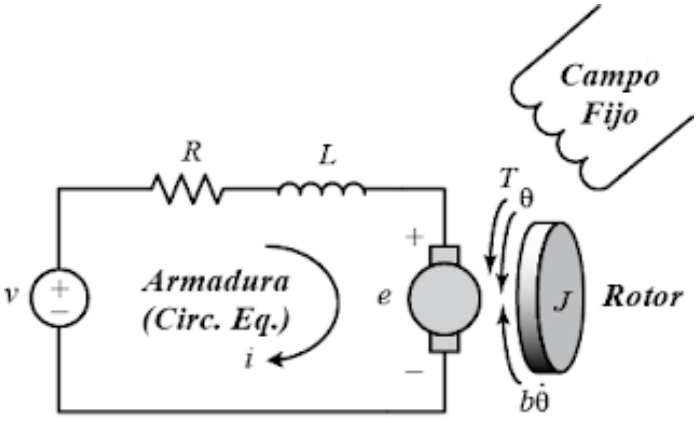


Figura 2. Circuito representativo de um motor DC.

Logo, baseado no circuito exemplificado, obtém-se o sistema de equações para o atuador:

$$\begin{cases} \tau_m = K_T \cdot i_a(t) \\ L\dfrac{di_a}{dt} + R_a \cdot i_a = v_{in} - \omega \cdot K_v \end{cases} \quad (1)$$

em que: τ_m é o torque do motor, K_T é uma constante de torque, L consiste na indutância do enrolamento de armadura, i_a é a corrente, R_a é a resistência, v_in é a tensão de armadura, ω consiste na velocidade angular e K_v é uma constante da força eletromotriz. Disso, ao substituir $v_{in} - \omega \cdot K_v$ por v_d e, aplicar a transformada de *Laplace* em (1), tem-se:

$$I_a = \frac{1}{sL + R_a} \cdot V_D. \quad (2)$$

2.2 Modelagem do torque da barra no atuador

O próximo passo busca obter a expressão que determina o torque gerado no eixo do atuador. Nesse sentido, foi utilizada a Figura 3 como auxílio.

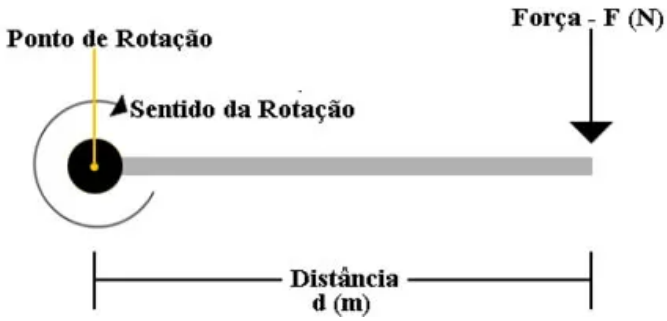


Figura 3. Representação do torque em uma barra dealgada.

Utilizado princípios de decomposição de forças no eixos x e y, tem-se:

$$\tau_{resl} = m_b \cdot g \cdot d \cdot cos(\theta); \quad (3)$$

em que, m_b é a massa da barra, g a aceleração da gravidade, d distância do centro de massa e θ posição da saída do atuador.

2.3 Modelagem do Sensor

Um sensor do tipo potenciômetro é usado para medir a posição angular da barra e enviar esse sinal ao controlador. Esse tipo de sensor consiste em circuitos que funcionam como resistores, mas variam sua resistência de acordo com certas propriedades químicas ou físicas.

Assim, tem-se que a resistência variável pode ser adquirida por: $R_v = \frac{2\rho}{A}X$. No qual $\frac{2\rho}{A}$ consiste em uma constante K_r e X a posição angular da barra. Ao aplicar o divisor de tensão nessa resistência, obtém-se a seguinte relação:

$$V_{in} = \frac{R_v}{R_f \cdot R_v} \cdot V_f, \quad (4)$$

em que: V_{in} é a tensão de saída, R_v é a resistência variável, R_f é a resistência fixa e V_f é a tensão de alimentação do potenciômetro. Por fim, após obter a equação que rege a dinâmica do sensor, realizou-se a correlação entre a posição da barra e a tensão medida pelo potenciômetro. Isso permitiu determinar a posição da barra com base na tensão registrada pelo potenciômetro. Na Figura 4, é possível observar como essa correlação foi realizada.

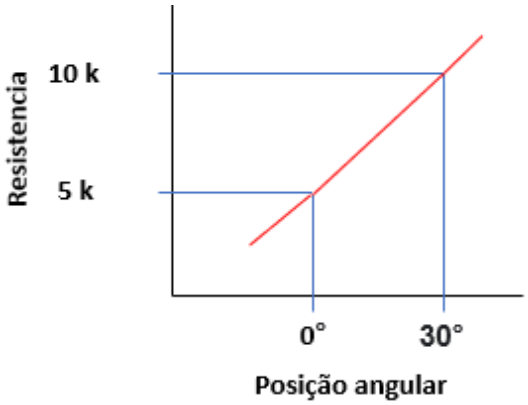


Figura 4. Proporcionalidade realizada.

