



AVALIAÇÃO DA ESTABILIDADE DA RESPOSTA DINÂMICA DA FORMULAÇÃO COM DUPLA RECIPROCIDADE DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Carlos Friedrich Loeffler¹ – loefflercarlos@gmail.com

Thiago Galdino Balista¹ – thiago.balista@gmail.com

Luciano de Oliveira Castro Lara¹ - castrolara@hotmail.com

¹Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, UFES, CT, Av. Fernando Ferrari, 540, Bairro Goiabeiras, 29075-910, Vitória, ES, Brasil.

Resumo. O modelo do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para resolver problemas de valor no contorno dependentes do tempo resulta, geralmente, em uma equação integral que envolve termos de domínio e demanda soluções fundamentais matematicamente elaboradas, que podem comprometer a simplicidade e a aplicabilidade do método. Uma mudança neste cenário ocorreu com a descoberta de formulações alternativas para o tratamento dessa questão. Dentre essas, está a formulação da Dupla Reciprocidade (MECDR), que embora não seja apenas uma técnica de interpolação, utiliza soluções fundamentais simples e se baseia numa aproximação construída por uma sequência de funções de base radial. Com respeito a discretização temporal, propõe-se o uso de técnicas de diferenças finitas. Dentre essas técnicas, destaca-se o esquema de Integração de Houbolt, que demonstrou ser apropriado às aplicações do MEC devido a sua estabilidade incondicional. Assim, este trabalho aborda os aspectos fundamentais da base matemática deste esquema de avanço no tempo, examinando detalhadamente suas características, que asseguram sua estabilidade e respaldam sua aplicação em dinâmica.

Palavras-Chave: Elementos de contorno, dupla reciprocidade, esquema de integração de Houbolt.

1. INTRODUÇÃO

A primeira formulação desenvolvida no contexto do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para resolver casos transientes empregou uma solução fundamental dependente do tempo (Wrobel e Brebbia, 1981). Em dinâmica, há mais de quarenta anos, tal metodologia teve o mérito de ser a pioneira na análise da sísmica de prospecção (Mansur e Brebbia, 1985). Apesar de sua elegância, precisão e conformidade com o formalismo matemático, essa formulação apresenta dificuldades. As principais, consistem da complexidade da solução fundamental, do custo de processamento computacional e também da falta de flexibilidade, pois não era adequada a abordagem de problemas heterogêneos. Assim sendo, tal formulação foi gradativamente sendo substituída nas aplicações em engenharia por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF) e do Método das Diferenças Finitas (MDF).

Uma mudança neste cenário referente ao MEC aconteceu com a descoberta de formulações alternativas capazes de transformar integrais de domínio em integrais de contorno, usando soluções fundamentais mais simples. Isto ocorreu com o advento da formulação da Dupla Reciprocidade (MECDR) apresentada por Nardini e Brebbia (1983b). O MECDR não é uma técnica de simples interpolação; ela apresenta alguns procedimentos interessantes, tais como: utilizar uma sequência de funções de base radial para aproximar parte do núcleo das integrais de domínio e também empregar estrategicamente uma função radial primitiva expressa em termos de um operador diferencial afim – o Laplaciano nos casos escalares – ao problema abordado.

Graças ao MECDR foi possível proceder à simulação acessível de casos caracterizados por fontes ou ações internas, resultando em integrais de domínio, anteriormente resolvidos de modo custoso e complexo, ou então com o uso de células integrando diretamente o domínio, o que foge ao escopo do MEC. Intrinsecamente, pode-se afirmar que o MECDR é capaz de resolver problemas cujo operador diferencial parcial não é autoadjunto (Brebbia e Walker, 1980). Também uma maior variedade de aplicações pode ser resolvida por meio do MEC, pois uma solução fundamental mais simples pode ser assumida (Brebbia et al., 1984).

A versatilidade trazida por meio do MECDR incentivou seu uso em diversos problemas, incluindo casos não lineares, sobretudo unidimensionais. Chino e Tosaka (1998) aplicaram o MECDR na equação de Bateman-Burger, que é importante na área de fenômenos de transporte e inclui casos não lineares de acústica, transferência de calor, dinâmica dos gases e fluidodinâmica. Šarler e Kuhn (1998) também aplicaram o MECDR em problemas de resfriamento de chapas laminadas, na qual é um problema tipicamente não linear. Neste caso é preciso modelar os fenômenos de difusão e advecção, considerando a mudança de fase da solução sólida de carbono.

