



ALGORITMO BASEADO NO MÉTODO CRANK-NICOLSON $(2 + 1)$ PARA BUSCA DE SOLUÇÕES PARA A EQUAÇÃO DE WHEELER-DEWITT

H. J. Brumatto^{1,2} - hjbrumatto@iprj.uerj.br, hjbrumatto@uesc.br

G. A. Monerat¹ - monerat@iprj.uerj.br

G. Oliveira Neto³ - gilneto@fisica.ufjf.br

E. V. Corrêa Silva⁴ - eduvasquez.rj@gmail.com

F. G. Alvarenga⁵ - flavio.alvarenga@ufes.br

A. L. B. Ribeiro² - albr@uesc.br

¹Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico - Nova Friburgo, RJ, Brazil

²Universidade Estadual de Santa Cruz - Ilhéus, BA, Brazil

³Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas - Juiz de Fora, MG, Brazil

⁴Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Faculdade de Tecnologia - Resende, RJ, Brazil

⁵Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas - Vitória, ES, Brazil

Resumo. Neste trabalho estudamos a equação de Wheeler-DeWitt (WDW), importante para o estudo de efeitos quânticos no Universo primordial, para o modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) com curvatura positiva e um campo escalar conformalmente acoplado à gravitação e um fluido de radiação. Buscamos determinar numericamente a solução, em um estudo de caso, da equação de WDW (a função de onda do Universo), aplicando o método de Crank-Nicolson em $D=(2+1)$. A partir da solução calculamos o valor esperado do fator de escala. Logramos assim obter soluções na forma de pacotes de onda bem definidos, inclusive em $a = 0$, o que implica na eliminação da singularidade do modelo clássico.

Palavras-chave: Cosmologia Quântica, Método Crank-Nicolson $(2+1)$, campos escalares, Equação de Wheeler-DeWitt

1. INTRODUÇÃO

O trabalho de DeWitt [DeWitt, 1967] pode ser considerado como ponto de partida para o estudo dos efeitos quânticos no Universo primordial, a chamada Cosmologia Quântica. Desde então, a descrição coerente da era de Planck, ocorrida em um intervalo de tempo extremamente pequeno logo após o *Big Bang* (entre 10^{-43} s e 10^{-36} s, aproximadamente) e em condições tão extremas tem se tornado um desafio para as teorias cosmológicas atuais. Durante a Era de Planck, as forças fundamentais da natureza, como a gravidade, a força eletromagnética e as forças nucleares fortes e fracas, ainda não eram unificadas. Após essa Era, o Universo entrou em uma fase de rápida expansão exponencial, a

inflação cósmica [Guth, 1981]; [Linde, 1982]. Para a descrição desta fase é comum a introdução de um campo escalar como conteúdo material. Dessa forma, muitos modelos cosmológicos com fluidos e campos escalares têm sido investigados [Alvarenga e Fabris, 1995]; [Alvarenga e Fabris, 1996]; [Dodelson e Schmidt, 2020]. Em geral, esses modelos apresentam uma dinâmica complexa, mesmo classicamente; e em alguns casos exibem comportamento caótico [Monerat et al, 1998]; [Lemos et al, 2003].

Para descrição da dinâmica na era de Planck, os efeitos quânticos precisam ser considerados. Uma das formas de introduzir esses efeitos em modelos cosmológicos com fluidos e campos escalares, consiste na quantização em minisuperespaço através da combinação do procedimento de Dirac [Halliwell, 1991] com o formalismo de Schutz para fluidos relativísticos [Schutz, 1970]; [Schutz, 1971]. Nesse cenário, algumas soluções analíticas para modelos com geometria de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) com fluido perfeito e campo escalar já foram obtidas, como o modelo de FLRW com campo escalar conformalmente acoplado à gravitação com fluido de poeira [Lemos e Alvarenga, 1999], e campo escalar conformalmente acoplado à gravitação com fluido de radiação [Lemos e Monerat, 2003]. Em ambos os modelos, o campo escalar não possui massa. A introdução de um termo de massa no potencial do campo escalar conduz à quebra da integrabilidade analítica, tornando-se um fator complicador do tratamento. Dessa forma, propõe-se nesse trabalho o uso de um método de diferenças finitas no esquema Crank-Nicolson em (2+1) [Van Dijk et al, 2017] para a obtenção de soluções numéricas da equação de Wheeler-DeWitt, objeto central da cosmologia quântica. A equação de Wheeler-DeWitt, proposta por DeWitt em 1967, é uma equação funcional (e, sob certas simplificações, como as do contexto deste trabalho, uma equação diferencial) para a função de onda do Universo, e que tem, portanto, profunda relevância na teoria da gravidade quântica. A busca por soluções para esta equação é essencial para a descrição do Universo primitivo.