Dessa forma, foram obtidos os coeficientes linear e angular da reta para serem utilizados no sensor. Por fim, o sensor foi calibrado de modo a captar ângulos positivos e negativos, garantindo assim sua operação adequada.

2.4 Taxa de amostragem

Ao- considerar um sistema de controle digital, tem-se que para o período de amostragem t_s, deve-se analisar as condições de limite inferior e superior, com o objetivo de realizar a seleção do valor. Para o limite inferior, na prática, $t_s \to 0$, porém, existem fatores que podem influenciá-lo e que estão relacionados ao *hardware*, sendo eles: tempo de processamento, o tempo de aquisição e o atraso na medição pelo sensor (Dantas et al. (2015)). Diante disso, para o limite superior, tem-se que a taxa de amostragem deve ser:

$$t_s < \frac{1}{f_s}, \quad (5)$$

em que f_s é a frequência de amostragem. Disso, de acordo com o *teorema da amostragem*, um sinal $Y(s)$ limitado em banda, deve ser amostrado com uma f_s satisfazendo a relação:

$$f_s > 2 \cdot f_d, \quad (6)$$

sendo f_d a frequência de *Nyquist*, no qual é a máxima frequência que pode ser codificada, de forma que o sinal $Y(s)$ possa ser reconstruído (Phillips et al. (2014)). Contudo, empiricamente, sugere-se, para obter a taxa de amostragem, que f_s seja determinada por:

$$f_s = 10 \cdot f_d. \quad (7)$$

Assim, existem métodos para determinar o valor adequado da frequência de amostragem f_s e, consequentemente, encontrar a taxa de amostragem t_s. Uma dessas maneiras, é o *Método dos Relés*, que consiste na utilização de "relés" em malha fechada com o objetivo de provocar oscilações limitadas e controladas no processo. Apartir disso, estimar sua resposta em frequência (Massa de Campos and

Teixeira (2008)). Disso, para a implementação, deve-se ter apenas uma base do ganho estático do processo:

$$u(t) = \begin{cases} +h, \text{ se } e(t) > 0, \\ -h, \text{ se } e(t) \leq 0, \end{cases} \tag{8}$$

em que $\pm h$ é o relé e $e(t)$ é o erro, sendo que esse último tem suas condições utilizadas de acordo em como ele está definido e se a ação é indireta ou direta.

2.5 Controlador PID

O controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo) atua via o cálculo do "erro" entre a variável controlada e o "*setpoint*",sendo assim, em função do *erro*, cria um sinal de controle com o objetivo de eliminar o desvio (Alpi (2019)). Nesse sentido, para a implementação de um PID digital (Fetter (2010)), tem-se que ele possui uma estrutura como é apresentada:

$$C(z) = K_p + C_i(z) + C_d(z). \tag{9}$$

Assim, dependendo da aproximação utilizada para integral e a derivada, $c_i(z)$ e $c_d(z)$ podem assumir distintas formas. Logo, utilizando analogamente ao controlador PD a aproximação ***Backward differences***, tem-se:

$$c(z) = K_p(1 + \frac{1}{\tau_i} + \tau_d) \tag{10}$$

em que: K_p é o ganho proporcional, $C_i(z)$ e $C_d(z)$ estão relacionados aos parâmetros para o termo integral e derivativo, respectivamente. Desse modo, pode-se realizar a aproximação para a parte integral e derivativa de diversas maneiras, sendo que uma delas é a aproximação***Backward differences***. Logo, tem-se:

$$C_i(z) = K_p \frac{z}{\tau_i(z-1)} \text{ com } \tau_i = \frac{T_i}{T_s}, \tag{11}$$

$$C_d(z) = K_p \tau_d \frac{z-1}{z} \text{ com } \tau_d = \frac{T_d}{T_s}, \tag{12}$$

sendo: T_s o período de amostragem, T_i e T_d são os tempos integrativo e derivativo, respectivamente. Logo, substituindo as equações (11) e (12) em (10), constata-se que a função do controlador PID via aproximação bilinear é dada por:

$$C(z) = K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i} + \tau_d\right) \frac{z^2 + \frac{1+2\tau_d}{1+\frac{1}{\tau_i}+\tau_d} z + \frac{\tau_d}{1+\frac{1}{\tau_i}+\tau_d}}{z(z-1)} \tag{13}$$

Ao analisar a equação (13), tem-se que a função de transferência do controlador possui um polo em $z = 1$ e outro polo em $z = 0$, além de dois zeros reais ou complexos dentro do círculo unitário.

2.6 Controlador digital via Espaço de Estados

Sabe-se que se um sistema de tempo discreto é linear e invariante no tempo, ele pode ser representado por uma função de transferência (Ogata (1982)). A equação que descreve o estado de um sistema em qualquer tempo $(k+1)$ é dado pela relação:

$$x(k+1) = f[x(k), u(k)], \tag{14}$$

em que o estado x no tempo $(k+1)$ é uma função do estado e da entrada ao incremento $k = kT$ do tempo discreto prévio. Dessa forma, o vetor de estados $x(k)$ e de entrada $u(k)$ são descritos como:

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}, \quad u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_r(k) \end{bmatrix}.$$

Além disso, a saída do sistema é dada por:

$$y(k) = g[x(k), u(k)], \tag{15}$$

sendo o vetor de saída $y(k)$ representado por:

$$y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_p(k) \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Portanto, considerando que o sistema é linear e invariante no tempo, as equações (14) e (15) podem ser reduzidas para:

$$x(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k), \tag{17}$$

$$y(k) = \mathbf{C}x(k) + \mathbf{D}u(k). \tag{18}$$

nos quais as matrizes A, B, C e D possuem as respectivas dimensões: $n \times n$, $n \times r$, $p \times n$ e $p \times r$.

