

Boa Colocação e Estabilidade Exponencial para dois problemas de Viga Viscoelástica

Andrea Luiza Gonçalves Martinho
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
andrea@ufrj.br

Leandro Tomaz de Araujo
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
leandroaraujo@ufrj.br

Resumo: Neste trabalho estudaremos a existência e a unicidade de soluções para dois sistemas de vigas de material viscoelásticos bem como a estabilidade exponencial. Além disso, mostraremos que a perda de analiticidade para um dos sistemas.

Palavras-chave: Semigrupos, Estabilidade Exponencial, Perda de Analiticidade.

Introdução

Neste trabalho estudaremos o comportamento assintótico e parte do efeito regularizante de uma viga totalmente de material viscoelástico de comprimento ℓ . Este estudo foi motivado pela grande importância que os materiais viscoelásticos exercem na engenharia, na física e em muitas outras áreas como podemos ver, por exemplo, em [3, 4]. Mais precisamente, consideraremos uma viga feita de material viscoelástico estruturada no intervalo $[0, \ell]$ com especificamente com duas configurações para as extremidades. A primeira configuração envolve uma viga engastada em suas extremidades, e a segunda configuração envolve uma viga apoiada em suas extremidades. Em qualquer um dos casos consideraremos a deformação da viga em um ponto x no tempo t é u , onde $u = u(x, t)$ com $x \in]0, \ell[$. O que direciona a investigação da viga unidimensional considerada através de um modelo envolvendo um problema com valor de contorno e valor inicial. Os modelos que consideraremos para a viga viscoelástica são dados abaixo:

$$\rho u_{tt} + \alpha u_{xxxx} - \alpha_0 u_{txx} = 0, \text{ para } (x, t) \in]0, \ell[\times]0, +\infty[\quad (1)$$

com condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x) \text{ em }]0, \ell[; \quad (2)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x) \text{ em }]0, \ell[; \quad (3)$$

e associado com uma das condições de fronteira do tipo

$$u(0, t) = u(\ell, t) = u_x(0, t) = u_x(\ell, t) = 0, \text{ em }]0, +\infty[\quad (4)$$

ou

$$u(0, t) = u(\ell, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\ell, t) = 0, \text{ em }]0, +\infty[\quad (5)$$

onde ρ, α, α_0 são constantes positivas.

O comportamento assintótico é a parte mais relevante deste trabalho o qual consiste no decaimento exponencial para os problemas envolvendo a viga viscoelástica para um problema determinado por (1)-(3) e associado com condições de fronteira do tipo (4) ou (5). Este resultado foi obtido usando o Teorema de Pruss que pode ser encontrado em Zheng & Liu [5].

Em relação ao efeito regularizante o resultado obtido foi que para um problema envolvendo uma viga viscoelástica para um problema determinado por (1)-(3) e associado com condições de

fronteira do tipo (5) temos a perda de analiticidade. Este resultado foi obtido usando o teorema 4 que pode ser encontrado em [5].

Agora, observe que em ambos modelos obteremos a existência e unicidade de soluções para estes problemas com técnicas de Semigrupos e Espaços de Sobolev que podem ser encontrados em [1, 2, 6].

Este trabalho esta organizado como segue. Na seção 1 apresentaremos o espaço fase e o domínio do operador. Na seção 2 apresentaremos a boa colocação para ambos os problemas usando a teoria bem conhecida. Na seção 3 apresentamos a estabilidade exponencial. Finalmente, na seção 4 apresentamos a perda de analiticidade para o problema determinado por (1)-(3) e associado com condições de fronteira do tipo (5).