O trabalho está dividido como segue: na seção 2 o modelo cosmológico será construído; na seção 3 a solução numérica utilizando o método de Crank-Nicolson será apresentada; na seção 4 será feito um estudo de caso com valor determinado de massa; e finalmente a seção 5 será dedicada às considerações finais.

2. O MODELO

Será considerado aqui um modelo homogêneo e isotrópico, descrito pela geometria de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) com curvatura positiva na seção espacial e com conteúdo material representado por um fluido perfeito na forma de radiação e um campo escalar massivo conformalmente acoplado à gravitação, com massa $m = 0.1$; e uma constante cosmológica ($\Lambda = 1.5$) que fará o papel de vácuo do campo de inflação. Esse modelo pode ser descrito pela seguinte função de Hamilton

$$\mathcal{H} = \frac{p_a^2}{12} - \frac{p_\varphi^2}{2} + V_{ef}(a, \varphi) - p_T, \quad (1)$$

em que p_a , p_φ e p_T são, respectivamente, os momenta canonicamente conjugados ao fator de escala a , ao campo escalar φ e à coordenada do fluido de radiação T . O potencial efetivo $V_{ef}(a, \varphi)$ assume a forma

$$V_{ef}(a, \varphi) = 3a^2 - \frac{1}{2}\varphi^2 - \Lambda a^4 - \frac{m^2}{2}a^2\varphi^2. \quad (2)$$

O processo de quantização seguirá o formalismo de Dirac, em que elevam-se os momenta ao grau de operadores diferenciais,

$$p_a \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial a}, \quad p_\varphi \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad p_T \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial T}. \quad (3)$$

Além disso, faremos o uso do vínculo hamiltoniano $\mathcal{H} = 0$, que conduz à equação diferencial

$$\mathcal{H}\Psi(a, \varphi, T) = 0, \quad (4)$$

em que $\Psi(a, \varphi, T)$ é a função de onda do Universo. De (3), (4) e (1) obtém-se

$$-\frac{1}{12}\frac{\partial^2 \Psi(a, \varphi, \tau)}{\partial a^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi(a, \varphi, \tau)}{\partial \varphi^2} + V_{ef}(a, \varphi)\Psi(a, \varphi, \tau) - i\frac{\partial \Psi(a, \varphi, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad (5)$$

em que foi utilizada a reparametrização $T = -\tau$. O fator de escala a está restrito ao domínio $a > 0$, tal que a quantização em minisuperespaço é efetuada no semi-eixo $(0, \infty)$, e o campo escalar não possui restrição. São impostas as condições de contorno

$$\begin{aligned} \Psi(0, \varphi, \tau) &= 0, \quad \Psi(\infty, \varphi, \tau) = 0, \\ \Psi(a, -\infty, \tau) &= 0, \quad \Psi(a, \infty, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

A condição inicial $\Psi(a, \varphi)$ deverá satisfazer as condições de contorno, assumindo a forma

$$\Psi(a, \varphi) = \frac{2^{15/4}}{\sqrt{\pi}} E_a^{3/4} E_\varphi^{1/4} a \exp(-4E_a a^2 - 2E_\varphi \varphi^2) \quad (7)$$

A Fig.1 exibe a forma da condição inicial para os valores $E_a = 5.498$ e $E_\varphi = 4$

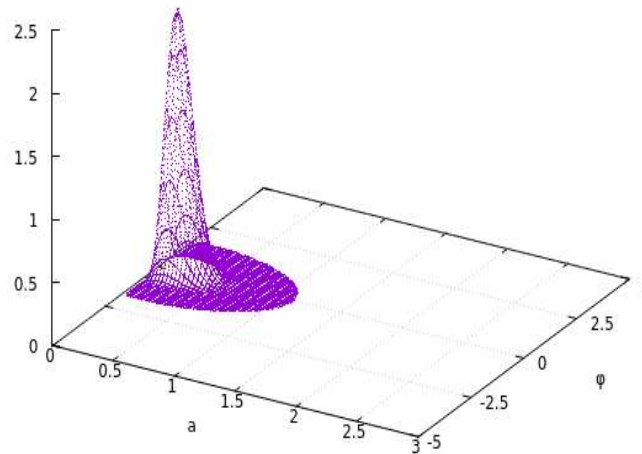


Figura 1: Condição inicial Ψ^0 , em função de a e φ .

