DETERMINAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS EM EIXOS TRINCADOS UTILIZANDO O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Vinícius Silvestre Cordeiro Lopes [1] (vsclopes@hotmail.com), Marco Tulio C. Faria [2] (mtfaria.ufmg@gmail.com)

[1] Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG); Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica (PPGMEC)
[2] Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG); Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica (PPGMEC)

RESUMO: *Este estudo tem como objetivo analisar o comportamento dinâmico de eixos com trincas por fadiga em mancais de filme fluido. O uso de modelos de elementos finitos é essencial para compreender as características dinâmicas de componentes mecânicos e prever trajetórias de trincas, melhorando a previsão de falhas e executando correções em projetos. Essa análise busca aprimorar ferramentas de análise de engenharia para incluir propriedades físicas e geométricas de trincas, compreendendo a resposta de eixos trincados e avaliando parâmetros geométricos, inerciais, de mancais e operacionais. Ao considerar trincas na análise dinâmica, observa-se sua influência nas frequências naturais, ressaltando a importância de sua consideração em sistemas rotativos. Este estudo avança na compreensão dos efeitos de trincas em sistemas rotativos, apontando para oportunidades de melhoria na predição de velocidades críticas.*

PALAVRAS-CHAVE: *COMPORTAMENTO DINÂMICO, FALHAS POR FADIGA, PROPAGAÇÃO DE TRINCA, EIXOS TRINCADOS.*

DETERMINATION OF NATURAL FREQUENCIES IN CRACKED SHAFTS USING THE FINITE ELEMENT METHOD

ABSTRACT: *This study aims to analyze the dynamic behavior of fatigue-cracked shafts in fluid film bearings. The use of finite element models is crucial to grasp the dynamic characteristics of mechanical components and predict crack paths, enhancing failure prediction and facilitating design corrections. This analysis aims to refine engineering analysis tools, incorporating physical and geometric properties of cracks, comprehending the response of cracked shafts, and assessing geometric, inertial, bearing, and operational parameters. By considering cracks in dynamic analysis, their influence on natural frequencies is observed, underscoring their significance in rotary systems. This study advances the understanding of crack effects in rotary systems, pointing towards opportunities for improving critical speed prediction.*

KEYWORDS: *DYNAMIC BEHAVIOR, FATIGUE FAILURES, CRACK PROPAGATION, CRACKED SHAFTS.*

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de procedimentos de elementos finitos para analisar a resposta dinâmica de máquinas rotativas com falhas melhora a previsão em várias condições de operação e fornece informações cruciais para aprimorar o monitoramento de sistemas rotativos.

De acordo com Chen, 2022, o uso de modelos de elementos finitos permite analisar características dinâmicas de componentes mecânicos, identificando trajetórias de trincas e falhas. Isso é vital para correções de projeto e identificação de problemas em campo. O aprofundamento desse estudo é essencial, considerando a presença comum de falhas em máquinas rotativas, veículos e sistemas mecânicos.

Vance, 1988, divide o estudo de sistemas rotativos em predição de velocidades críticas, frequências naturais de torção, balanceamento de rotores e frequências de instabilidade. Vance, 1988, também explora a instabilidade em rotores, avaliando os parâmetros influentes e as velocidades associadas.

O método dos elementos finitos (MEF) tem sido usado para analisar sistemas rotativos com falhas. Ele prevê a resposta dinâmica de eixos trincados suportados por mancais diversos. Lin, 2009, destaca que esse método auxilia na predição de falhas em máquinas rotativas, relacionando trincas com direções de propagação.

Em fases iniciais de projeto, modelos de elementos finitos avaliam comportamentos de sistemas rotativos com defeitos variados e em várias operações. Kumar, 2009, enfatiza que o método dos elementos finitos é escolhido para avaliar falhas, abrangendo trincas transversais, múltiplas trincas e trincas oblíquas. Resultados numéricos geram resultados vitais para desenvolver procedimentos de monitoramento e manutenção.

A modelagem de eixos trincados usando mudança local de flexibilidade é aplicada em estudos sobre análise dinâmica de eixos rotativos em mancais flexíveis. Dong, 2003, e Brant, 2007, investigam o impacto do tamanho de trincas transversais em rotores sob diferentes operações. Dong, 2003, baseia-se na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, enquanto Brant, 2007, utiliza a teoria de vigas de Timoshenko.

