CONDIÇÕES NECESSÁRIAS DE OTIMALIDADE PARA PROBLEMAS DE CONTROLE ÓTIMO DISCRETO MULTIOBJETIVO COM RESTRIÇÕES MISTAS

Lizet Santa Cruz Calderón[1], John Frank Matos Ascona[2], Ana Paula Chorobura[3],

[1] *Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, lizet.calderon@ufms.br;*
[2] *Universidade Federal de Rondonópolis, fjmatos19@gmail.com;*
[3] *Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, ana.chorobura@gmail.com.*

RESUMO: Neste trabalho, apresentamos condições necessárias de otimalidade de primeira ordem para problemas de controle ótimo discreto multiobjetivos com restrições mistas. Tais condições são obtidas através da escalarização do problema multiobjetivo e usando a condição de regularidade do subespaço componente (CRSC).

Palavras-chave: Controle ótimo discreto; Condições de otimalidade; Otimização multiobjetivo; Escalarização.

1. INTRODUÇÃO

Na otimização multiobjetivo, o objetivo é resolver problemas nos quais é necessário minimizar duas ou mais funções. Em contraste com a otimização escalar, onde há apenas um valor ótimo, nos problemas multiobjetivo não é possível afirmar o mesmo. Isso ocorre porque uma solução que minimiza uma das funções geralmente não minimiza todas as outras funções objetivo restantes. Assuma que $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$. O problema multiobjetivo é dado por:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \Psi(x) \\ \text{sujeito a} & F(x) = 0 \\ & G(x) \leq 0 \end{array} \tag{MOP}$$

Os pontos que satisfazem as restrições $F(x) = 0$ e $G(x) \leq 0$ são chamados de pontos factíveis.

Uma definição predominante de solução para o problema (MOP) é a definição de Pareto na qual não é possível melhorar um objetivo sem piorar pelo menos um dos outros.

Dentre as estratégias mais importantes para resolver problemas de otimização multiobjetivo destacamos o método de escalarização. Esse método envolve resolver um ou mais problemas de minimização escalar, garantindo que as soluções ótimas sejam pontos de Pareto para o problema original.

No campo do controle ótimo, existe um resultado importante em relação às condições necessárias para a otimalidade em tempo contínuo, conhecido como Princípio do Máximo de Pontryagin (Pontryagin et al. (1962)). Vários estudos têm aplicado esse princípio para o tempo discreto. Problemas de controle ótimo discreto surgem em situações do mundo real, onde as mudanças no estado e no controle podem ocorrer em intervalos de tempo. Esses problemas também podem ser obtidos através da discretização de problemas de controle ótimo contínuo. Recentemente, vários artigos têm se dedicado ao estudo de problemas de controle ótimo discreto, tanto em uma perspectiva de um único objetivo, quanto de múltiplos objetivos (ver Boltyanskii (1978), Isoton (2017), Rojas-Medar et al. (2020), Toan et al. (2021) e suas referências).

As condições de qualificação são importantes para obtenção de condições necessárias de primeira ordem não degeneradas. Em Andreani et al. (2012), foi dada a condição de qualificação do posto constante do subespaço componente (CRSC), a qual engloba de forma simples dois conceitos, o de posto constante que é muito útil quando se trabalha com restrições de igualdade, e da dependência linear positiva, que se ajusta de forma mais adequada às desigualdades. Além disso, a CRSC é muito importante na prática pois está associado no desenvolvimento de algoritmos de otimização. Para maiores detalhes ver Haeser and Ramos (2016).

O objetivo deste trabalho é mostrar as condições necessárias de primeira ordem para problemas de controle discreto multiobjetivo com restrições mistas e de estado inicial, tanto de igualdade quanto de desigualdade. Essas condições são obtidas utilizando o método de escalarização e a condição de regularidade (CRSC) no problema escalarizado.