Em meados dos anos 2000, o MECDR estava bem conhecido na comunidade científica, mas não tinha apelo industrial. Assim, Niku e Adey (1996) retrataram bem as vantagens e os problemas envolvendo o MECDR. Entretanto, estes autores apontam que as principais razões para o desinteresse comercial do MECDR se deviam a falta de uma abordagem adequada para inserção dos pólos no interior do domínio e o alto custo computacional, devido a necessidade de inversão de matriz. Atualmente, estes dois problemas podem ser considerados como resolvidos. Em outros problemas, seu desempenho é satisfatório e apenas o surgimento de técnicas mais eficientes para resolver as integrais de domínio fizeram seu emprego ficar relativamente restrito. Havia ainda a perda de estabilidade em processos iterativos, mas isto não impediu os estudiosos a continuar desenvolvendo o MECDR, basicamente em consórcio com outras técnicas, no sentido de resolver certas limitações das formulações integrais do MEC. No caso da formulação clássica que usa as funções correlatas de Green como soluções fundamentais, o MECDR foi aplicado nos problemas difusivo-advectivos em que o campo de velocidade não é constante. A velocidade do escoamento é dividida num termo médio e num desvio, em que este último é considerado uma termo fonte e resolvido por meio do MECDR (Wrobel e Figueiredo, 1991). Esta mesma ideia pode ser aplicada a problemas regidos pela Equação de Biot (Cavalcanti e Telles, 2003). O MECDR também foi aplicado a placas (Silva e Venturini, 1988) e a problemas viscoelásticos (Sensale et al., 1970). Também foram significativos os trabalhos nos quais o MECDR foi acoplado com o Método das Soluções Fundamentais (MSF) (Partridge e Sensale, 2000). Este último método reaparece na literatura depois dos anos 2000 e ao se combinar com o MECDR para o adequado tratamento dos termos fonte, pode ser aplicado com êxito aos problemas de Poisson, reduzindo seus conhecidos problemas de instabilidade produzidos por mau condicionamento matricial.

Não obstante os resultados satisfatórios em algumas aplicações estacionárias, o MECDR esbarra em alguns problemas sérios, especialmente na dinâmica. Isso porque apresenta imprecisões numéricas nos casos em que muitos pontos internos são necessários para representar propriedades de domínio, por exemplo, a inércia. Contudo, o fator mais

significativo está no fato de que os esquemas de avanço no tempo ou técnicas de integração direta, usadas no MEF e no MDF são utilizados no MEC. Os métodos de domínio citados apresentam problemas de precisão e consistência para grandes passos, mas funcionam bem para pequenos incrementos de tempo. Já o MECDR é instável por tempos muito curtos, o que na prática deve ser evitado devido ao alto custo computacional, mas gera desconforto na aplicação do método, devido ao risco de obtenção de soluções espúrias.

A simples importação pura dos esquemas de avanço no tempo sempre induziu incertezas, relacionadas ao fato da discretização do MEC ser limitada ao contorno. Tal posto, não há como fazer uma comparação adequada entre células de diferenças finitas e/ou elementos finitos com elementos de contorno, que possuem uma dimensão a menos. Assim, a ideia de estabelecer um passo de integração temporal adequado, baseado na condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) para esquemas explícitos (Potter, 1973), na qual o espaço percorrido pela onda em um intervalo de tempo não pode ser maior que o comprimento de um elemento de contorno é apenas um dispositivo preliminar, para superar um problema ainda não resolvido. Em outras palavras, os critérios CFL não podem ser aplicados diretamente sem ressalvas no MEC.

Outros fatores devem ser considerados. Como por exemplo, as matrizes do MEC clássicas relacionadas à rigidez também não são simétricas (Brebbia et al., 2012). A matriz de inércia, embora simétrica, é gerada por meio de aproximações com funções de base radial. Em um problema de autovalores, por exemplo, a matriz típica não é simétrica e podem resultar autovalores complexos, principalmente relacionados à imprecisão do modelo para representar configurações modais associadas a altas frequências. Entretanto, paralelamente, deve-se observar a própria natureza do MECDR. Apesar de permitir a simulação acessível de casos transitórios, problemas de valores característicos, resposta dinâmica e outros que resultam em integrais de domínio, o MECDR não é uma técnica de interpolação simples. Sua formulação trabalha com duas funções primitivas da função de interpolação original, formando duas matrizes auxiliares que podem produzir efeitos numéricos prejudiciais adicionais (Golberg e Chen, 1994; Golberg et al., 1998).

Trabalhos anteriores examinando a propagação da ondas acústicas (Loeffler e Mansur, 1987) observaram apenas questões relacionadas a precisão dos resultados, enfocando as características dos esquemas de avanço no tempo que garantiam a estabilidade da resposta, à custa de amortecimento fictício. Alguns autores tentaram aplicar princípios variacionais nas equações integrais inversas típicas do MEC a fim de melhorar os resultados. Em dinâmica, isto resultou na proposição de artifícios para gerar matrizes de rigidez simétricas (Kanakachos e Provatidis, 1987). Tal imposição, contudo, não deu resultados satisfatórios. Assim, mais tarde, estes mesmos autores usaram o MECDR em problemas escalares de autovalor com o auxílio de sub-região usando funções de interpolação especiais (Kanakachos e Provatidis, 1992) mas seus resultados, novamente, não foram superiores aos da formulação clássica do MECDR, apresentados por Loeffler e Mansur (1987). Haisheng (1989) também tentou simetrizar a matriz de rigidez do MEC usando uma metodologia distinta, em que a resposta dinâmica foi obtida por superposição modal, mas seus resultados também não foram superiores. Tanaka e Chen (2001) apresentaram uma proposta diferente, combinando a discretização típica do MECDR no espaço com uma quadratura diferencial para resolver o problema no tempo. Os resultados foram apenas razoáveis, mas a programação computacional é complexa e o custo computacional é mais elevado. Outros autores verificaram a possibilidade de simulação das ondas acústicas em meios infinitos (Zhu e Zhang, 1993) em complementação ao trabalho dos pesquisadores Loeffler e Mansur (1989).