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um procedimento computacional baseado no método de elementos finitos para analisar a resposta dinâmica de eixos trincados suportados por mancais flexíveis.

Portanto esse trabalho se faz necessário para o desenvolvimento de ferramentas de análise de engenharia que permitam incluir de forma mais precisa as propriedades físicas dos componentes de sistemas rotativos e a geometria de diferentes tipos de trincas, contribuindo para ampliar o conhecimento acerca das respostas de eixos trincados. Avaliando também a influência de parâmetros geométricos e inerciais do eixo, de características dos mancais e de condições de operação sobre a

resposta dinâmica de eixos trincados, realizando por meio de um procedimento de elementos finitos que seja capaz de modelar o conjunto de forma mais detalhada possível.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

Para o desenvolvimento dos procedimentos propostos, analisa-se o comportamento de um eixo de turbomáquina industrial, cujas propriedades estão descritas na Tabela 1 (Zhang, 2022).

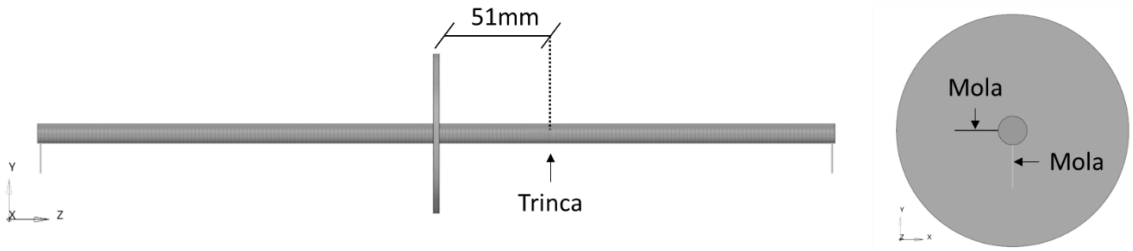
TABELA 1. Dimensões do rotor analisado

Diâmetro do Eixo (mm)	10
Diâmetro do Disco (mm)	80
Comprimento do eixo (mm)	400
Material do disco	Aço
Material do eixo	
Rigidez dos Mancais (N/mm)	10000

Fonte: Zhang (2022).

A Figura 1 mostra um desenho esquemático de um sistema eixo-disco de uma turbomáquina industrial, que se encontra descrito no trabalho de Zhang, 2022.

FIGURA 1. Desenho esquemático do sistema eixo-disco analisado.



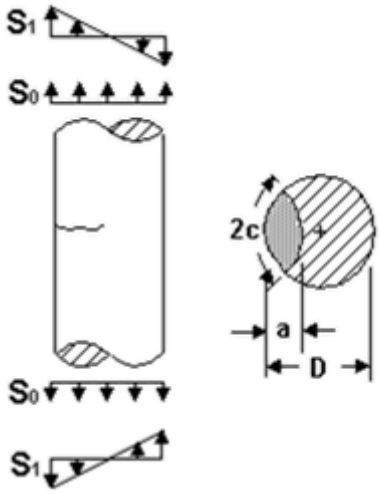
De acordo com Zhang, 2022, o rotor apresentado na Figura 1 se trata de um rotor biapoiado e possui velocidades de operação de 2.890 rpm e 10.166 rpm. Segundo Zhang, 2022, houve a necessidade de observar trincas por fadiga em sistemas rotativos por ser uma falha comum na indústria. Zhang, 2022, focou o seu trabalho em métodos de energias associados aos modos de vibração.

2.2 Propagação da trinca por fadiga

Nessa etapa, o foco recai na observação e rastreamento da expansão de trincas, utilizando o software NASGRO®, com base nos dados ilustrados na Figura 2.

No estudo da propagação de uma trinca, são importantes a observação e rastreamento da expansão de trincas. Neste trabalho, o pacote computacional NASGRO® é empregado para analisar a propagação de trinca transversal em um eixo. A Figura 2 mostra um desenho com detalhe da distribuição de tensões em seções transversais de um eixo trincado, gerado pelo pacote computacional NASGRO®.

FIGURA 2. Desenho esquemático da distribuição de tensões normais em seções de um eixo trincado.



Fonte: Pacote computacional NASGRO® (2023).