1 Espaço fase e operador $\mathcal{A}$

Nesta seção obteremos um resultado de existência e unicidade de soluções do problema determinado por (1)-(3) e associado com condições de fronteira do tipo (4) ou (5). Note que a energia associada ao modelo (1)-(3) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\rho |u_t|^2 + \alpha |u_{xx}|^2 \right) dx.$$

Um cálculo rapido mostra que

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^\ell \alpha_0 |u_{xt}|^2 dx.$$

Assim, para definir o espaço fase considere os seguintes espaços de Hilbert

$$V_1 = H_0^2(0, \ell), \quad V_2 = H_*^2(0, \ell) \cap H_0^1(0, \ell). \\ H_*^2(0, \ell) := \left\{ \omega \in H^2(0, \ell) : \int_0^\ell \omega'(x) dx = 0 \right\}.$$

Denotando por $u_t = v$. Definimos o espaço de fase:

1. Problema (1)-(3) e associado com condições de fronteira do tipo (4):

$$\mathcal{H}_1 = V_1 \times L^2(0, \ell).$$

2. Problema (1)-(3) e associado com condições de fronteira do tipo (5):

$$\mathcal{H}_2 = V_2 \times L^2(0, \ell).$$

Note que $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são espaços de Hilbert equipado com o produto interno da forma

$$(U, U^*)_{\mathcal{H}} = \int_0^\ell (\rho v \overline{v^*} + \alpha u_{xx} \overline{u_{xx}^*}) dx,$$

onde $U = (u, v)^T$ e $U^* = (u^*, v^*)^T$. Para $j = 1, 2$, o operador $\mathcal{A}_j$, para $\rho = 1$ é dado pela seguinte expressão

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_j = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\alpha \partial_{xxxx} & \alpha_0 \partial_{xx} \end{pmatrix} \text{ para } j = 1, 2.$$

Portanto, o sistema (1)-(3) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} U_t - \mathcal{A}U &= 0, \\ U(0) &= U_0. \end{aligned} \tag{6}$$

com domínio é dado por

$$D(\mathcal{A}_j) = H^4(0, \ell) \cap V_j \times V_j \text{ para } j = 1, 2$$

Por simplicidade de notação, escreveremos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{H}$ ao invés de $\mathcal{A}_j$ e $\mathcal{H}_j$ para $j = 1, 2$. Tomemos $F = (f_1, f_2)^t \in \mathcal{H}$. Agora, observando que a equação do resolvente $(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}F = U$ é equivalente a $i\lambda U - \mathcal{A}U = F$, $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que em termos das componentes pode ser escrito como

$$i\lambda u - v = f_1 \tag{7}$$

$$i\lambda \rho v + \alpha u_{xxxx} - \alpha_0 v_{xx} = f_2, \tag{8}$$

satisfazendo (4) e (3). Agora, tomando o produto interno da equação do resolvente $i\lambda U - \mathcal{A}U = F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ com U , e depois tomando a parte real e usando (11) temos que

$$\int_0^\ell \alpha_0 |v_x|^2 dx = \operatorname{Re} \langle F, U \rangle_{\mathcal{H}}, \tag{9}$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\int_0^\ell |v_x|^2 dx \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}, \tag{10}$$

onde $C > 0$ é uma constante. Assim temos estimada a norma de v_x .

2 Boa Colocação

A seguir vamos provar a boa colocação do problemas determinado por (1) e (3) e associado com condições de fronteira do tipo (4) ou (5).

Lema 1. *Para os casos 1 e 2,*

1. $\mathcal{A}$ é dissipativo em $\mathcal{H}$;
2. $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. Além disso, $\mathcal{A}$ gera um semigrupo C_0 de contrações sobre $\mathcal{H}$.

Demonstração. Para o caso 1 e 2, observe que

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = - \int_0^\ell \alpha_0 |v_x|^2 dx \leq 0. \tag{11}$$

e assim temos que $\mathcal{A}$ é um operador dissipativo. Agora, provaremos que $0 \in \varrho(\mathcal{A})$. Provaremos que para todo $F = (f_1, f_2)^T \in \mathcal{H}$ existe uma única solução $U \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$\mathcal{A}U = F.$$