Enfim, esta pesquisa dá continuidade aos estudos realizados há muito tempo sobre a aplicabilidade do MECDR em dinâmica. Porém, objetiva examinar de modo mais detalhado os fatores que garantem a estabilidade do esquema de avanço no tempo, que é o principal desafio. Os testes aqui realizados abordam a resposta de um problema clássico envolvendo

impacto, que devido às suas dificuldades numéricas, é uma referência apropriada para analisar a consistência, precisão e estabilidade dos modelos numéricos. O Método de Integração Houbolt de avanço integra a equação de governo discreta em relação à variável de tempo, devido à sua maior estabilidade numérica (Houbolt, 1950). Neste contexto, constroem-se curvas nas quais se estabelece uma a relação entre o incremento de tempo e as malhas de elementos para a integração estável da resposta.

2. EQUAÇÃO DE GOVERNO

Inicialmente, a equação de Helmholtz pode ser interpretada como um caso particular da Equação de Ondas Acústicas (Butkov, 1973). Então, para um caso em duas dimensões, tem-se a equação de governo:

$$u_{,ii}(\mathbf{X}) = -\frac{\omega^2}{k^2}u(\mathbf{X}) \quad (1)$$

Destaca-se que quando o problema físico é expresso por meio de equações diferenciais, torna-se necessário a complementação da equação diferencial com certas informações adicionais, denominadas de condições de contorno, de forma que o problema físico fique bem caracterizado e apresente uma única solução. Assim sendo, na Fig. 1, apresentam-se os dois principais tipos de condições de contorno associadas aos diversos modelos matemáticos.

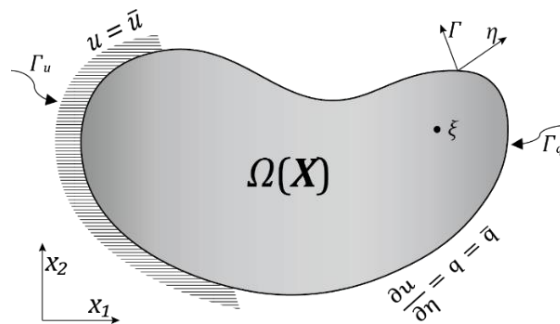


Figura 1 – Domínio bidimensional $\Omega(\mathbf{X})$ delimitado por um contorno $\Gamma_u + \Gamma_q$

Na Fig. 1, Γ_u representa a condição de contorno essencial (ou de Dirichlet) e Γ_q é a condição natural (ou de Neumann). É interessante destacar, que, o domínio $\Omega(\mathbf{X})$ abordado pode representar um sistema, um corpo ou um volume de controle de um dado problema físico. Assim, considerando os procedimentos matemáticos conhecidos no contexto do Método dos Elementos de Contorno (MEC) (Brebbia e Walker, 1980), tem-se a forma integral inversa associada a Eq. (1), dada pela seguinte expressão integral:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(\mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma - \int_{\Gamma} q(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma = \frac{\omega^2}{k^2} \int_{\Omega} u(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})d\Omega \quad (2)$$

Na Eq. (2) o termo $\mathbf{X}$ representa o ponto campo de um domínio específico $\Omega(\mathbf{X})$ com contorno definido em $\Gamma(\mathbf{X})$. O ponto fonte prescrito no sistema é ξ ; e k é a velocidade de propagação das ondas acústicas. O termo $c(\xi)$ é um coeficiente que se submete da localização do ponto fonte ξ ao domínio $\Omega(\mathbf{X})$ e, considerando que aquele pode estar localizado no contorno $\Gamma(\mathbf{X})$, a suavidade também influencia (Brebbia et al., 1984). Destaca-se que, $u^*(\xi; \mathbf{X})$ é o potencial escalar e $q(\mathbf{X})$ é sua derivada normal; $u^*(\xi; \mathbf{X})$ é a solução fundamental correlata ao problema de Laplace e $q^*(\xi; \mathbf{X})$ é a sua derivada normal (Brebbia e Walker, 1980; Brebbia et al., 1984). Nas seções seguintes, devido ao espaço limitado, apresenta-se os principais aspectos para o tratamento do termo de domínio restante, utilizando-se da formulação da Dupla Reciprocidade (MECDR). Assim, convém mencionar, que o desenvolvimento detalhado do MECDR pode ser encontrado na literatura especializada (Partridge et al., 1992).