Para este trabalho, são considerados 700.000 ciclos de operação e uma profundidade inicial de trinca transversal de 0,33 mm. Um carregamento lateral arbitrário, associado ao desbalanceamento de massa do disco, é considerado para efetuar a propagação de trinca, visto que em máquinas rotativas, o carregamento dinâmico é variável devido aos efeitos dinâmicos do sistema e a faixa de operação do rotor.

Para o estudo do comportamento dinâmico de eixos trincados, implementa-se um modelo de elementos finitos do rotor, baseado na Figura 1 e nos dados da Tabela 1. Para representar o eixo, são empregados elementos finitos tetraédricos, enquanto o disco é modelado por meio de elementos finitos de placa.

Neste trabalho são utilizados 83.136 elementos tetraédricos para representar o eixo da estrutura, 1.538 elementos de placa para representar o disco e 4 elementos de mola para representação dos mancais.

A escolha de utilizar elementos tetraédricos na representação do eixo permite colocar a trinca, quando necessário, posicionada a 51 mm do centro do disco. Isso é especialmente relevante para considerar as tensões e deformações nas várias direções sob as quais o eixo é submetido às forças e alteração da flexibilidade local do eixo.

Após o desenvolvimento do primeiro modelo de elementos finitos, sem trinca, a trinca poderá ser inserida na posição destacada na Figura 1. Considerando-se trincas transversais no eixo, conforme mostrado na Figura 3, implementam-se três modelos de elementos finitos do rotor com trincas de diferentes dimensões, totalizando quatro modelos em elementos finitos. A Tabela 2 apresenta os parâmetros geométricos das trincas transversais analisadas.

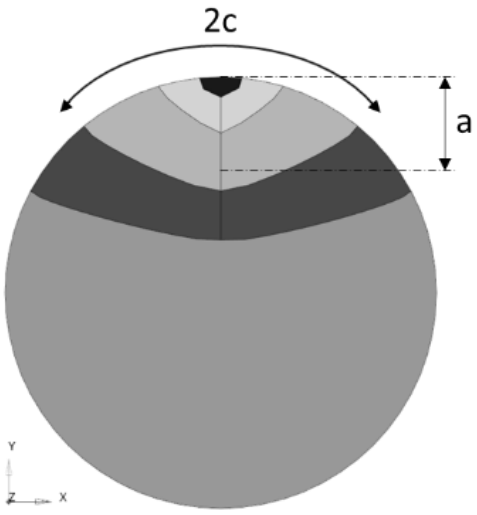
TABELA 2. Parâmetros geométricos das trincas transversais.

Modelo	c (mm)	a (mm)	2c/a
1	0,00	0,00	0,00
2	1,48	1,30	2,28
3	3,42	2,64	2,59
4	5,43	3,78	2,87

Fonte: Pacote computacional NASGRO® (2023).

As trincas mostradas na Figura 3 representam o mapa de propagação de trinca transversal por fadiga no eixo gerado pelo pacote computacional NASGRO®.

FIGURA 3. Passos de propagação da trinca no eixo.



Fonte: Autor (2023).

Após definido os parâmetros geométricos de trincas, a equação diferencial do movimento de um rotor para um elemento finito é apresentada na Equação 1.

$$([M^e] + [N^e])\{\ddot{q}^e\} - \dot{\theta}[G^e]\{\dot{q}^e\} + [K^e - K^t]\{q^e\} = \{Q^e\} \quad (1)$$

Onde:

M^e: Matriz de inércia de translação do elemento (e);

N^e: Matriz de inércia de rotação do elemento;

G^e: Matriz de efeitos giroscópicos do elemento;

K^e: Matriz de rigidez do elemento;

K^t: Matriz de rigidez da trinca (t);

Q^e: Forças generalizadas no elemento;

$\ddot{q}^e$: Vetor aceleração do elemento;

$\dot{q}^e$: Vetor velocidade do elemento;

q^e: Vetor deslocamento do elemento;

$\dot{\theta}$: Velocidade de rotação do eixo.

Para o rotor modelado por elementos finitos, foi considerado elementos de mola para representação de rigidez dos mancais, inserção de trinca para representar flexibilidade local, efeitos giroscópicos e foram desconsideradas massas desbalanceadas e excentricidade de eixo.