2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Neste trabalho, estudaremos o seguinte problema de controle ótimo discreto multiobjetivo

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \Big(\psi^1(x(N+1)),\ldots,\psi^d(x(N+1))\Big) \\ \text{sujeito a} & x(k+1) = f(x(k),u(k),k),\ k = 0,\ldots,N, \\ & b(x(k),u(k),k) = 0,\ k = 0,\ldots,N, \\ & g(x(k),u(k),k) \leq 0,\ k = 0,\ldots,N, \\ & \varphi(x(0)) = 0, \\ & \phi(x(0)) \leq 0, \end{array} \tag{PCODM}$$

onde, para cada $k = 0, \ldots ,N$, $f(\cdot, \cdot ,k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $b(\cdot, \cdot ,k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{r_k}$, $g(\cdot,\cdot,k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{q_k}$ e $\psi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad i = 1, \ldots ,d$, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{r_\varphi}$, e $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{r_\phi}$ são funções continuamente diferenciáveis. O ponto $x = (x(0), \ldots ,x(N + 1))$ é chamada trajetória e $u = (u(0), \ldots ,u(N))$ é o controle associado com a correspondente trajetória.

Consideraremos a seguinte notação $F : X \times U \to \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{(r_0+\cdots+r_N)} \times \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $F(x,u) = (\bar{F}(x,u),\hat{F}(x,u),\tilde{F}(x,u))$, com

$$\begin{aligned}
\bar{F}^k(x,u) &= x(k + 1) - f(x(k),u(k),k),\ k = 0, \ldots , N,\\
\hat{F}^k(x,u) &= b(x(k),u(k),k),\ k = 0, \ldots , N,\\
\tilde{F}(x,u) &= \varphi(x(0)),
\end{aligned}$$

e $G : X \times U \to \mathbb{R}^{(q_0+\cdots+q_N)} \times \mathbb{R}^{r_\phi}$, $G(x,u) = (\bar{G}(x,u),\tilde{G}(x,u))$, com

$$\begin{aligned}
\bar{G}(x,u) &= (g(x(0),u(0),0), \ldots , \bar{g}(x(N),u(N),N))\\
\tilde{G}(x,u) &= \phi(x(0)).
\end{aligned}$$

Assim, definimos os conjunto factível de (PCODM) por

$$Q = \{(x,u) \in X \times U |\ F(x,u) = 0,\ G(x,u) \leq 0\}.$$

Neste trabalho consideraremos a seguinte definição de solução para problemas multiobjetivo

Definição 2.1 (Processo Pareto Ótimo local)**.** *Seja $(x^*,u^*) \in Q$. Dizemos que (x^*,u^*) é uma processo ótimo de Pareto local para o problema* (PCODM) *se e somente se, não existe $(x, u) \in Q$ que satisfaz*

$$\|x(k) - x^*(k)\| < \delta,\ \ k = 0, \ldots ,N + 1, \qquad e \qquad \|u(k) - u^*(k)\| < \delta,\ \ k = 0, \ldots ,N,$$

para algum $\delta > 0$, onde $\| \cdot \|$ é qualquer norma em $\mathbb{R}^q$, $q = n,m$, tal que

$$\psi^i(x(N + 1)) \leq \psi^i(x^*(N + 1)), \qquad \textit{para todo } i = 1, \ldots ,d,$$

e para algum $j \in 1, \ldots ,d$, $\psi^j(x(N + 1)) < \psi^j(x^*(N + 1))$.

3. O CASO ESCALAR

Considere o seguinte problema de controle ótimo discreto escalar:

$$\begin{array}{lll}
\text{minimizar} & \psi(x(N + 1)) & \\
\text{sujeito a} & z(x(N + 1)) \leq 0 & \qquad (PCOD)\\
 & (x,u) \in Q, &
\end{array}$$

onde $z : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{r_z}$. Denotaremos por Ω o conjunto fatível do problema $(PCOD)$ e defniremos $\hat{G} : X \times U \to \mathbb{R}^{(q_0+\cdots+q_N)} \times \mathbb{R}^{r_\phi} \times \mathbb{R}^{r_z}$ por $\hat{G}(x,u) = (G(x,u),z(x(N+1)))$.

Definição 3.1. *Dizemos que* (x^*,u^*) *é um processo ótimo local do problema* $(PCOD)$ *se for factível e existe* $\delta > 0$ *tal que* $\psi(x^*(N+1)) \leq \psi(x(N+1))$, *para todo processo factível* (x,u) *que satisfaz*

$$\|x(k) - x^*(k)\| < \delta, \;\; k = 0, \ldots, N+1, \quad e \quad \|u(k) - u^*(k)\| < \delta, \;\; k = 0, \ldots, N.$$

A seguir daremos uma definição de regularidade através da qual as condições necessárias de primeira ordem não degeneradas são garantidas para o problema $(PCOD)$. Para isto, primeiramente precisamos definir os cones linearizado e polar associados a este problema.