3. FORMULAÇÃO DUPLA RECIPROCIDADE

Brevemente, a primeira etapa de abordagem da formulação da Dupla Reciprocidade (MECDR) consiste em se proceder à seguinte aproximação para o potencial $u(\mathbf{X})$, presente no núcleo da integral de domínio da Eq. (2), assim, tem-se que:

$$u(\mathbf{X}) \approx \alpha^i F^i(\mathbf{X}^i; \mathbf{X}) = \alpha^i \Psi_{,jj}^i(\mathbf{X}^i; \mathbf{X}) \quad (3)$$

Na Eq. (3) os coeficientes α^i são inicialmente desconhecidos e $F^i(\mathbf{X}^i; \mathbf{X})$ são as funções auxiliares de interpolação que pertencem a classe das Funções de Base Radial (FBR). Neste momento, destaca-se que a FBR usada nessa pesquisa é a radial simples. Prosseguindo, ainda nesta equação, as funções $\Psi^i(\mathbf{X}^i; \mathbf{X})$ são primitivas das funções de $F^i(\mathbf{X}^i; \mathbf{X})$; assim, com este procedimento, é possível escrever o termo de inércia da integral de domínio apenas em termos de integrais envolvendo variáveis no contorno. Por questão de espaço, o procedimento de discretização e o tratamento matricial desta equação não serão apresentados. Detalhes podem ser colhidos em trabalhos prévios (Partridge et al., 1992; Nardini e Brebbia, 1983a). Dessa maneira, o sistema final pode ser escrito como segue:

$$[\mathbf{H}]\{\mathbf{u}\} - [\mathbf{G}]\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{u}}\} \quad (4)$$

Na Eq. (4), as matrizes $[\mathbf{H}]$ e $[\mathbf{G}]$ são oriundas das operações de discretização envolvendo as integrais para derivada normal da solução fundamental e para a solução fundamental, respectivamente. A matriz $[\mathbf{M}]$ corresponde à propriedade de inércia acústica, enquanto $\{\mathbf{u}\}$ e $\{\mathbf{q}\}$ são vectores que contêm os valores do potencial e da sua derivada nos nós.

4. ESQUEMA DE DISCRETIZAÇÃO NO TEMPO

No que tange a discretização temporal, propõe-se o uso de técnicas de diferenças finitas. Dentre essas discretizações, a mais adequada para tratar as particularidades do Método dos Elementos de Contorno (MEC), recorreu-se ao esquema de integração de Houbolt; este se assemelha ao método da diferença finita central, no qual expressões baseadas no deslocamento podem ser utilizadas para aproximar as componentes de velocidade e aceleração.

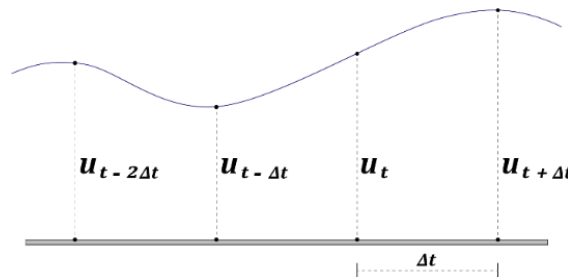


Figura 2 – Representação da curva relacionada ao esquema de avanço no tempo.

Portanto, a partir da consideração de uma curva cúbica que percorrer ao longo de quatro ordenadas sucessivas (ver Fig. 2), obtém-se a expressão da aceleração (Houbolt, 1950).

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = \frac{2u_{t+\Delta t} - 5u_t + 4u_{t-\Delta t} - u_{t-2\Delta t}}{\Delta t^2} \quad (5)$$

Na Eq. (5) Δt é o intervalo de tempo discreto e t são os instantes de temporais. Assim sendo, substituindo-se na equação para problemas de ondas elásticas, tem-se que:

$$(2\bar{\mathbf{M}} + \Delta t^2 \bar{\mathbf{H}})u_{t+\Delta t} - (\Delta t^2 \bar{\mathbf{G}})q_{t+\Delta t} = (5\bar{\mathbf{M}})u_t - (4\bar{\mathbf{M}})u_{t-\Delta t} + (\bar{\mathbf{M}})u_{t-2\Delta t} \quad (6)$$

O comportamento desses esquemas tradicionais de avanço no tempo utilizando o MEC é semelhante ao que se observa nos outros métodos mencionados, mas existem sérias

particularidades que devem ser consideradas. Inicialmente, devem ser utilizados esquemas incondicionalmente estáveis, uma vez que as condições de estabilidade normalmente definidas nos métodos de domínio discreto não podem ser aplicadas diretamente ao MEC. Em segundo lugar, o MEC possui uma formulação mista, na qual o potencial e sua derivada normal são calculados simultaneamente. Assim, o esquema de integração de Houbolt é incondicionalmente estável para o Método dos Elementos Finitos, mas é instável com o MECDR para passos Δt muito reduzidos, conforme se poderá observar.

5. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Para avaliar as características da MECDR resolveu-se o problema da barra homogênea e isotrópica, engastada na extremidade esquerda e sujeita a uma carga de impacto, vide Fig. 3.

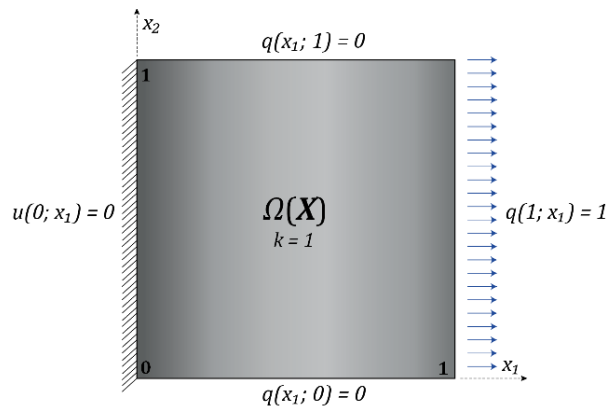


Figura 3 – Barra engastada e condições de contorno.