3. SOLUÇÃO NUMÉRICA

A solução numérica segue a mesma abordagem para um problema de valor inicial de Equações Diferenciais Parciais (EDPs). A Eq. (5) pode ser apresentada como

$$\left(\hat{H} - i \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \Psi(a, \varphi, \tau) = 0, \quad (8)$$

em que

$$\hat{H} = -\frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + V_{ef}(a, \varphi). \quad (9)$$

A solução desta equação prevê uma evolução em τ e uma integração em a e φ . Para a evolução em τ vamos usar a abordagem de Crank-Nicolson generalizada, que envolve a aproximação de um operador de evolução exponencial por um aproximante de Padé [M/M] [Van Dijk et al, 2017]. O presente trabalho restringir-se-á ao caso $M = 1$.

3.1 Evolução em τ

A separação de variáveis em (8) fornece uma solução em τ na forma de um operador exponencial. No esquema de solução numérica via diferenças finitas, a evolução da função de onda Ψ para um $\Delta\tau$ suficientemente pequeno pode ser escrita (omitindo-se as demais variáveis a e φ) como

$$\Psi(\tau + \Delta\tau) = e^{-i\Delta\tau\hat{H}}\Psi(\tau). \quad (10)$$

O operador de evolução exponencial pode ser aproximado por um aproximante de Padé [1/1],

$$e^{-i\Delta\tau\hat{H}} = \frac{1 - i\Delta\tau\hat{H}/2}{1 + i\Delta\tau\hat{H}/2} + O(\Delta\tau^3). \quad (11)$$

Obtém-se então

$$\begin{aligned} \Psi(t + \Delta\tau) &= \frac{1 - i\Delta\tau\hat{H}/2}{1 + i\Delta\tau\hat{H}/2} \Psi(t), \\ \frac{\Psi(t + \Delta\tau) - \Psi(t)}{\Delta\tau} &= -\frac{i}{2} \hat{H} [\Psi(t + \Delta\tau) + \Psi(t)]. \end{aligned} \quad (12)$$

3.2 Integração em a e φ

No esquema de Crank-Nicolson, as derivadas em relação às variáveis espaciais a e φ são discretizadas como a soma das aproximações de diferenças finitas de avanço e de retrocesso. A integração numérica nestas variáveis baseia-se na expansão em série de Taylor. A derivada segunda para uma função $f(x)$ pode ser discretizada como

$$f''(x) = \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{k=-r}^{k=r} c_k^r f(x + k\Delta x) + O(\Delta x^{2r+2}), \quad (13)$$

em que $c_k^r \in \mathbb{R}$, para um certo valor r que representa quantos sítios vizinhos em torno de cada ponto do domínio (discretizado) serão considerados. O presente trabalho considera o caso de primeiros vizinhos, $r = 1$.

Com estas aproximações, (8) toma a forma

$$\begin{aligned} \hat{H}\Psi = & -\frac{1}{12\Delta a^2} [\Psi(a - \Delta a, \varphi, \tau) - 2\Psi(a, \varphi, \tau) + \Psi(a + \Delta a, \varphi, \tau)] \\ & + \frac{1}{2\Delta\varphi^2} [\Psi(a, \varphi - \Delta\varphi, \tau) - 2\Psi(a, \varphi, \tau) + \Psi(a, \varphi + \Delta\varphi, \tau)] + V_{ef}(a, \varphi)\Psi(a, \varphi, \tau). \end{aligned} \quad (14)$$