Na análise de propagação da trinca transversal, considera-se que exista uma força lateral desbalanceadora responsável por seu crescimento. Então, utilizando-se o pacote computacional ABAQUS®, obtêm-se os problemas de autovalor associados aos modelos de elementos finitos para os rotores trincados, cujas propriedades de trinca estão dadas na Tabela 2.

3. RESULTADOS

Para facilitar a apresentação dos resultados, esta seção é subdividida em três subseções: VALIDAÇÃO, PROPAGAÇÃO DE TRINCA e FREQUÊNCIAS NATURAIS DO ROTOR TRINCADO.

3.1 Validação

A seguir é apresentado o resultado comparativo do primeiro modo obtido no rotor de Zhang, 2022, e no rotor analisado neste trabalho, desconsiderando efeitos giroscópicos.

TABELA 3. Comparação das frequências naturais dos primeiros modos de vibração.

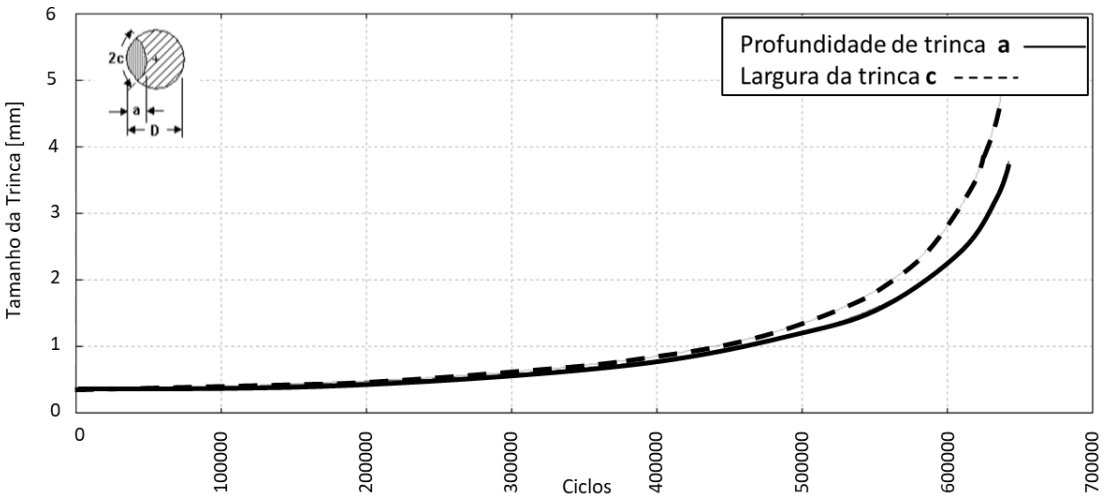
	Zang, 2022	Rotor em estudo
1º Modo (Hz)	48,0	47,6

Zhang, 2022, desenvolveu inicialmente um rotor bi apoiado com as mesmas dimensões dos dados apresentados na Tabela 1, desconsiderando no primeiro momento a presença da trinca e efeitos giroscópicos e de cisalhamento. Para a comparação realizada na Tabela 3, desconsiderou-se efeitos cisalhantes e giroscópicos também.

3.2 Propagação de Trincas

A Figura 4 apresenta as curvas de variação da profundidade e da largura da trinca transversal pelo número de ciclos. Essas curvas são de extrema importância pois fornecem o comportamento da trinca com a variação de ciclos.

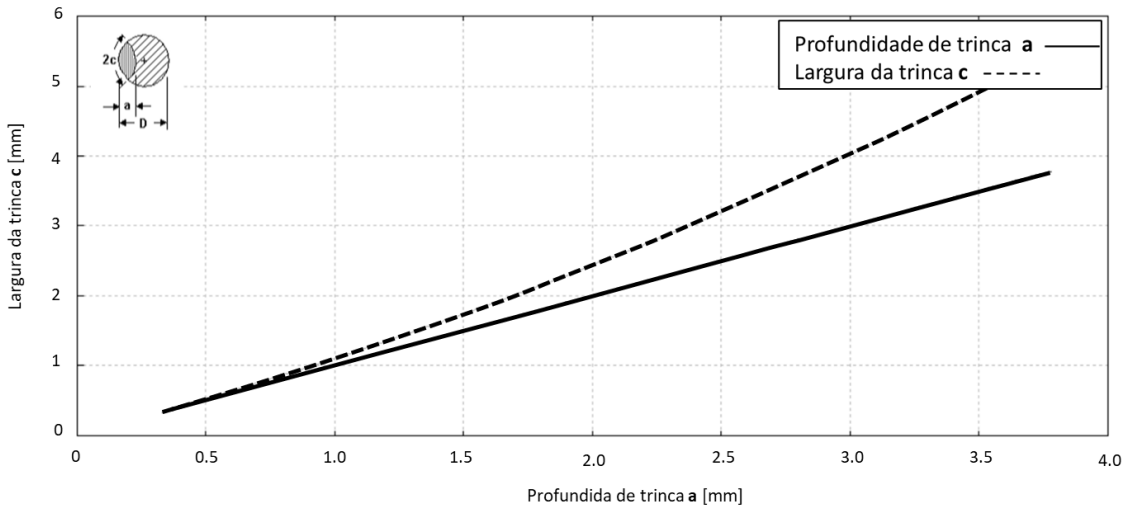
FIGURA 4. Variação da profundidade e da largura da trinca versus o número de ciclos.