2.7 Índices de desempenho

Como método de avaliação complementar de desempenho das malhas de controle obtidas via o modelo de controlador polinomial e pelo lugar geométrico das raízes, faz-se uso dos mais variados índices de desempenho existentes, no qual se pode citar: o ITAE, IVU, IAE, ITSE e o RMSE

Esses índices de desempenho devem ser selecionados e avaliados sobre janelas temporais fixas e, sendo assim, só fazem sentido via avaliação comparativa (Scheibler and Gabe (2020)). Além disso, precisam ser avaliados de acordo com os objetivos de controle, investigando o comportamento de malha fechada para entradas padronizadas de referência, pertubação e ruído. Diante disso, pretende-se realizar os cálculos do indicie IAE e RMSE, respectivamente, para ambos os controladores obtidos, visando-se sua posterior comparação e análise.

2.8 Índice IAE

O índice de desempenho IAE (*Integral Absolute Error*), é calculado via a integral do módulo do erro atuante Nise (2011). Nota-se que este tipo de índice não adiciona qualquer tipo de peso ao erro citado, a vista disso, é pertinente afirmar que ele beneficia de maneira equitativa o erro atuante no transitório e em regime permanente. Logo, o IAE se dá por:

$$IAE = \int |e(t)|dt. \tag{19}$$

2.9 Índice RMSE

O índice de desempenho RMSE (*Root Mean Square Error*), no qual consiste na medida que calcula à raiz quadrática média dos erros entre valores observados e predições (Nise (2011)). Dessa maneira, interpreta-se seu valor como uma medida do desvio médio entre o valor observado e predito. Dessa forma, ele é dado por:

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(\widehat{u}_i - u_i)^2}{N}}, \tag{20}$$

em que $\widehat{u}$ é o valor predito, u_i são os valores observados e N é o número de observações que, refere-se à janela de avaliação dividida pelo período de amostragem, T_s.

3. DESENVOLVIMENTO

Dessa forma, após realizar todas as modelagens utilizando os *softwares* MATLAB e *Simulink*. Obteve-se como resultado final, o diagrama de blocos da Figura 5

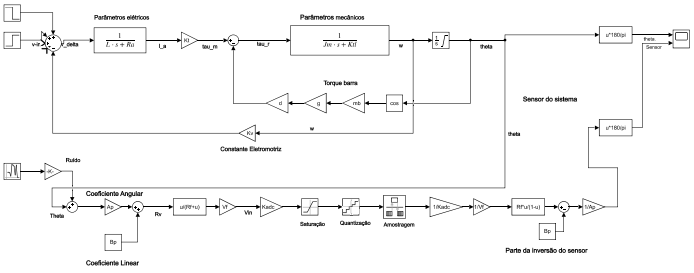


Figura 5. Diagrama de bloco do sistema completo.

Além disso, na Tabela 1, encontra-se os valores para cada parâmetro do sistema.

Tabela 1. Valores referente a cada parâmetro presente no sistema.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa da motor $[kg]$	ms	0.200
Massa da barra $[kg]$	mb	0.03
A celeração da gravidade $[m/s^2]$	g	9.81
Constante da força eletromotriz	K_v	0.9
Indutância do enrolamento de armadura [H]	L	0.5
Resistência de armadura $[\Omega]$	R_a	1
Constante de torque $[N \cdot m/A]$	K_t	0.9
Raio do motor $[m]$	r_m	0.04
Momento de inércia do motor $[kg \cdot m^2]$	J_m	$2.4{\cdot}10^{-2}$
Ganho do atrito resultante	K_t	0.12
Ganho do sensor	K_r	9.79
Tensão de alimentação do sensor $[V]$	V_f	5
Número de bits do microcontrolador	n	10
Ganho do microcontrolador	K_{adc}	204.8
Resistência máxima fixa do sensor $[k\Omega]$	R_f	10
Coeficiente angular	A_p	9549.30
Coeficiente linear	B_p	5000
Distância do centro de massa $[m]$	d	0.25

3.1 Linearização e discretização do sistema

Em sequência, usufruiu-se dos comandos *trim* e *linmod* para obter os pontos de ajuste do sistema dinâmico, bem como obter o modelo linear em tempo contínuo via espaço de estados em torno do ponto de operação. Para isso, determinou-se que o ponto de operação seria em 15°. Para alcançá-lo, aplica-se uma tensão de entrada de aproximadamente 2.256. V. Assim, o modelo linearizado em espaço de estados é caracterizado por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.0002 & 0.0073 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0085 & 0.0076 \\ 0 & 0.0445 & 0.7044 & 0.0002 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9794 & 1.7628 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0072 & 0.9799 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.0076 \\ 0.0085 \end{bmatrix}, \; C = [1\ 0\ 0\ 0\ 0] \text{ e } D = [0].$$