Tendo em vista a necessidade de trabalharmos com “infinitos” numéricos, ou seja, valores $\{a_\infty, \varphi_{\pm\infty}, \tau_\infty\}$ suficientemente grandes para aplicação das condições de contorno, os passos $\{\Delta a, \Delta\varphi, \Delta\tau\}$ são definidos em função destes como

$$\Delta a = \frac{a_\infty - a_0}{N_a}; \quad \Delta\varphi = \frac{\varphi_\infty - \varphi_{-\infty}}{N_\varphi}; \quad \Delta\tau = \frac{\tau_\infty - \tau_0}{N_\tau}, \quad (15)$$

em que $\{N_a, N_\varphi, N_\tau\}$ representam o número de sub-intervalos desejados para cada uma das variáveis. Utilizar-se-á a notação indicial $\Psi(a, \varphi, \tau) \rightarrow \Psi_{ij}^n$, em que os índices $\{i, j, n\}$ são associados, respectivamente, às variáveis $\{a, \varphi, \tau\}$, tais que¹

$$\Psi(a, \varphi, \tau) = \Psi(i\Delta a, \varphi_{-\infty} + j\Delta\varphi, n\Delta\tau) = \Psi_{ij}^n, \quad (16)$$

em que $i \in \{0, 1, 2, \dots, N_a\}$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, N_\varphi\}$ e $n \in \{0, 1, 2, \dots, N_\tau\}$. Das Eqs. (9), (12), (14) e (15), obtemos

$$\begin{aligned} \Psi_{ij}^{n+1} - \Psi_{ij}^n = & -\frac{i\Delta\tau}{2} \left[-\frac{1}{12\Delta a^2} (\Psi_{i-1,j}^{n+1} - 2\Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i+1,j}^{n+1}) \right. \\ & + \frac{1}{2\Delta\varphi^2} (\Psi_{i,j-1}^{n+1} - 2\Psi_{i,j}^{n+1} + \Psi_{i,j+1}^{n+1}) + V_{i,j}\Psi_{i,j}^{n+1} + \\ & - \frac{1}{12\Delta a^2} (\Psi_{i-1,j}^n - 2\Psi_{i,j}^n + \Psi_{i+1,j}^n) + \\ & \left. \frac{1}{2\Delta\varphi^2} (\Psi_{i,j-1}^n - 2\Psi_{i,j}^n + \Psi_{i,j+1}^n) + V_{i,j}\Psi_{i,j}^n \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Introduzimos as constantes

$$r_a = \frac{i\Delta\tau}{24(\Delta a)^2}, \quad r_\varphi = -\frac{i\Delta\tau}{4(\Delta\varphi)^2}, \quad (18)$$

e também

$$m_{ij} = \left(1 + 2r_a + 2r_\varphi + i\frac{\Delta\tau}{2}V_{i,j} \right), \quad b_{ij} = \left(1 - 2r_a - 2r_\varphi - i\frac{\Delta\tau}{2}V_{i,j} \right). \quad (19)$$

Separando os termos em Ψ^{n+1} e os termos em Ψ^n , obtemos a relação de recorrência

¹Não se deve confundir, aqui, o índice i com a unidade imaginária $\sqrt{-1}$.

$$m_{ij}\Psi_{i,j}^{n+1} - r_a\Psi_{i+1,j}^{n+1} - r_a\Psi_{i-1,j}^{n+1} - r_\varphi\Psi_{i,j+1}^{n+1} - r_\varphi\Psi_{i,j-1}^{n+1} = b_{ij}\Psi_{i,j}^n + r_a\Psi_{i+1,j}^n + r_a\Psi_{i-1,j}^n + r_\varphi\Psi_{i,j+1}^n + r_\varphi\Psi_{i,j-1}^n, \quad (20)$$

que nos permitirá gerar a evolução temporal da função de onda, dada a condição inicial $\Psi_{i,j}^0 = \Psi(a, \varphi, 0)$,

3.3 O sistema de equações

As Eqs. (20) constituem um sistema linear,

$$\mathbf{M}\Psi^{n+1} = \mathbf{B}\Psi^n. \quad (21)$$

Nesta equação, as componentes do vetor Ψ podem ser ordenadas como $\Psi = [\Psi_{00}, \Psi_{10}, \dots, \Psi_{N_a,0}, \Psi_{01}, \Psi_{11}, \dots, \Psi_{N_a,N_\varphi}]$. A matriz $\mathbf{B}$ é semelhante a $\mathbf{M}$; pode ser obtida desta última trocando-se $r_a \rightarrow -r_a$, $r_\varphi \rightarrow -r_\varphi$ e $m_{ij} \rightarrow b_{ij}$, de acordo com as Eqs. (18), (19) e (20).