Fonte: Pacote computacional NASGRO® (2023).

Na Figura 4, observa-se uma relação linear de crescimento de trinca até aproximadamente 350.000 ciclos. Após este ponto, a curva adquire um comportamento não linear. A Figura 5 apresenta a relação de crescimento de trinca na direção longitudinal e radial.

FIGURA 5. Relação entre profundidade e largura da trinca durante a propagação.



Fonte: Pacote computacional NASGRO® (2023).

Na Figura 5, observa-se que a relação de crescimento da largura de trinca (c) com sua profundidade (a), acontece de forma quase proporcional até a profundidade de trinca de 1,5 mm. Após o valor de 1,5 mm, a profundidade de trinca apresenta avanços maiores que que a largura de trinca, que se comporta de forma diretamente proporcional durante a propagação.

3.3- Frequências naturais do rotor trincado

As tabelas 4 e 5 mostram os valores de frequências dos modelos com trinca e sem trinca para duas velocidades de rotação – 2.890 e 10.116 rpm.

TABELA 4. Valores das três primeiras frequências naturais para o rotor a 2.890 rpm.

Modos	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4
1º Modo (Hz)	94,80	94,81	95,14	94,00
2º Modo (Hz)	541,00	514,44	517,27	513,97
3º Modo (Hz)	1022,15	1022,15	1031,98	1031,64

Fonte: Autor (2023).

Observa-se que os três primeiros modos apresentam variação de valores de frequências conforme acontece o avanço de trinca. Esse fato pode ser melhor observado nas Figuras 6, 7 e 8.

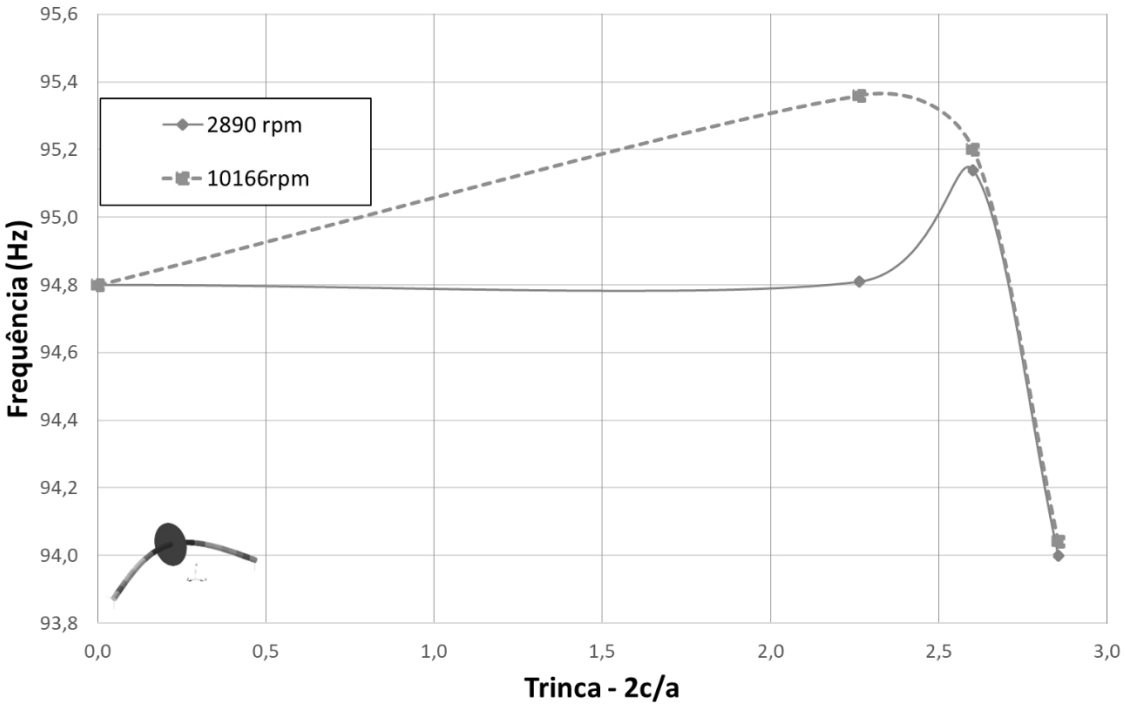
TABELA 5. Valores das três primeiras frequências naturais para o rotor a 10.166 rpm.