Por conseguinte, objetivou-se representar o sistema via função transferência $G(s)$, através da transformada de *Laplace* que relaciona a entrada e a saída do processo. Nesse sentido, tem-se que:

$$G(s) = \frac{11250}{s^3 + 752s^2 + 1.151s - 238}. \tag{22}$$

Ao analisar a equação (22), percebe-se que o sistema é instável e pode ser considerado marginalmente estável em malha fechada. Nesse contexto, buscou-se estabelecer o tempo de amostragem apropriado. Para isso, utilizou-se o método do relé, uma vez que o sistema é considerado instável. Esse método consiste em limitar a saída do sistema em uma faixa de valores, tornando-a oscilatória em torno de um ponto de operação desejado. O ponto de operação foi definido como 15°, alcançado com uma entrada de 2.256 V. Portanto, fixou-se a entrada em -2 V ou 6 V. O valor de -2 V foi aplicado quando a diferença entre o ponto de operação e a saída do sistema é negativa, ou seja, quando o deslocamento angular é superior ao ponto de operação. Já o valor de 6 V foi aplicado quando essa diferença é positiva. Por fim, a curva de resposta do sistema para esse procedimento é disposta na Figura 6.

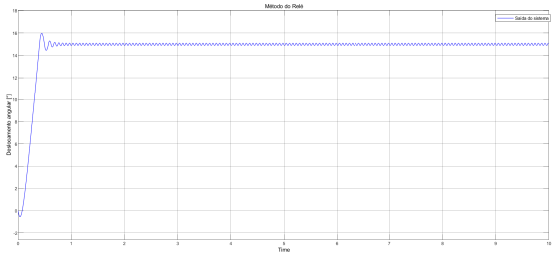


Figura 6. Aplicação do método do relé no sistema.

Ao observar o gráfico disposto na Figura 6, tem-se que $T = 0.5998$ s, consequentemente, $f_c = 1.6667$ Hz. Nesse sentido, de maneira empírica, tem-se que o período de amostragem Ts pode ser obtido por:

$$Ts = \frac{1}{f_c \cdot 10} = \frac{1}{1.6667 \cdot 10} \cong 0.06 \ s. \tag{23}$$

Com o período de amostragem t_s= 0.6 s juntamente com (22), buscou-se obter a função discretizada do sistema. Logo, foi utilizado o comando *c2d* presente no *software* MATLAB.

$$G(z) = \frac{0.0198z^2 + 0.01588z + 1.127 \cdot 10^{-5}}{z^3 - 1.392z^2 + 0.3916z} \tag{24}$$

3.2 Determinação dos polos dominantes para o projeto de controladores

Uma vez que o sistema em malha aberta é tido como instável, buscou-se obter critérios de desempenho para que o o processo operasse em malha fechada junto aos controladores. Nesse sentido, a fim de conseguir melhoria de resposta do sistema em malha aberta, determinou-se um sobressinal máximo em $OS_{\%} = 30\%$ e um tempo de acomodação $t_s = 3\ s$.

Para o projeto de controlador via abordagem polinomial, inicialmente calculou os polos dominantes da malha fechada correspondentes às especificações de desempenho desejadas. Para isso, encontrou-se os novos valores para o coeficiente de amortecimento, ξ, e para a frequência natural, ω_n, da malha fechada, sendo eles:

$$\xi = \frac{-ln(OS_{\%})}{\sqrt{\pi^2 + ln^2(OS_{\%})}} = 0.3579, \tag{25}$$

$$\omega_n = \frac{4}{\xi t_s} = 3.7259. \tag{26}$$

Portanto, tem-se que os polos dominantes são:

$$S_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -1.33 \pm 3.479j. \tag{27}$$

Disso, foi preciso realizar o mapeamento dos polos do plano s para o plano z, sendo que se utilizou a relação:

$$Z = e^{sT} = e^{(\sigma \pm j\omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T}, \tag{28}$$

em que: σ é a parte real, $j\omega$ é a parte imaginária e T é o período de amostragem. Substituindo os valores dos polos encontrados em $S_{1,2}$, e o tempo de amostragem dado por $Ts = 0.06\ s$ na equação (5), obteve-se:

$$Z_{1,2} = 0.9231 \pm 0.1913j. \tag{29}$$

3.3 Projeto do controlador PID

O primeiro passo do projeto do controlador PID consiste em atribuir os parâmeros desejados para o sistema. Assim, estabeleceu $Os\% = 30$ e $ts = 3s.$, bem como utilizou os polos dominantes em malha fechadas dispostos em (27). 0 próximo passo consiste na alocação dos polos nos quais, para a aproximação bilinear, são posicionados em $z = -1$ e $z = 1$. Sendo assim, o controlador PID possui dois zeros, logo, resta estabelecer os zeros de forma a obter uma resposta de malha fechada desejada, ou seja, melhorar os parâmetros de malha aberta. A partir disso, realizando ajustes na posição dos zeros e do ganho através da ferramenta *root locus editor*, chegou-se às posições $z = 1$ para cancelar um polo presente no sistema, além de um zero em $z = 0.1654$. Com um ganho $K = 3.1458$, resultou na seguinte função de transferência para o controlador:

$$C(z) = \frac{3.1458z^2 - 3.6612z + 0.520315}{z^2 - z}. \tag{30}$$

Logo, buscou-se adquirir os parâmetros K_p, K_d e K_i para o controlador projetado, no qual para isso usou o comando *PID* do *Software* MATLAB. Os parâmetros podem ser observado pela Tabela 2.