Para os primeiros experimentos numéricos, toma-se uma malha de 80 elementos no contorno e 25 pontos no interior do domínio. Considerando os pontos do engaste, são 69 graus de liberdade no total. Subsequentemente, malhas mais refinadas são utilizadas. Nas figuras, a notação na forma 20/40 indica, por exemplo, uma malha com 20 elementos no contorno (EC) e 40 pontos internos (PI). Na Fig. 4, apresenta-se a curva de resposta referente ao potencial ou deslocamento no ponto situado na extremidade direita da barra ($x_1 = 1$), em que uma tensão unitária e constante ao longo do tempo foi aplicada.

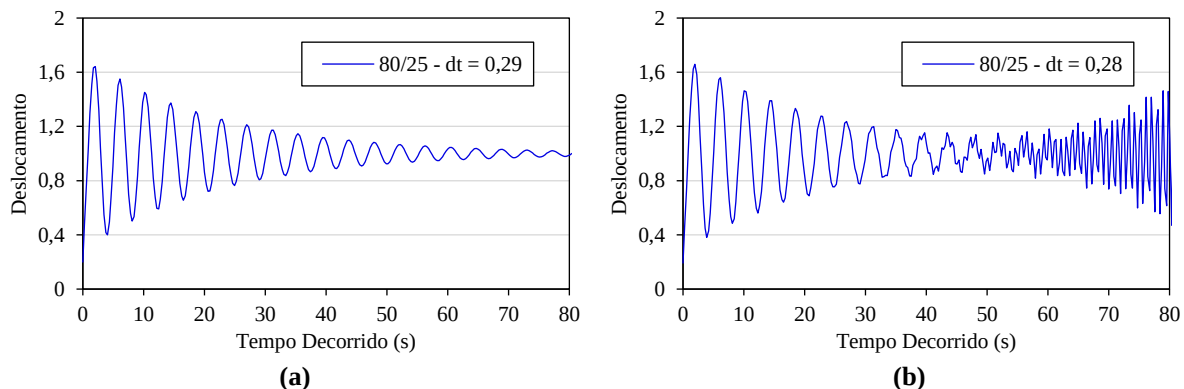


Figura 4 – Resposta do potencial para o MECDR usando 80 EC e 25 PI.

Na Fig. 4a, os valores foram obtidos com um passo igual a 0,29 segundos, que é o valor mínimo capaz de produzir uma solução estável. Nota-se que há um forte amortecimento fictício, típico do esquema Houbolt de integração no tempo e, em razão disso, a solução tende ao valor estacionário a partir 80 segundos. Caso se reduza o passo de integração para 0,28

segundos, a mesma malha produz instabilidade, conforme se observa na Fig. 4b. Diferentemente das expectativas usuais, a instabilidade se processa após um certo tempo de resposta, que aparentemente corresponderia a solução esperada. Tudo indica que o acúmulo de erros de precisão favorece a instabilidade do algoritmo, após um determinado tempo de resposta.

Em um segundo momento, na Fig. 5, mantém-se a mesma malha de elementos no contorno e refina o número de pólos no interior do domínio, isto é, de 25 para 256 pontos internos (340 graus de liberdade).

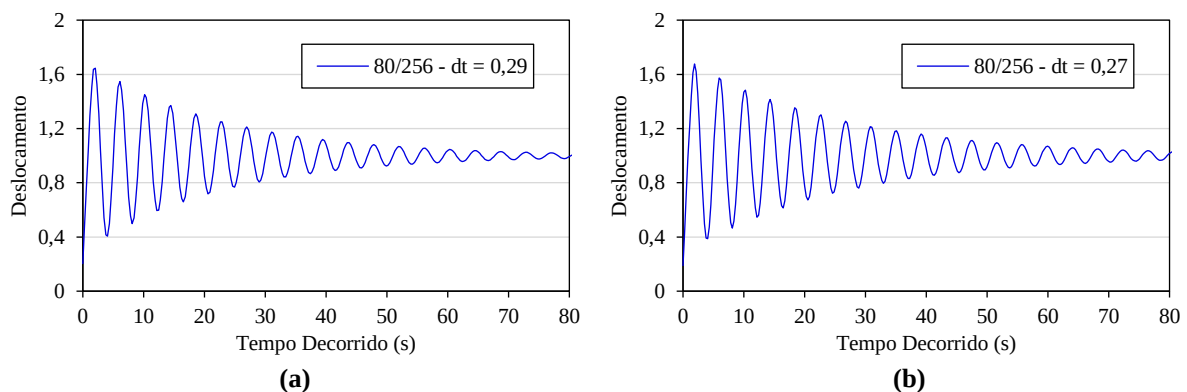


Figura 5 – Resposta do potencial para o MECDR usando 80 EC e 256 PI.