O cone linearizado do conjunto Ω no ponto $(x^*, u^*) \in \Omega$, denotado por $L(\Omega,(x^*,u^*))$, é definido como

$$L(\Omega,(x^*, u^*)) = \{d \in X : \nabla \hat{G}^i(x^*,u^*) \cdot d \leq 0,\ i \in I(x^*,u^*)\} \cap \{d \in X : \nabla F(x^*,u^*)d = 0\},$$

onde $I(x^*,u^*) = \{i \in \{q_0 + \ldots + q_N + r_\phi + r_z\} : \hat{G}^i(x^*,u^*) = 0\}$. E o cone polar de $L(\Omega,(x^*,u^*))$ é dado por

$$L(\Omega,(x^*,u^*))^\circ = \left\{ \sum_{I(x^*,u*)} \mu^i \nabla \hat{G}^i(x^*.u^*) + \nabla F(x^*.u^*)^\top \lambda : \; \mu^i \geq 0,\; i \in I(x^*,u^*),\; \lambda \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Dado $(x^*,u^*) \in \Omega$, consideramos a seguinte notação:

$$\mathcal{J}_-^* = \{\ell \in I(x^*, u^*) : -\nabla \hat{G}^\ell(x^*,u^*) \in L(Q,(x^*,u^*))^\circ\}.$$

Denotemos por $\nabla \hat{G}^{\mathcal{J}_-^*}(x^*,u^*)$ a matriz obtida de $\nabla \hat{G}(x^*,u^*)$ depois de remover as linhas cujos índices não pertencem a $\mathcal{J}_-^*$.

Definição 3.2. *Seja* (x^*,u^*) *um processo factível de (PCOD). Diz-se que as restrições do (PCOD) satisfazem a condição de regularidade de subespaço componente (CRSC) em* $(x^*,u^*) \in \Omega$ *se existe uma vizinhança* V *de* (x^*,u^*) *tal que a matriz*

$$\begin{bmatrix} \nabla F(x,u) \\ \nabla G^{\mathcal{J}_-^*}(x,u) \end{bmatrix}$$

tem o mesmo posto para cada $(x,u) \in V$.

A função Hamiltoniana associada ao problema $(PCOD)$

$$H(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r_k} \times \mathbb{R}^{q_k} \to \mathbb{R}$$

é definida para cada $k = 1, \ldots, N$, por

$$H(x,u,p,\lambda,\mu,k) = p \cdot f(x,u,k) - \lambda \cdot b(x,u,k) - \mu \cdot g(x,u,k) \tag{1}$$

O resultado a seguir é um caso particular do resultado obtido em Andreani et al. (submitted).

Proposição 3.1 (Principio do Máximo Discreto Fraco)**.** *Seja* (x^*,u^*) *um processo ótimo local de* $(PCOD)$. *Suponha que a condição de regularidade CRSC é satisfeita em* (x^*,u^*). *Então, existe* $\xi > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $\eta \in \mathbb{R}^{r_\phi}$, $\zeta \in \mathbb{R}^{r_z}$ *e para cada* $k = 0, \ldots, N$, $(p(k+1),\lambda(k),\mu(k)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r_k} \times \mathbb{R}^{q_k}$, *no todos nulos, com* $\mu(k) \geq 0$, $k = 0, \ldots, N$, $\eta \geq 0$ *e* $\zeta \geq 0$, *tais que as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) Equação Adjunta:

$$p(k) = \nabla_{x(k)} H(x^*(k),u^*(k),p(k+1),\xi,\lambda(k),\mu(k),k), \; k = 1,\ldots,N;$$

(ii) Condição de Transversalidade:

$$\nabla_{x(0)} H(x^*(0),u^*(0),p(1),\xi,\lambda(0),\mu(0),0) = \gamma\cdot\nabla_{x(0)}\varphi(x^*(0))+\eta\cdot\nabla_{x(0)}\phi(x^*(0)),$$

$$p(N+1) = -\xi\nabla_{x(N+1)}\psi(x^*(N+1)) - \zeta\cdot\nabla_{x(N+1)}z(x^*(N+1));$$

(iii) Condição de Estacionariedade:

$$\nabla_{u(k)} H(x^*(k),u^*(k),p(k+1),\xi,\lambda(k),\mu(k),k) = 0, \; k = 0,\ldots,N;$$