Tabela 2. Parâmetros K_p, K_d, K_i e T_s para ambos os controladores.

Controlador	K_p	K_d	K_i	T_s
PID	3.82	0.0453	-0.0000667	0.06

Para que pudesse implementar os parâmetros na malha de controle, implementou-se um algorítimo via equação a diferença, com base na aproximação ***Backward differences***, podendo ser observado pela Figura 7.

```
function u = fcn(e)
persistent ea; %Criação das variáveis persistentes.
persistent ui;

Kp = 3.82;          %Ganho proporcional.
Ki = -0.0000667;    %Ganho integrativo.
Kd = 0.0453;        %Ganho derivativo.
Ts = 0.06;          %Tempo de amostragem.

if (isempty(ui))    %Condições iniciais.
    ea = 0;
    ui = 0;
end

up = Kp*e;      %Equações à diferença.
dui = Ki*Ts*e;
ud = (Kd/Ts)*(e - ea);

u = up + ud + ui + dui;  %Sinal de controle.
ea = e;
if (u < 5 && u > 0)  %Filtro anti-windup.
    ui = ui + dui;
end
```

Figura 7. Código referente à implantação da equação à diferença para o controlador PID.

Pela Figura 8 , pode-se observar a malha de controle referente ao compensador PID.

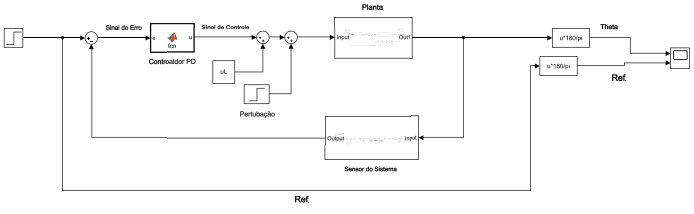


Figura 8. Malha de controle para o compensador PID.

3.4 Projeto de Controlador via Espaço de estados

Inicialmente, utilizou-se a representação de estados disposta em (21). Como o controlador a ser projetado era no domínio discreto, realizou a discretização das matrizes, obtendo:

$$Ad = \begin{bmatrix} 0.725 & -2.338 & 1.5 \cdot 10^{-5} \\ 0.052 & 0.926 & 4.8 \cdot 10^{-7} \\ 0.002 & 0.058 & 1 \end{bmatrix}; Bd = \begin{bmatrix} 0.05215 \\ 0.00165 \\ 3.375 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix};$$
$$Cd = [0\ 0\ 45.33]; Dd = [0]; \quad (31)$$

Desse modo, como será acrescida um integrador na malha de controle, se fez necessário encontrar as matrizes A e B aumentadas, sendo elas:

$$Ad_{aum} = \begin{bmatrix} Ad & 0 \\ -Cd \cdot Ad & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.725 & -2.338 & 1.5 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0.052 & 0.926 & 4.8 \cdot 10^{-7} & 0 \\ 0.002 & 0.058 & 1 & 0 \\ -0.075 & -2.651 & 45.326 & 1 \end{bmatrix}; \quad (32)$$

$$Bd_{aum} = \begin{bmatrix} Bd \\ -Cd \cdot Bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0521 \\ 0.0016 \\ 0 \\ -0.0015 \end{bmatrix}; \quad (33)$$

Logo, verificou-se a controlabilidade do sistema em estudo através dos comandos *ctrb* e *rank* do MATLAB, sendo um o comando para encontrar a matriz de controlabilidade e o outro para calcular o posto da matriz em questão, respectivamente. Com isso, com o fornecimento das matrizes Ad_{aum} e Bd_{aum}, adquiriu-se:

$$Cm = \begin{bmatrix} 0.0521 & 0.0340 & 0.0147 & -0.0026 \\ 0.0016 & 0.0042 & 0.0057 & 0.0061 \\ 0 & 0.00090.0005 & 0.0009 & 0.0053 \\ -0.0015 & -0.0113 & -0.0349 & -0.0747 \end{bmatrix}, \quad (34)$$

Nota-se que (34) possui posto 4, portanto, determina-se que o sistema é controlável. Nesse sentido, para que o sistema atue em malha fechada, estabeleceu-se os critérios e especificações de desempenho para esse modo de operação. Logo, estipulou os mesmos critérios que foram utilizados para o controlador PID, ou seja, um sobressinal máximo em $OS_{\%} = 30\%$ e um tempo de acomodação $t_s = 3\ s$. Dessa maneira os polos desejáveis para a malha fechada no domínio discreto se encontra disposto em (13). Adiante, como o sistema é de ordem 3 e haverá o acréscimo do integrador, será preciso utilizar 4 polos. Dessa forma, é necessário acrescer mais dois polos que não interferirão na dinâmica do sistema. Assim, eles foram posicionados em: $z_3 = 0.1353$ e $z_4 = 0.1225$, de modo que a parte real seja pelo menos dez vezes maior comparado ao polos dominantes. A partir disso, obteve-se o vetor P:

$$P = \begin{bmatrix} 0.9231 + 0.1913j & 0.9231 - 0.1913j & 0.1353 & 0.1225 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

