A DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES E UMA APLICAÇÃO NA COMPRESSÃO DE IMAGENS

Viviane da Silva Pimentel
Universidade Federal Fluminense, Instituto de Ciências Exatas, Volta Redonda, Rio de Janeiro
viviane_pimentel@id.uff.br

Alan Prata de Paula
Universidade Federal Fluminense, Instituto de Ciências Exatas, Volta Redonda, Rio de Janeiro
alanprata@id.uff.br

Marina Sequeiros Dias de Freitas
Universidade Federal Fluminense, Instituto de Ciências Exatas, Volta Redonda, Rio de Janeiro
msdias@id.uff.br

Resumo: A Decomposição em Valores Singulares emerge como uma das mais proeminentes ferramentas de fatoração matricial. Neste estudo, exploraremos esse método de fatoração, juntamente com uma aplicação concisa na compressão de imagens, visando a redução de dimensionalidade e mantendo uma qualidade visual aceitável.

Palavras-chave: Decomposição em Valores Singulares. Fatoração Matricial. Compressão de Imagens.

Introdução

A Decomposição em Valores Singulares (SVD, sigla do nome em inglês *Singular Value Decomposition*) é uma técnica que desempenha um papel fundamental no processamento de imagens. Este estudo visa aprofundar a compreensão da SVD, explorando sua aplicação na compressão de imagens, mostrando sua capacidade em aprimorar a análise visual das imagens, além de destacar as métricas de comparação do método.

A Decomposição em Valores Singulares

A Decomposição em Valores Singulares garante, basicamente, que qualquer matriz pode ser decomposta em três partes fundamentais: duas matrizes de rotação e uma matriz diagonal. A seguir, observe o teorema que garante a sua existência.

Teorema 1 *Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz com posto r. Então existe uma matriz*

$$\Sigma_{m\times n} = \begin{bmatrix} D_{r\times r} & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix},$$

onde os elementos da diagonal principal da matriz D são os r valores singulares não-nulos de A, isto é, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$. Mais ainda, existem matrizes ortogonais $U_{m\times m}$ e $V_{n\times n}$ tais que $A = U\Sigma V^T$. O produto $U\Sigma V^T$ é denominado uma Decomposição em Valores Singulares para a matriz A.

Além disso, existem resultados que possibilitam compactar os dados da matriz ao ignorar os menores valores singulares. O primeiro resultado garante que " Dada uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ que possui exatamente r valores singulares não-nulos, isto é, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ e $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \cdots = \sigma_n = 0$. Então, o posto de A é r ". Somado a isso, Trefethen (1997, p. 35) garante que " A é a soma de r matrizes de posto 1, isto é, $A = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j u_j v_j^T$ " e que " Para algum v com $0 \leq v \leq r$, definindo $A_v = \sum_{j=1}^{v} \sigma_j u_j v_j^T$, se $v = p = \min\{m,n\}$ e $\sigma_{v+1} = 0$, então $\|A - A_v\| = \inf \|A - B\|$, onde $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ e posto$(B) \leq v$ ".

Utilizando esses resultados, é possível garantir a melhor aproximação da matriz utilizando os primeiros v valores singulares, além de reduzir a dimensão da matriz. Esse processo facilita a transmissão de dados via redes e a extração de informações relevantes. A seguir, de maneira prática, exploraremos uma aplicação na compressão de imagens.

Compressão de Imagens Digitais

Na compressão de imagens, o foco é reduzir o armazenamento computacional das imagens, tornando-as de mais fácil transferência pelas redes. Nesse trabalho, através da SVD, abordaremos essa aplicação com imagens em tons de cinza (8 bits). Matricialmente, podemos representar essa imagem digital como uma matriz A bidimensional $(m \times n)$ em que cada elemento da matriz representa o valor de intensidade de um pixel específico. Através da decomposição SVD podemos descrever a matriz A como $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$. Considerando apenas os k primeiros valores singulares, teremos $A = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$. Além disso, segundo Cao (2006), podemos avaliar a qualidade da compressão através de duas métricas: taxa de compressão e erro quadrático médio *(Mean Square Error* - MSE). A taxa de compressão C_R é dada por $C_R = \dfrac{mn}{k(m+n+1)}$. Já o erro quadrático médio é dado por $MSE = \dfrac{1}{mn} \sum_{x=1}^{n} \sum_{y=1}^{m} (f(x,y) - f_c(x,y))^2$, onde $f(x,y)$ é o valor do pixel na imagem original e $f_c(x,y)$, o valor do pixel após a compressão. Note que quanto menor for número k, maior será a taxa de compressão C_R, ou seja, a imagem estará mais distante de sua versão original, basta observar que, consequentemente, o MSE será maior. Ambas as métricas medem a qualidade entre a imagem original e a compactada. Na Tabela 1 da próxima seção, isso será mais perceptível.

Conclusões

Nesse estudo, notamos que a redução de dimensionalidade obtida ao descartar os valores singulares menos significativos permite uma representação mais compacta da imagem, o que resulta em economia de espaço de armazenamento e maior eficiência na transmissão. As métricas de comparação utilizadas são úteis e mostram, de maneira eficiente, a proporção dessa redução. Observe a Tabela 1 abaixo.

Tabela 1: Tabela de comparação das métricas.

Valores singulares	C_R	MSE	Armazenamento (bytes)
20	0.04	386.3451	701739
60	0.13	125.8883	781739
300	0.65	7.2076	1261739
500	1.08	0.5047	1661739
720	0.64	3.8094e-8	2101739

Referências

BORTOLOSSI, H. J. **Tópicos em Álgebra Linear: Decomposições Matriciais e Aplicações**. Universidade Federal Fluminense, 2017.

CAO, L. Singular value decomposition applied to digital image processing. **Division of Computing Studies, Arizona State University Polytechnic Campus**, 2006.

TREFETHEN, L. N.; BAU, I. D. Numerical Linear Algebra. **Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics**, 1997.