(iv) Condição de complementariedade:

$$\begin{aligned}
&\mu^j(k)g^j(x^*(k),u^*(k),k) = 0, \; j = 1,\ldots,q_k, \; k = 0,\ldots,N,\\
&\eta^j\phi^j(x^*(0)) = 0, \; j = 1,\ldots,r_\phi,\\
&\zeta^j z^j(x^*(N+1)) = 0, \; j = 1,\ldots,r_z.
\end{aligned}$$

4. CONDIÇÕES NECESSÁRIAS DE OTIMALIDADE PARA O PROBLEMA MULTIOBJETIVO

A fim de obtermos as condições necessárias de otimalidade para o problema (PCODM), consideremos um problema escalarizado, onde uma função objetivo é minimizada e as demais são colocadas como restrições de desigualdade. Seja $j \in \{1,\ldots,d\}$ e $(x^*,u^*) \in Q$ considere o problema a seguir:

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & \psi^j(x(N+1))\\
\text{sujeito a} & (x,u) \in Q \\
& \psi^i(x(N+1)) \leq \psi^i(x^*(N+1)) \; i = 1,\ldots,d, \; i \neq j.
\end{array} \qquad (PCOD_j)$$

O seguinte resultado relaciona as soluções do problema escalarizado $(PCOD_j)$ com as soluções de Pareto do problema (PCODM).

Lema 4.1. *(Chankong and Haimes (2008)) Um processo factível (x^*,u^*) é uma solução de Pareto local de* (PCODM) *se e somente se, é uma solução local do problema $(PCOD_j)$, para todo $j = 1,\ldots,d$.*

A função Hamiltoniana para o problema (PCODM) é definida da mesma forma que em (1).

Finalmente, obtemos as condições necessárias de primeira ordem para o problema (PCODM) com restrições mistas e de estado inicial, tanto de igualdade quanto de desigualdade.

Theorem 4.1. *Seja (x^*,u^*) uma solução Pareto local de* (PCODM) *e assuma que a condição de regularidade (CRSC) para $(PCOD_j)$ é satisfeita em (x^*,u^*) para algum $j \in \{1,\ldots,d\}$, então existem $\xi \in \mathbb{R}^d$, , $\gamma \in \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $\eta \in \mathbb{R}^{r_\phi}$ e $(p(k+1),\lambda(k),\mu(k)) \in \mathbb{R}^{n(N+1)} \times \mathbb{R}^{r_k} \times \mathbb{R}^{r_q}$ for $k = 0,\ldots,N$, não todos iguais a zero, com $\xi^i \geq 0$, $i = 1,\ldots,d$, $\xi \neq 0$, $\eta^i \geq 0$, $i = 1,\ldots,r_\phi$, $\mu^i(k) \geq 0$, $i = 1,\ldots,r_k$, $k = 0,\ldots,N$, tais que as seguintes condições são satisfeitas:*

i) Equação adjunta:

$$p(k) = \nabla_{x(k)} H(x^*(k),u^*(k),p(k+1),\lambda(k),\mu(k),k),\ k = 1,\dots,N, \tag{2}$$

ii) Condição de transversalidade:

$$\nabla_{x(0)} H(x^*(0),u^*(0),p(1),\lambda(0),\mu(0),0) = \gamma \cdot \nabla_{x(0)} \varphi(x^*(0)) + \eta \cdot \nabla_{x(0)} \phi(x^*(0)) \tag{3}$$

$$p(N+1) = -\xi \cdot \nabla_{x(N+1)} \psi(x^*(N+1)) \tag{4}$$

iii) Condição de estacionariedade:

$$\nabla_{u(k)} H(x^*(k),u^*(k),p(k+1),\lambda(k),\mu(k),k) = 0,\ k = 0,\dots,N, \tag{5}$$