Adiante, utilizou-se o comando *place* para encontrar K, resultando em:

$$K = [21.2679\ 230.0889\ 613.5010\ -0.8891], \quad (36)$$

Sabendo que $K = [Kp\ \ -Ka]$, em que Kp é a matriz 3×1 do ganho e Ka é o ganho do integrador, tem-se:

$$Kp = [21.2679\ 230.0889\ 613.5010], \quad (37)$$
$$Ka = 0.8891. \quad (38)$$

3.5 Projeto do observador

O próximo passo consiste no projeto do observador. Inicialmente verificou a observabilidade do sistema através dos comandos *obsv* e *rank* do MATLAB, no qual o primeiro se refere em encontrar a matriz de controlabilidade e o segundo para calcular o posto dessa mesma matriz. Com isso, fornecendo as matrizes A e C, resultou em:

$$Om = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 45.3260 \\ 0.0747 & 2.6510 & 45.3260 \\ 0.2671 & 4.9317 & 45.3260 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

Assim, observa-se que possui posto 3. Portanto, concluiu-se que o sistema é observável. Nesse sentido, propôs um vetor Pe para o observador, contendo seus autovalores. Disso, especifica-se para o observador um comportamento com autovalores dez vezes mais rápidos que os da malha fechada, resultando em: $\lambda_1 = 0.21$, $\lambda_2 = 0.22$ e $\lambda_3 = 0.23$:

$$Pe = [0.21\ 0.22\ 0.23]. \quad (40)$$

Em seguida, sabendo que λ_1, λ_2 e λ_3 são autovalores de $(Ad - Ke \cdot Cd)$, utilizou-se do comando *place* para encontrar Ke:

$$Ke = [-0.6374\ 0.1714\ 0.0314]. \quad (41)$$

O diagrama de blocos da malha de controle pode ser visto na Figura 9.

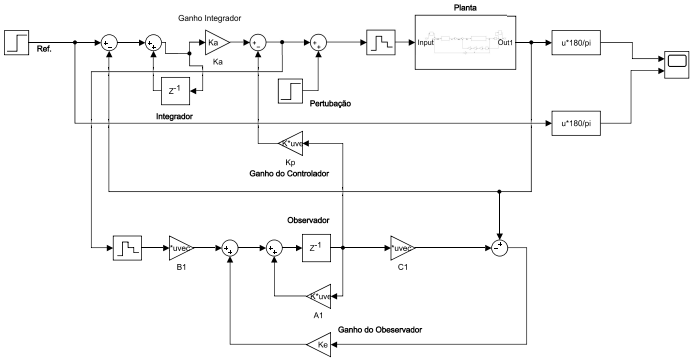


Figura 9. Diagrama de blocos da malha fechada com observador.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Primeiramente, obteve-se a simulação do sistema apresentado na Figura 5. Nesse sentido, atribuiu-se a referência de 15°, com o propósito de verificar a estabilidade do sistema. Pela Figura 10, pode-se analisar a simulação.

Nota-se que o sistema não segue a referência adotada e acaba extrapolando, bem como saturando em 30°, em razão do limite de saturação imposto no integrador. Portanto, confirma-se que o sistema em estudo é instável em malha aberta. Adiante, também procurou validar o modelo

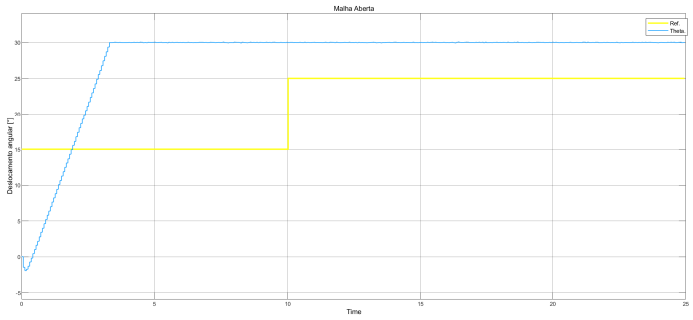


Figura 10. Validação do sistema não linear em malha aberta.

linear discreto, com o objetivo de realizar a comparação com a validação do modelo não linear. Por conseguinte, na Figura 11, encontra-se a validação.

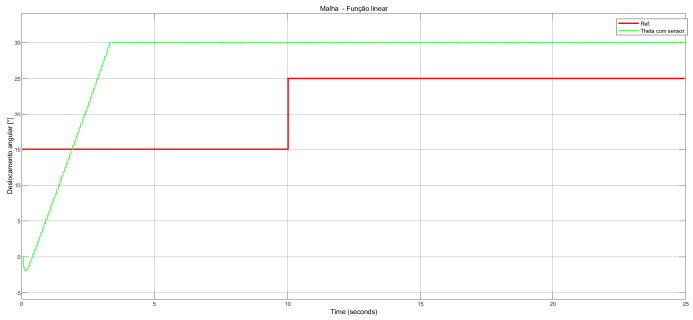


Figura 11. Validação do sistema linear em malha aberta.