Observando a Fig. 5a, percebe-se que o aumento da quantidade de graus de liberdade gerada pela inserção de um número maior de pólos não reduz a intensidade do amortecimento fictício, mas reduz o valor passo de integração e assim atenua os efeitos do amortecimento fictício. De forma complementar, é possível encontrar respostas estáveis e levemente menos amortecidas com o passo de integração igual a 0,27 segundos, conforme apresentado na Fig. 5b. Já a curva de resposta para o passo igual a 0,26 s é instável, conforme mostra a Fig. 6.

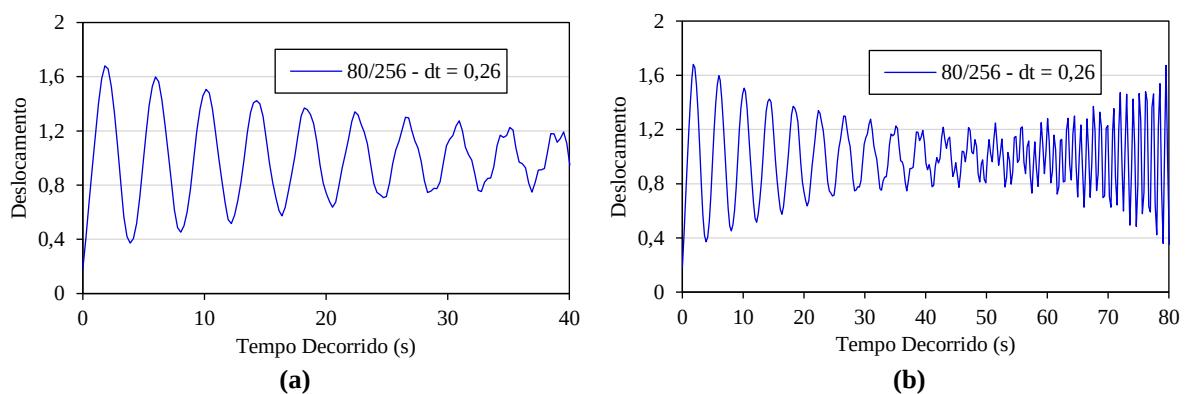


Figura 6 – Resposta do potencial para o MECDR indicando uma falsa solução estável.

Como demonstra a Fig. 6a, uma avaliação precipitada da solução, colhendo valores de resposta em até 40 segundos, indicaria uma falsa solução estável; no entanto, estendendo-se a resposta em até 80 segundos, observa-se a instabilidade (ver Fig. 6b).

Contudo, resultados de melhor qualidade, ou seja, com menos amortecimento fictício, somente podem ser obtidos com passos de integração mais reduzidos, o que implica na necessidade de refinamento tanto da malha de elementos no contorno quanto na densidade de pólos no interior do domínio. Assim, na Fig. 7, apresenta-se os resultados obtidos para uma

malha de 320 elementos de contorno e 625 pólos no interior do domínio (949 graus de liberdade).

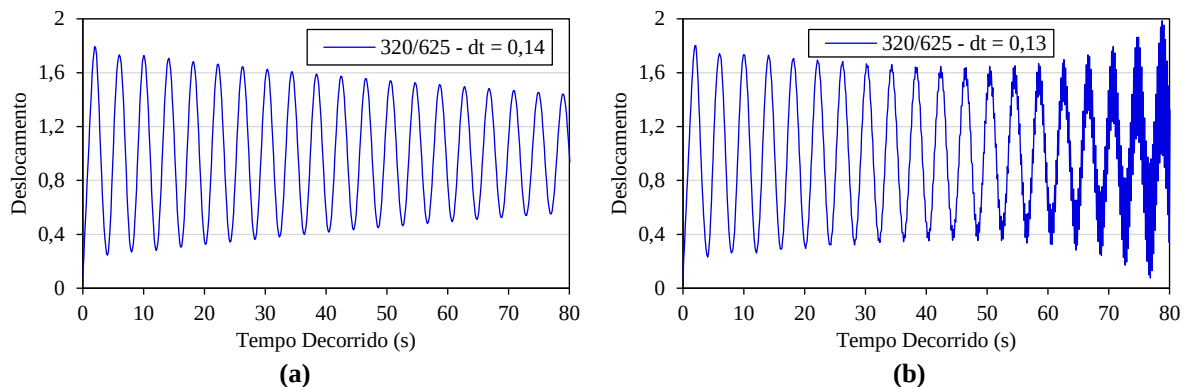


Figura 7 – Resposta do potencial para o MECDR usando 320 EC e 625 PI.

Na Fig. 7, é possível atestar esta expectativa. Assim sendo, o passo mínimo com relação ao qual se garante a estabilidade permanente da resposta para esta malha mais refinada, considerando as variáveis e propriedades da barra examinada, encontra-se no valor de 0,14 segundos (ver Fig. 7a). Percebe-se que o amortecimento fictício da resposta declinou significativamente. Aqui, analogamente a primeira curva de resultados (isto é, 80/25), é possível encontrar respostas estáveis e levemente menos amortecidas com o passo de integração igual a 0,13 segundos, conforme apresentado na Fig. 7b. Entretanto, colhendo valores de resposta em até 40 segundos, indicaria uma falsa solução estável. A título de informação, neste momento, cabe destacar que, reduzindo-se o valor do passo de integração para 0,12 segundos, o comportamento instável da resposta aparece rapidamente.