iv) Condição de complementaridade

$$\mu^i g^i(x^*(k),u^*(k),k) = 0,\ i = 1,\dots,q_k,\ k = 0,\dots,N, \tag{6}$$

$$\eta^i \phi^i(x^*(0)) = 0,\ i = 1,\dots,r_\phi \tag{7}$$

Demonstração. Se (x^*,u^*) é um processo Pareto ótimo local de (PCODM), então pelo Lema 4.1, (x^*,u^*) é um processo ótimo local de $(PCOD_j)$, para todo $j = 1,\dots,d$. Logo, pela hipótese a CRSC é satisfeita para $(PCOD_j)$ em (x^*,u^*) para algum j. Assim, pela Proposição 3.1 existem $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\gamma \in \mathbb{R}^{r_\varphi}$, $\eta \in \mathbb{R}^{r_\phi}$, e para cada $k = 0,\dots,N$, $(p(k+1),\lambda(k),\mu(k)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r_k} \times \mathbb{R}^{q_k}$, não todos nulos, com $\mu(k) \geq 0$, $k = 0,\dots,N$, $\eta \geq 0$ e $\xi \geq 0$ com $\xi^j > 0$, tais que as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Equação Adjunta:

$$p(k) = \nabla_{x(k)} H(x^*(k),u^*(k),p(k+1),\lambda(k),\mu(k),k),\ \ k = 1,\dots,N;$$

(ii) Condição de Transversalidade:

$$\nabla_{x(0)} H(x^*(0),u^*(0),p(1),\lambda(0),\mu(0),0) = \gamma \cdot \nabla_{x(0)} \varphi(x^*(0)) + \eta \cdot \nabla_{x(0)} \phi(x^*(0)),$$

$$p(N+1) = -\xi^j \nabla_{x(N+1)} \psi^j(x^*(N+1)) - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{d} \xi^i \nabla_{x(N+1)} \psi^j(x^*(N+1));$$

(iii) Condição de Estacionariedade:

$$\nabla_{u(k)} H(x^*(k),u^*(k),p(k+1),\lambda(k),\mu(k),k) = 0,\ \ k = 0,\dots,N;$$

(iv) Condição de Complementariedade:

$$\begin{aligned}
&\mu^i(k) g^i(x^*(k),u^*(k),k) = 0,\ \ i = 1,\dots,q_k,\ \ k = 0,\dots,N,\\
&\eta^i \phi^i(x^*(0)) = 0,\ \ i = 1,\dots,r_\phi,\\
&\xi^i \psi^i(x^*(N+1)) = 0,\ \ i = 1,\dots,d,\ i \neq j.
\end{aligned}$$

As condições (i), (iii) e (iv) são a equação adjunta, condição de estacionariedade e a condição de complementaridade do problema $(PCODM)$. Reescrevendo a segunda equação do item (ii), obtemos

$$p(N+1) = -\xi \nabla_{x(N+1)} \psi(x^*(N+1))$$

onde $\xi = (\xi^1,\cdots,\xi^d)$. Assim, a condição de transversalidade é satisfeita. □

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho obtivemos condições necessárias de primeira ordem para uma classe de problemas de controle ótimo discreto multiobjetivo com restrições mistas de igualdade e desigualdade. As condições de otimalidade foram desenvolvidas para processos ótimos de Pareto através da escalarização do problema multiobjetivo e a aplicação de resultados existentes para o caso escalar. Através da condição de regularidade CRSC, foi possível garantir que pelo menos um multiplicador associado a uma das funções objetivo é positivo.

REFERÊNCIAS

R. Andreani, G. Haeser, M. L. Schuverdt, and P. J. S. Silva. Two new weak constraint qualifications and applications. *SIAM Journal on Optimization*, 22(3):1109–1135, 2012. doi: 10.1137/110843939.

R. Andreani, J. F.M Ascona, and V. A. de Oliveira. A weak maximum principle for discrete optimal control problems with mixed constraints. submitted.

V. G. Boltyanskii. *Optimal control of discrete systems*. John Wiley, 1978.

V. Chankong and Y. Y. Haimes. *Multiobjective decision making: theory and methodology*. Courier Dover Publications, 2008.

G. Haeser and A. Ramos. *Condições de otimalidade e algoritmos em otimização não linear*. SBMAC, 2016.

C. Isoton. *Algumas contribuições em controle ótimo discreto*. PhD thesis, UFPR, 2017.

L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience, 1962.

M. A. Rojas-Medar, C. Isoton, L. B. dos Santos, and V. Vivanco-Orellana. Optimality conditions for discrete-time control problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 185:115–133, 2020. doi: 10.1007/s10957-020-01638-5.

N. T. Toan, L. Q. Thuy, N. Van Tuyen, and Y. B. Xiao. Second-order kkt optimality conditions for multiobjective discrete optimal control problems. *Journal of Global Optimization*, 79:203–231, 2021. doi: 10.1007/s10898-020-00935-7.