Observa-se que o comportamento da curva foi análogo ao do modelo não linear. Assim, mais uma vez constata a instabilidade do sistema em malha aberta.

4.1 Validação do controlador PID

Buscou-se realizar as validações do controladores obtidos anteriormente. No primeiro momento, validou-se o controlador PID, utilizando o algoritmo disposto na Figura 7 no modelo não linear da planta. Ele foi alocado em série na malha fechada e se aplicou um sinal de referência de 15° para entrada em degrau. Além do mais, aplicou-se um degrau em torno do ponto de operação em $t = 10\ s$, com amplitude de 10°, como também uma pertubação em $t = 15\ s$. A validação da resposta temporal em malha fecha está disposta na Figura 12.

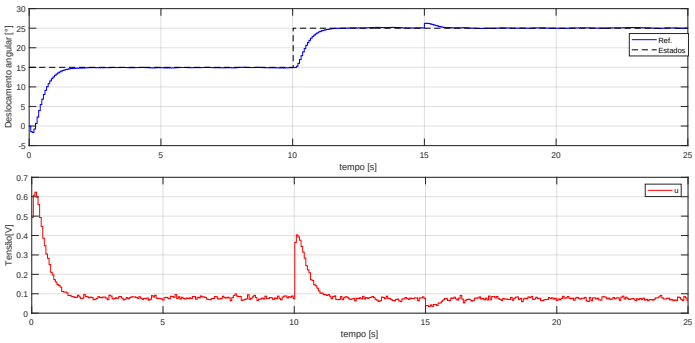


Figura 12. Resposta ao degrau em malha fechada com controlador PID e aplicação de pertubação, sem como seu sinal de controle.

Via análise da Figura 11, nota-se que o controlador PID apresentou um sobressinal de $OS_{\%} = 0\%$, e um tempo de acomodação de $t_s = 2.35\ s$. Ou seja, houve uma melhora significativa na resposta do sistema em malha aberta, bem como atendeu os critérios pré-estabelecidos na fase de projeto.

4.2 Validação do controlado via Espaço de Estados

Após obter os ganhos necessários, bem como executar a topologia com a adição do integrador e do observador, aplicou-se de maneira análoga ao controlador PID um sinal de referência de 15° para entrada em degrau, assim como um degrau em torno do ponto de operação em $t = 10\ s$, com amplitude de 10°, além de uma pertubação em $t = 15\ s$. Nesse sentido, a validação da resposta temporal da malha fechada de controle está expressa na Figura 13.

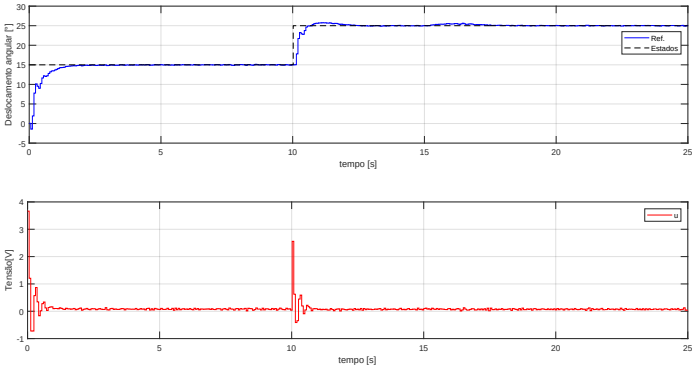


Figura 13. Resposta ao degrau em malha fechada do controlador via espaço de estados com aplicação de distúrbio.

A partir da análise da curva disposta na Figura 13, observa-se um sobressinal de $OS_{\%} = 7,6\%$, bem como um tempo de acomodação de $t_s = 2,71\ s$. Conclui-se que as especificações pré-estabelecidas de sobressinal máximo e de tempo de acomodação também foram atendidas.

Logo, ao comparar ambas respostas temporais obtidas, observa-se que o controlador via abordagem PID apresentou um melhor desempenho. Pois não houve *overshoot* em sua resposta, além de um tempo de acomodação menor ao compará-lo com o compensador via Espaço de Estados. Vale ressaltar que a análise para ambos os controladores foi realizada no intervalo de 10 segundos a 25 segundos ($10\ \text{s} < t < 25\ \text{s}$), uma vez que os controladores foram obtidos a partir do modelo linearizado em torno do ponto de operação. Portanto, eles são válidos apenas nesta região. Dessa forma, a resposta obtida para a malha de controle durante o intervalo de 0 segundos a 10 segundos ($0\ \text{s} < t < 10\ \text{s}$), relativa ao período de estabilização do sistema no ponto de operação, não é considerada relevante para o presente estudo.

4.3 Avaliação complementar

Como parte da avaliação complementar de desempenho das malhas de controle, obtidas a partir dos controladores PID digital e via Espaço de Estados, é possível utilizar índices de desempenho. Esses índices devem ser selecionados e avaliados em janelas temporais específicas e só

fazem sentido quando comparados, devendo ser avaliados de acordo com os objetivos de controle, investigando o comportamento da malha fechada para entradas de referência padronizadas e perturbações.