Modos	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4
1º Modo (Hz)	94,80	95,36	95,20	94,04
2º Modo (Hz)	561,14	565,55	565,14	563,79
3º Modo (Hz)	1022,58	1032,24	1032,19	1031,98

Fonte: Autor (2023).

Verifica-se que a propagação de trinca apresenta alguns valores variados de frequências quando comparado ao modelo sem trinca. A Figura 6 mostra as curvas de variação da primeira frequência natural do rotor operando nas velocidades de 2.890 e 10.166 rpm em relação à razão geométrica entre largura e profundidade de trinca.

FIGURA 6. Primeiro modo de vibração e curvas de variação da primeira frequência natural do rotor em duas velocidades de operação em função do tamanho da trinca.



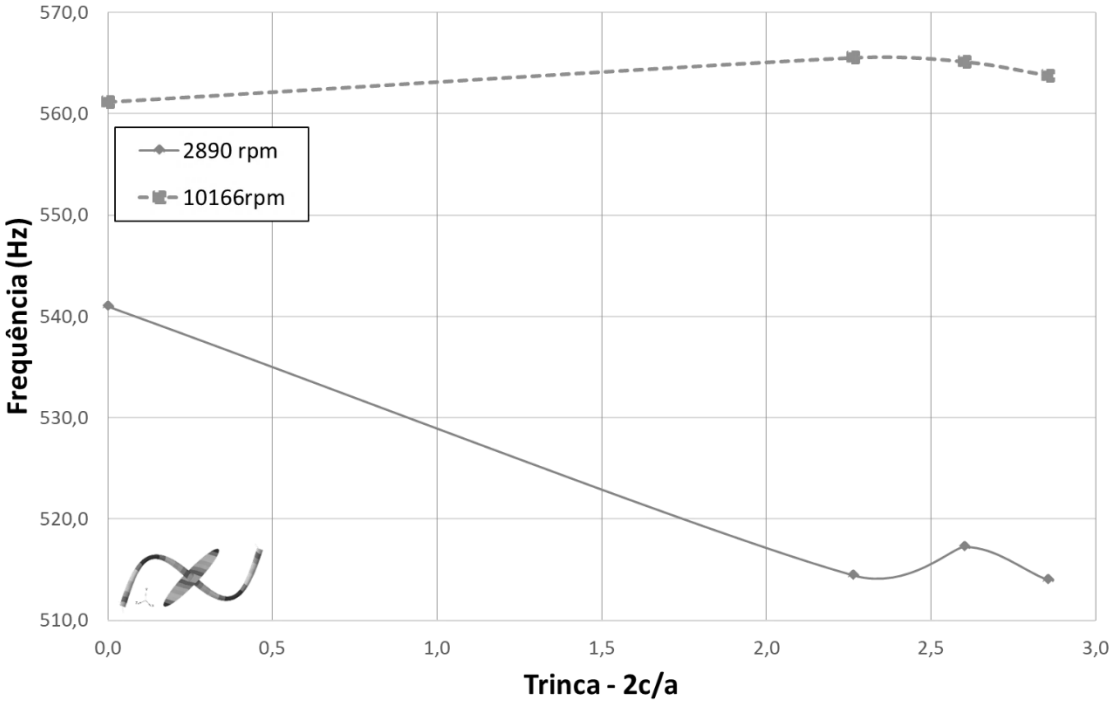
Fonte: Pacote computacional NASGRO® (2023).