Para a resolução do sistema (21), pode-se utilizar um método iterativo convergente, como o método de Gradientes Conjugados [Hestenes e Stiefel, 1952]. Os valores de N_a , N_φ e N_τ (ou seja, o erro nas aproximações em a , φ e τ) devem ser dimensionados levando-se em conta a precisão desejada para Ψ .

3.4 Implementação

Para a implementação do algoritmo é necessário definir o “infinito” numérico, citado na Eq. (15), condição necessária para as condições de contorno prescritas por (6). Para tanto precisamos estabelecer a magnitude do que será considerado como *infinitésimo*, tendo por base os erros de aproximação considerados como aceitáveis.

Considera-se que a função de onda Ψ , inicialmente dada por (7), atravessa parcialmente a barreira de potencial, com amplitude de algumas ordens de grandeza menor do que no seu estado inicial, e assim dá origem ao Universo. Estabelecido um limite superior ao erro em $|\Psi|^2$ de 10^{-8} , obtemos limites superiores para os erros associados às variáveis do problema. Para Δt , o erro deve ser $O(\Delta t^3)$; ou seja precisamos de $\Delta t < 10^{-3}$, e assim escolhemos $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$. Para Δa , o erro deve ser $O(\Delta a^4)$, o que impõe $\Delta a < 10^{-2}$; de modo análogo, $\Delta \varphi$ também é $O(\Delta \varphi^4)$, impondo $\Delta \varphi < 10^{-2}$. Escolhemos $\Delta a = \Delta \varphi = 5 \times 10^{-3}$.

As condições de contorno (6) impõem que a função de onda do Universo se anule em $a = 0$ e em $a \rightarrow \infty$, garantindo que ela seja bem definida em todo o espaço, até mesmo quando a tri-esfera se degenera (ou seja, quando $a = 0$). Em um tratamento numérico, no entanto, é necessário escolher onde será localizado o “infinito” numérico em nosso modelo, de tal maneira que esta tenda a zero suavemente para algum valor de a e φ , após atravessar a barreira de potencial. Desta forma, o posicionamento do “infinito”, pode variar de acordo com o modelo [Monerat et al, 2019, Monerat et al, 2021a, Monerat et al, 2021b, Rocha et al, 2022]. Para $a > 1.5$ e $|\varphi| > 2.5$, o potencial efetivo (2) não exibe uma barreira de potencial positiva; portanto, para o caso tratado neste artigo, pode-se definir um valores “infinitos” para as variáveis espaciais como sendo $a = 30$ e $\varphi = 10$, pois descrevem pontos suficientemente distantes da barreira. Consideramos também $N_a = 6000$ e $N_\varphi = 4000$.

A Fig. 2 mostra a evolução de $|\Psi|^2$, a partir de sua configuração inicial. (Não colocamos os eixos na escala do “infinito” para ter uma visibilidade melhor da função.) Os pontos foram

gerados de acordo como a precisão requerida para as diferenças finitas, e valores inferiores a 10^{-20} foram omitidos. Para a fixação dos valores de E_a e E_ϕ , impõem-se que a energia cinética ($E_a - E_\phi$) tenha valor um pouco menor do que a energia potencial máxima da barreira $V_{ef} = 1.5$; tendo isso em vista, tomamos $E_a = 5.498$ e $E_\phi = 4$. Podemos ver que a granulação de pontos fornece um bom contorno para $|\Psi|^2$.

Após a definição dos valores dos parâmetros do sistema, o algoritmo de resolução do sistema linear é executado. É importante observar que o vetor Ψ (cujas componentes são os valores da função Ψ em todos os pontos do domínio considerado) possui dimensão $N_a \times N_\phi$; no caso aqui apresentado, temos 24.000.000 pontos. A matriz M e B , são matrizes esparsas, cujas linhas têm no máximo 5 elementos não nulos. (Tipicamente, dois valores r_a , dois valores de r_ϕ e um valor m_{ij} ou b_{ij} .) Deste modo, a utilização de um algoritmo para matrizes esparsas fornece uma alocação no espaço $\mathcal{P}(N_a \times N_\phi)$.