Para a análise e comparação dos controladores projetados, optou-se por utilizar os índices IAE (Integral do Valor Absoluto do Erro) e RMSE (Root Mean Square Error). Os valores desses índices foram calculados nas malhas de controle utilizando o intervalo de tempo 10 s $< t <$ 25 s, e estão apresentados nas Tabelas 3 e 4.

Tabela 3. Valores obtidos para o índice de desempenho IAE.

Malha de Controle	Absoluto	Percentual
Estados	0.3441	1
PID	0.3152	0.91

Tabela 4. Valores obtidos para o índice de desempenho RMSE.

Malha de Controle	Absoluto	Percentual
Estados	0.5224	1
PID	0.3981	0,763

Ao analisar primeiramente a Tabela 3, afirmar-se que a resposta conferida pela aplicação do controlador via abordagem PID é consideravelmente melhor, visto que seu IAE corresponde a 8.4% do obtido para o controlador via Espaço de estados. Apesar de ambos os controladores conseguirem rejeitar a pertubação imposta, vale ressaltar que o controlador via Espaço de Estados rejeitou de uma maneira mais suave ao se compara com o compensador PID.

Contudo, uma hipótese a ser considerada é que o controlador PID, por incorporar a ação derivativa, realiza uma correção antecipada do erro. Além disso, a ação integrativa ajuda na eliminação de oscilações e permite uma resposta mais rápida, funcionando em conjunto em sua atuação no sistema. Vale mencionar também que este compensador não apresentou *overshoot*, ao contrário do controlador via Espaço de Estados.

Ao verificar a Tabela 4, também se afirma que a resposta obtida com a aplicação do controlador via PID é melhor, uma vez que seu RMSE corresponde a 23.7% do valor obtido para o controlador via Espaço de Estados. Isso se justifica devido aos picos com grandes amplitudes no sinal de controle do controlador via PID, que compensam essa diferença. No entanto, isso consequentemente aumentou seu índice, embora não o suficiente para ultrapassar o valor obtido com a abordagem de realimentação de estados.

5. CONCLUSÃO

Primeiramente, foi possível constatar que via a modelagem caixa branca realizada, a simulação no *software* MATLAB / *Simulink* conseguiu ser bem semelhante a planta física. Ademais, conclui-se também que o sistema em estudo é instável em malha aberta, podendo ser marginalmente instável em malha fechada. Outro ponto que vale ser mencionado também, refere-se que há diversos meio s de realizar a validação de um compensador no sistema, no qual neste trabalho foi utilizado via equação transferência e pela equação à diferença.

Ademais, constatou-se que existem diferentes métodos de avaliação de desempenho de malhas de controle, sendo uma delas via índices de especificação, tais como o tempo de acomodação, t_s, e o sobressinal, $OS_{\%}$,outra maneira seria pelos índices de desempenho, tais como o ISE e o RMSE, no qual foram abordados nesta análise. E, por fim, via a sensibilidade da malha fechada.

Em seguida, ao realizar a análise e avaliação através dos índices de especificação, constatou-se que a resposta obtida pela aplicação do controlador via PID, obteve-se melhor resposta, em que para o sistema em estudo é devido à sua capacidade de rejeição de pertubação, bem como pela ausência do *overshoot* e tempo de acomodação da resposta menor que o controlador via Espaço de Estados.

Por fim, ao analisar e avaliar as malhas através dos índices de desempenho ISE e RMSE, foi obtido um resultado análogo, isto é, melhor resposta para o controlador PID ao se compara com o via Espaço de Estados.

REFERÊNCIAS

Alpi, L.B. (2019). Desenvolvimento de uma planta didática para o controle de nível de tanques acoplados. URL `https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/150947/001009640.pdf?sequence=1`.

da Silva Alves, F.D., de Morais Junior, H.S., de Oliveira, W.M.M., and Laura, T.L. (2020). Projeto e implementação de um controlador pid digital para um sistema calha e bola. *Encontro de Computação do Oeste Potiguar (ECOP 2020)*, 1, 8.

Dantas, T., Fonseca, R., and Silva, F.d. (2015). Determinação da taxa de amostragem e análise do efeito do falseamento dos componentes de frequência de um sinal de identificação. In *Anais do XX Congresso Brasileiro de Engenharia Química - COBEQ 2014*, volume 1, 12440–12447. Blucher.

Fetter, W. (2010). Controladores pid. *UFRGS - Departamento de Engenharia Elétrica*, 22.

Massa de Campos, M.C.M. and Teixeira, H.C.G. (2008). *Controles Típicos de Equipamentos e Processos Industriais*. Editora Blucher, 2 edition.

Nise, N.S. (2011). *Engenharia de Sistemas de Controle*. AMGH Editora, São Paulo, 5ª ed. edition.

Ogata, K. (1982). *Engenharia de Controle Moderno*. Prentice/Hall do Brasil Ltda.

Phillips, C.L., Nagle, H.T., and Chakrabortty, A. (2014). *Digital Control System Analysis Design*. Pearson Education Limited, 4 edition.

Scheibler, E.L.S. and Gabe, I.J. (2020). Implementação digital de um controlador pid em uma bancada didática de controle de nível de fluido. *Curso de Engenharia de Controle e Automação*.