A Figura 6 mostra que o comportamento da variação de frequência natural é similar para as duas velocidades analisadas até a relação de trinca (2c/a) igual a 2,3. Após isso, para a velocidade de 2.890 rpm, existe um incremento da frequência para próxima da frequência na velocidade de 10.166 rpm. Após essa aproximação, pode ser observado que existe uma determinada razão de tamanho de trinca que gera uma tendência decrescente no valor da primeira frequência natural do rotor.

Observa-se também na Figura 6, no canto inferior esquerdo a representação do primeiro modo de vibração para a faixa de velocidade analisada.

A Figura 7 apresenta as curvas de variação da primeira segunda frequência natural do rotor operando nas velocidades de 2.890 e 10.166 rpm em relação à razão geométrica entre largura e profundidade de trinca.

FIGURA 7. Segundo modo de vibração e curvas e variação da segunda frequência natural do rotor em duas velocidades de operação em função do tamanho da trinca.

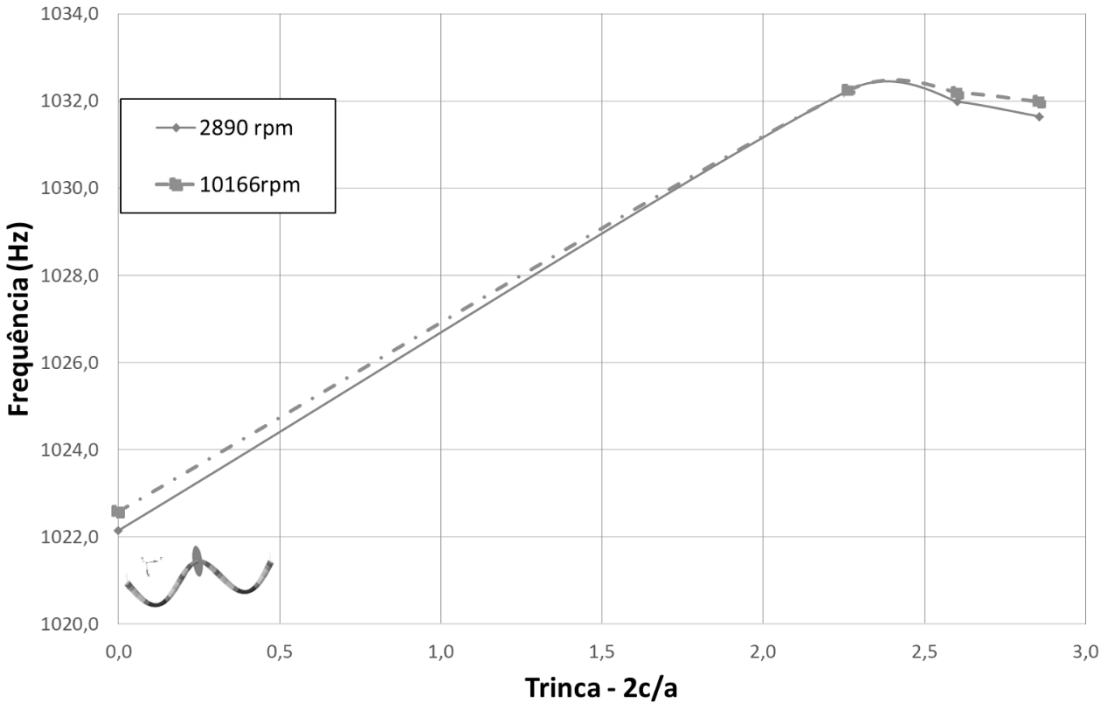


Fonte: Pacote computacional NASGRO® (2023).

Pela observação das curvas na Figura 7, pode-se verificar que a frequência natural tende a diminuir para ambas as velocidades após a relação do tamanho de trinca (2c/a) ser maior que 2,6. Pode-se constatar que os efeitos giroscópicos e o cisalhamento passam a gerar uma diferença considerável nos valores da segunda frequência natural nas duas velocidades de operação.

As curvas de variação da primeira terceira frequência natural do rotor operando nas velocidades de 2.890 e 10.166 rpm em relação à razão geométrica entre largura e profundidade de trinca estão mostradas na Figura 8. Vale ressaltar que, o segundo modo de vibração na Figura 7, é apresentado pela imagem no canto inferior esquerdo.