Em termos das componentes temos que

$$-v = f_1 \in H^2(0, \ell) \tag{12}$$

$$\alpha u_{xxxx} - \alpha_0 v_{xx} = \rho f_2 \in L^2(0, \ell). \tag{13}$$

Da primeira equação temos $v = -f_1 \in H^2(0, \ell)$. Portanto de (13) segue que

$$\alpha u_{xxx} + \alpha_0 f_{1,xx} = \rho f_2 \in L^2(0, \ell).$$

Usando o Lema de Lax Milgran para a forma bilinear

$$a(u, w) = \int_0^\ell \alpha u_{xx} w_{xx} dx,$$

encontramos que existe uma única função $u \in H_0^2(0, \ell)$ verificando as equações acima. Note que pela regularidade elíptica temos que $u \in H^4(0, \ell)$. Portanto existe $U = (u, -f_1)^T \in D(\mathcal{A})$ verificando a equação resolvente. Como $\mathcal{A}$ é fechado, dissipativo e $0 \in \varrho(\mathcal{A})$, temos que para algum $\epsilon > 0$, $\text{Im}(\epsilon I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$. Usando o Teorema 4.6 Capítulo 1 pág. 16 of [6] concluímos que $D(\mathcal{A})$ é denso sobre $\mathcal{H}$. Então $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 de contrações. Portanto, segue o resultado. $\square$

Finalmente,

Teorema 1. *Para qualquer $U_0 \in \mathcal{H}$ a solução U satisfaz $U \in C([0, T]; \mathcal{H})$. Além disso, para cada $U_0 \in D(\mathcal{A})$,*

$$U \in C^1([0, T]; \mathcal{H}) \cap C([0, T]; D(\mathcal{A})).$$

3 Estabilidade Exponencial

A nossa principal ferramenta será a caracterização de Pruss que pode ser encontrado em [5], que estabelecemos a seguir

Teorema 2. *Seja $S(t) = e^{At}$ um semigrupo C_0 de contrações sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então $S(t)$ é exponencialmente estável, se e somente se,*

$$\varrho(\mathcal{A}) \supset \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \quad e \quad \overline{\lim_{|\beta| \rightarrow \infty}} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

Lema 2. *O domínio $D(\mathcal{A})$ tem imersão compacta no espaço de fase $\mathcal{H}$.*

O Lema 2 implica que o espectro de $\mathcal{A}$ é formado exclusivamente por autovalores. Isto porque resolvente é um operador compacto.

Lema 3. *Com as notações anteriores temos que $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Pelo Lema 2 bastará mostrar que não existem autovalores imaginários. De fato, suponhamos que exista um autovalor imaginário, isto é, existe $i\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{A}U = i\lambda U \quad \text{com } U \neq 0.$$

Tomando produto interno na equação anterior com U concluímos que

$$\text{Re } \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

Usando (9) temos

$$\int_0^\ell \alpha_0 |v_x|^2 dx = 0.$$

Logo $v = 0$ o que implica que $u = 0$ sobre o intervalo $]0, \ell[$, ou seja, $U = (u, v) = (0, 0)$ em $]0, \ell[$ o que implica que o autovetor é identicamente nulo o que é uma contradição. Portanto não pode existir autovalores imaginários. De onde segue o resultado. $\square$

Agora, considere

$$\mathcal{I}(x) = \frac{1}{2}(\rho|v|^2 + \alpha|u_{xx}|^2)(x) \quad \text{e} \quad \mathfrak{R} = \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Finalmente,

Teorema 3. *O semigrupo definido pela equação (1)-(3) é exponencialmente estável.*

Demonstração. Usando a desigualdade (10) e a desigualdade de Poincaré obtemos

$$\int_0^\ell |v|^2 dx \leq \int_0^\ell |v_x|^2 dx \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (14)$$

Pelo Teorema das derivadas intermediárias temos

$$\begin{aligned} \|u_{xx}\|_{L^2} &\leq \frac{c}{|\lambda|}\|v\|_{L^2} + c\|v + f_1\|_{L^2}^{1/2} \left[c\|u_{xx}\|_{L^2}^{1/2} + c\|v\|_{L^2}^{1/2} \right] + \\ &\quad + \frac{c}{|\lambda|^{1/2}}\|v + f_1\|_{L^2}^{1/2} \left[c\|f_2\|_{L^2}^{1/2} + c\|f_{1,xx}\|_{L^2}^{1/2} \right] \end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular e a desigualdade de Young temos

$$\|u_{xx}\|_{L^2} \leq \epsilon\|u_{xx}\|_{L^2} + \epsilon\|v\|_{L^2} + c_\epsilon\mathfrak{R}^{1/2}.$$