De forma complementar, na Fig. 8, apresenta-se a curva de resposta referente às tensões no ponto situado na extremidade engastada da barra ($x_1 = 0$), para essa mesma malha, ou seja, 320 elementos de contorno e 625 pólos no interior do domínio.

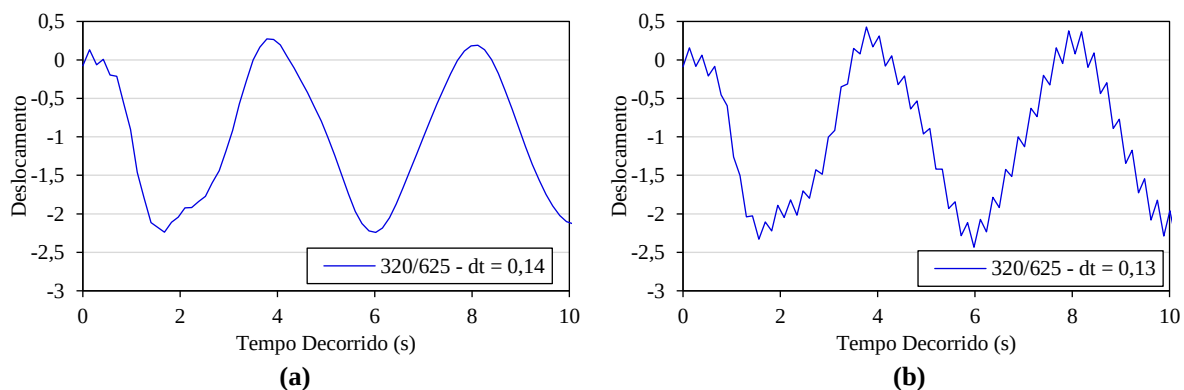


Figura 8 – Resposta para a tensão no engaste para o MECDR usando 320 EC e 625 PI.

Na Fig. 8, as mesmas observações sobre as respostas do potencial são válidas para as tensões, embora os resultados encontrados para esta grandeza sejam consideravelmente menos precisos comparativamente aos valores do potencial.

Por fim, a Fig. 9 exhibe, de forma geral, uma curva apresentando o valor do passo mínimo para a obtenção de uma resposta estável ao longo do tempo para malhas de 80, 160, 320 elementos no contorno, variando o número de pólos no interior do domínio. Destaca-se, neste momento, que a notação plotada no eixo x representa a raiz quadrada dos pontos internos, ou

seja: a notação na forma 80EC/20 indica, uma malha com 80 elementos no contorno e 400 pontos internos.

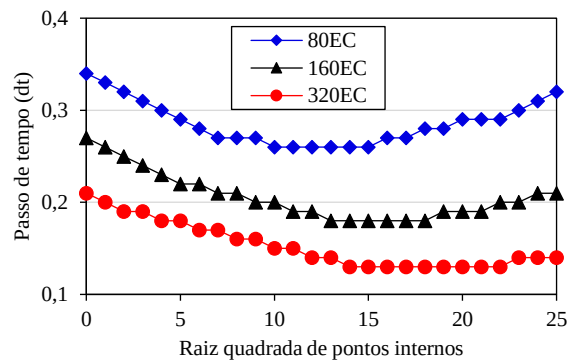


Figura 9 – Valor do passo mínimo necessário para integração estável em função das malhas.

Nota-se, na Fig. 9, que quanto mais refinada é a malha, menor é o valor do passo capaz de produzir soluções estáveis. Contudo, a inserção de numerosos polos relativamente à quantidade de pontos nodais no contorno pode demandar um aumento no valor do passo mínimo, em razão de possíveis problemas de condicionamento matricial, que devem ser objeto de pesquisa futura.

CONCLUSÕES

O desenvolvimento dessa pesquisa aborda um problema clássico envolvendo impacto, em que se procura dar continuidade aos estudos já realizados sobre a aplicabilidade da formulação com Dupla Reciprocidade (MECDR), entretanto dando ênfase aos fatores que garantem a estabilidade do esquema de avanço no tempo. No que tange ao esquema de integração de Houbolt, duas variáveis podem ser alteradas: o passo no avanço no tempo e a malha, considerando tanto o número de elementos no contorno como a quantidade de pontos interpolantes no interior do domínio.

O método de integração temporal proposto por Houbolt é incondicionalmente estável para os métodos discretos de domínio, como o Método dos Elementos Finitos, mas não o é para o MEC. A diminuição do avanço de tempo leva à instabilidade, enquanto o aumento de seu valor reduz a precisão dos resultados, por introduzir alta dissipação numérica, reduzindo a amplitude da resposta e distorcendo o seu período. Portanto, é fundamental encontrar um valor mínimo estável para o passo, que garanta precisão e estabilidade. Isto somente pode ser alcançado com o refinamento da malha, incluindo também uma densidade adequada de pontos interpolantes no interior.