FIGURA 8. Terceiro modo de vibração e curvas variação da terceira frequência natural do rotor em duas velocidades de operação em função do tamanho da trinca.



Fonte: Pacote computacional NASGRO® (2023).

As curvas da Figura 8 indicam que os efeitos giroscópicos e o cisalhamento têm influência secundária no terceiro modo de vibração do rotor. De forma similar às curvas mostradas nas Figuras 6 e 7, observa-se uma tendência inicial crescente do valor de frequência natural e, a partir de determinada razão entre largura e profundidade da trinca, ocorre uma tendência decrescente.

Observa-se no canto inferior esquerdo, a representação do terceiro modo de vibração da estrutura.

4. CONCLUSÕES

Em vista das análises detalhadas e dos resultados obtidos ao longo deste estudo, pode-se constatar que a aplicação dos procedimentos de elementos finitos na análise da resposta dinâmica de máquinas rotativas com falhas oferece uma abordagem importante para compreender e predizer o comportamento desses sistemas. Os resultados apresentados indicam que há grande potencial para o desenvolvimento de modelos de análise de rotores trincados que possam trazer informações técnicas relevantes para o avanço de técnicas de manutenção preditiva. À medida que a complexidade da análise avança, a contínua exploração e refinamento dos procedimentos analítico-

computacionais têm o potencial de gerar inovações significativas e proporcionar um impacto positivo na predição do comportamento de sistemas rotativos com falhas mecânicas.

Com base nos resultados deste trabalho, é possível concluir que:

1- A trinca por fadiga de eixo tende a obedecer a um comportamento linear de crescimento até determinado momento, e após isso, a largura da trinca (2c) apresenta uma taxa de crescimento maior do que a trinca longitudinal (a);

2- Os primeiros modos de vibração do rotor não apresentam diferenças significativas de frequências para variadas velocidades. Todavia o aumento de trinca inicialmente é acompanhado pela elevação da frequência natural e, posteriormente, pela queda no valor desta frequência;

3- Os segundos modos de vibração apresentam diferenças nos valores de frequências naturais para as duas velocidades analisadas. Há uma pequena elevação nos valores de frequência natural até a relação da largura e profundidade da trinca (2c/a) igual a 2,3. Após este tamanho de trinca, há uma pequena diferença nas curvas de frequência natural até a relação (2c/a) igual a 2,6, a partir da qual observa-se uma tendência decrescente em ambas as curvas;

4- Os terceiros modos apresentam um comportamento parecido com os primeiros modos. As frequências naturais não apresentam diferenças significativas. Quando a trinca é introduzida no modelo, há um aumento da frequência natural e, posteriormente, com o avanço da trinca, ocorre um decaimento. Vale ressaltar que a variação da frequência natural de modelos com trinca acontece devido à alteração da flexibilidade local.

DECLARAÇÃO DE RESPONSABILIDADE

Os autores são os únicos responsáveis por este trabalho.

REFERÊNCIAS

ABAQUS CAE. Pacote computacional de elementos finitos. Versão 2017. Simulia.

BRANT, B. Análise por elementos finitos da influência de descontinuidades geométricas sobre o comportamento dinâmico de rotores flexíveis. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica – Universidade Federal de Minas Gerais, 91 p., 2007.

CHEN, K. Dynamic modeling of the gear-rotor systems with spatial propagation crack and complicated foundation structure. *Mechanism and Machine Theory*, 128 p., 2022.

DONG, G. Parameter identification of a rotor with an open crack. *European Journal of Mechanics*, 8 p., 2003.

KUMAR C. A brief review on dynamics of a cracked rotor. *International Journal of Rotating Machinery*,6 p., 2009.

LIN, Y. Numerical and experimental investigations of flexural vibrations of a rotor system with transverse or slant crack. *Journal of Sound and Vibration*, 19 p., 2009.

NASGRO®. Software de propagação de trinca por fadiga. Versão 10.01. Southwesr Research Institute.

VANCE, J. Rotordynamics of turbomachinery. John Wiley, New York, USA, 388 p., 1988.

ZHANG, X. Novel energy identification method for shallow cracked rotor system. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 12 p., 2022.