E assim temos que

$$\int_0^\ell \alpha|u_{xx}|^2 dx \leq c_\epsilon \mathfrak{R} + \epsilon \int_0^\ell \mathcal{I}(x) dx. \quad (15)$$

Usando a desigualdade acima junto com (14) segue nossa conclusão. $\square$

4 Perda de Analiticidade

A seguir vamos mostrar a perda de analiticidade de uma viga viscoelástico para o problema (1) e (3) com condição de fronteira (5) usando um resultado que enunciaremos abaixo e pode ser encontrado em [5]

Teorema 4. *Seja $\varrho(\mathcal{A})$ o conjunto resolvente do operador linear $\mathcal{A}$. Então, um semigrupo de contrações $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é analítico se e somente se $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$ e*

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \|\lambda(i\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}} < \infty.$$

O que permite demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 5. *O semigrupo $e^{\mathcal{A}_2 t}$ definido sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$ é não analítico.*

Demonstração. É suficiente mostrar que existe uma sequência $\{\lambda_n\}$ de números reais e uma sequência limitada U_n em $\mathcal{H}_2$ tal que $\lambda_n \rightarrow +\infty$ e

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|\lambda_n(i\lambda_n I - \mathcal{A}_2)^{-1}\|_{\mathcal{H}_2} = +\infty$$

Com efeito, para cada $n \in \mathbb{N}$ tome

$$F_n = \left(0, \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right)^T.$$

Seja $U_n = (u_n, v_n)^T \in D(\mathcal{A}_2)$ a solução única da equação resolvente $i\lambda_n - \mathcal{A}_2 U_n = F_n$ com $\lambda_n \in \mathbb{R}$, ou equivalentemente,

$$i\lambda_n u - v = 0, \text{ em } (0, \ell) \times \mathbb{R}^+ \quad (16)$$

$$i\lambda_n \rho v - \alpha u_{xxxx} + \alpha_0 v_{xx} = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \text{ em } (0, \ell) \times \mathbb{R}^+. \quad (17)$$

Pelas condições de contorno (5) as soluções do sistema são da forma

$$u_n = A_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Por (16),

$$v_n = i\lambda_n A_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Por (17),

$$\left(\alpha \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^4 - \lambda_n^2\right) A_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + \alpha_0 i \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 A_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right).$$

Tome $\lambda_n = \sqrt{\alpha} \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ de modo que obtemos

$$A_n = \frac{-i}{\alpha_0} \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2.$$

Então

$$\|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \alpha \int_0^\ell |u_{n,xx}|^2 dx = \frac{\alpha}{\alpha_0^2}.$$

De modo que

$$\|\lambda_n U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 = |\lambda_n|^2 \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \frac{\sqrt{\alpha^3}}{\alpha_0^2} \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$$

Fazendo $n \rightarrow +\infty$ o resultado segue. □

5 Conclusões

Neste trabalho mostramos existência e unicidade de soluções para dois modelos de vigas viscoelásticas bem como a estabilidade exponencial para ambos problemas. Note que mostramos a perda de analiticidade apenas para o problema determinado por (1)-(3) e associado com condições de fronteira do tipo (5). Acreditamos que o primeiro problema não seja analítico, mas ainda é uma questão em aberto.

6 Agradecimentos

Este trabalho foi desenvolvido sobre orientação do Prof. Jaime M. Rivera como parte da tese de doutorado dos autores pelo Instituto de Matemática da UFRJ.

Referências

- [1] ADAMS, R. A. *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York 1975.
- [2] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin (2011).
- [3] CHRISTENSEN, R. M. (1982). *Theory of Viscoelasticity*. Elsevier.
<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-174252-2.X5001-7>
- [4] LAKES, R. S. (2009). *Viscoelastic Materials*. Cambridge University Press.
- [5] LIU, Z. & ZHENG, S. *Semigroups associated to dissipative systems*. Chapman e Hall/CRC Research Notes in Mathematics, 398, (1999).
- [6] PAZY, A. (1983). *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations* (Vol. 44). Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1>