De modo geral, a natureza do MECDR permite simulações acessíveis para resposta dinâmica, entretanto esta formulação não é uma técnica de interpolação simples e, como consequência, muita das vezes pode acarretar em instabilidade produzida por mau condicionamento matricial. É relevante enfatizar que o problema regido pela Equação de Helmholtz, o tratamento para lidar com o termo de domínio restante baseou-se na formulação do MECDR. Nesse contexto, as matrizes geradas por meio desse procedimento foram submetidas à discretização temporal, utilizando o esquema de integração de Houbolt, em que o mesmo é conhecido por ser incondicionalmente estável; entretanto, observou-se ao decorrer dos experimentos, a necessidade de encontrar um passo mínimo, suficiente para não induzir a instabilidade na resposta e capaz de produzir resultados com precisão satisfatória.

REFERÊNCIAS

- Brebbia, C. A., & Walker, S. (1980). *Fundamentals of boundary element methods*. N-B, London.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C., & Wrobel, L. C. (1984). *Boundary element techniques*. Bedim Springer.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C., & Wrobel, L. C. (2012). Boundary element techniques: theory and applications in engineering. *Springer Science & Business Media*.
- Butkov, E. (1973). *Mathematical physics* (Vol. unico).
- Cavalcanti, M. C., & Telles, J. C. (2003). Biot's consolidation theory—application of BEM with time independent fundamental solutions for poro-elastic saturated media. *Engineering analysis with boundary elements*, 27(2), 145-157.
- Chino, E., & Tosaka, N. (1998). Dual reciprocity boundary element analysis of time-independent Burger's equation. *Engineering analysis with boundary elements*, 21(3), 261-270.
- Golberg, M. A., & Chen, C. S. (1994). The theory of radial basis functions applied to the BEM for inhomogeneous partial differential equations. *Boundary Elements Communications*, 5(2), 57-61.
- Golberg, M., Chen, C. S., Bowman, H., & Power, H. (1998). Some comments on the use of radial basis functions in the dual reciprocity method. *Computational mechanics*, 21(2), 141-148.
- Haisheng, R. (1989). The symmetric dynamic boundary element method(SDBEM) for transient elastodynamic analysis. *SOFTWARE ENG. WORKSTATIONS*, 5(1), 22-27.
- Houbolt, J. C. (1950). A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 17(9), 540-550.
- Kanarachos, A., & Provatidis, C. (1987). Performance of mass matrices for the BEM dynamic analysis of wave propagation problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 63(2), 155-165.
- Kanarachos, A., & Provatidis, C. H. (1992). Potential and wave propagation problems using the boundary element method and BEM-subregions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 9(2), 117-124.
- Loeffler, C. F., & Mansur, W. J. (1987). Analysis of Time Integration Schemes for Boundary Element Applications to Transient Wave Propagation Problems. *Computational Mechanics Publications*, 105-124.
- Loeffler, C. F., & Mansur, W. J. (1989). Dual reciprocity boundary element formulation for transient elastic wave propagation analysis in infinite domains. *Advances in Boundary Elements*, 2, 1023-1036.
- Mansur, W. J., & Brebbia, C. A. (1985). Further developments on the solution of the transient scalar wave equation. *Time-dependent and Vibration Problems*, 87-123.
- Nardini, D., & Brebbia, C. A. (1983a). A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elements. *Applied Mathematical Modelling*, 7(3), 157-162.
- Nardini, D., & Brebbia, C. A. (1983b). Transient dynamic analysis by the boundary element method. *Boundary Elements*, 719-730.
- Niku, S. M., & Adey, R. A. (1996). Computational aspect of the dual reciprocity method for dynamics. *Engineering analysis with boundary elements*, 18(1), 43-61.
- Partridge, P. W., & Sensale, B. (2000). The method of fundamental solutions with dual reciprocity for diffusion and diffusion-convection using subdomains. *Engineering analysis with boundary elements*, 24(9), 633-641.
- Partridge, P. W., Brebbia, C. A., & Wrobel, C. L. (1992). *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. London: Computational Mechanics Publications and Elsevier.
- Potter, D. (1973). *Computational Physics*. John Wiley.
- Šarler, B., & Kuhn, G. (1998). Dual reciprocity boundary element method for convective-diffusive solid-liquid phase change problems, Part 1. Formulation. *Engineering analysis with boundary elements*, 21(1), 53-63.
- Sensale, B., Partridge, P. W., & Creus, G. J. (1970). The dual reciprocity boundary element method in viscoelasticity. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, 14.
- Silva, N. A., & Venturini, W. S. (1988). *Dual reciprocity process applied to solve bending plates on elastic foundations*. *Boundary Elements X: Stress Analysis*. Southampton: Cml.
- Tanaka, M., & Chen, W. (2001). Dual reciprocity BEM applied to transient elastodynamic problems with differential quadrature method in time. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(18-19), 2331-2347.
- Wrobel, L. C., & Brebbia, C. A. (1981). A formulation of the boundary element method for axisymmetric transient heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 24(5), 843-850.
- Wrobel, L. C., & DeFigueiredo, D. B. (1991). A Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Convection-Diffusion Problems with Variable Velocity Fields. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 8(6), 312-319.
- Zhu, S., & Zhang, Y. (1993). Solving general field equations in infinite domains with dual reciprocity boundary element method. *Engineering analysis with boundary elements*, 12(4), 241-250.