A escolha do algoritmo de Gradientes Conjugados para a solução do sistema linear baseou-se na sua rápida convergência. A evolução para um passo temporal $\Delta\tau$ é determinada após $O(N_a \times N_\phi)$ operações. São necessárias, portanto, $N_\tau O(N_a \times N_\phi)$ iterações para atingir-se o valor de τ final desejado. No presente trabalho, utilizamos $\tau = 1$ e $N_\tau = 2000$.

A resolução do sistema certamente se beneficiaria de um algoritmo eficiente e paralelizado. No entanto, a paralelização da evolução temporal é obstada pela dependência de Ψ^{n+1} em relação a Ψ^n . Por esse motivo, as iterações em τ devem ser realizadas de forma sequencial, restando assim a paralelização do algoritmo dos Gradientes Conjugados, a cada instante τ , à resolução da equação (21).

Outro problema marcante é o volume de dados gerados, pois a cada instante τ gera-se um vetor Ψ em que cada componente assume um valor complexo (ou seja, requer dois valores de ponto flutuante). Gerar figuras que demonstram a evolução de $|\Psi|^2$ impõe um alto custo de armazenamento.

4. RESULTADOS

O primeiro resultado importante obtido foi o da conservação da norma da função de onda, $\int_{a_0}^{a_\infty} \int_{\phi=-\infty}^{\phi=\infty} \Psi^* \Psi \, d\phi da = 1$. Ou seja, como $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$ representa a distribuição da probabilidade de existência do universo, a probabilidade total em toda a sua extensão é igual a 1, para qualquer valor de τ . A partir do instante inicial $\tau = 0$, em que foi proposto um Universo localizado, próximo ao *Big Bang*, espera-se que ocorra uma expansão do mesmo conforme τ evolui; isso pode ser visto na Fig. 2, que mostra a evolução da função de onda em relação ao fator de escala a e ao campo escalar ϕ . Pode-se observar que parte da função de onda ultrapassa a barreira de potencial. A Fig. 3 mostra a secção das superfícies da Fig.2 com o plano $\phi = 0$. A Fig. 4 detalha a figura anterior, evidenciando que a função de onda atravessa a barreira de potencial, um resultado importante que era buscado.

5. CONCLUSÃO

O método aplicado permitiu a quantização do modelo, fornecendo soluções de norma finita e definidas em todo espaço, até mesmo quando o fator de escala vai a zero, indicando a ausência de qualquer singularidade no modelo em nível quântico. Foi possível ainda observar que uma

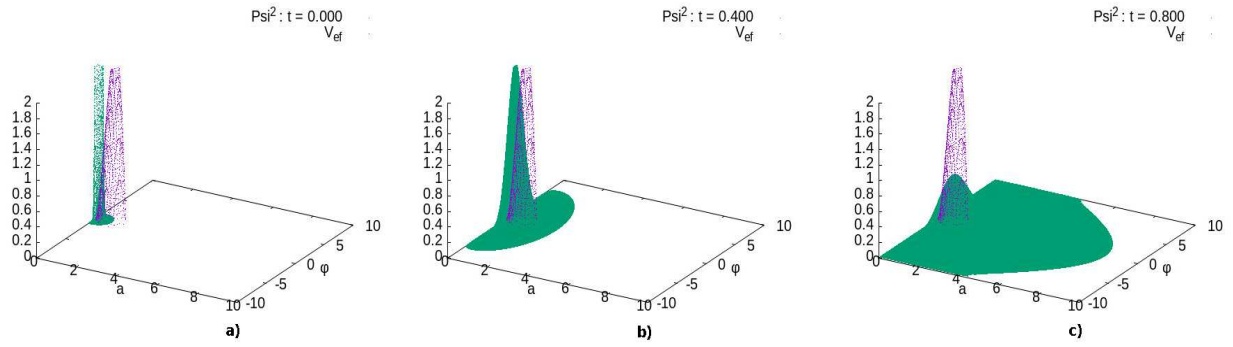


Figura 2: Evolução da distribuição de probabilidade $|\Psi|^2$ como função de a e φ , para diferentes valores de τ : a) $\tau = 0$; b) $\tau = 0.4$; c) $\tau = 0.8$. O Potencial efetivo é mostrado em magenta e a função de onda em verde.

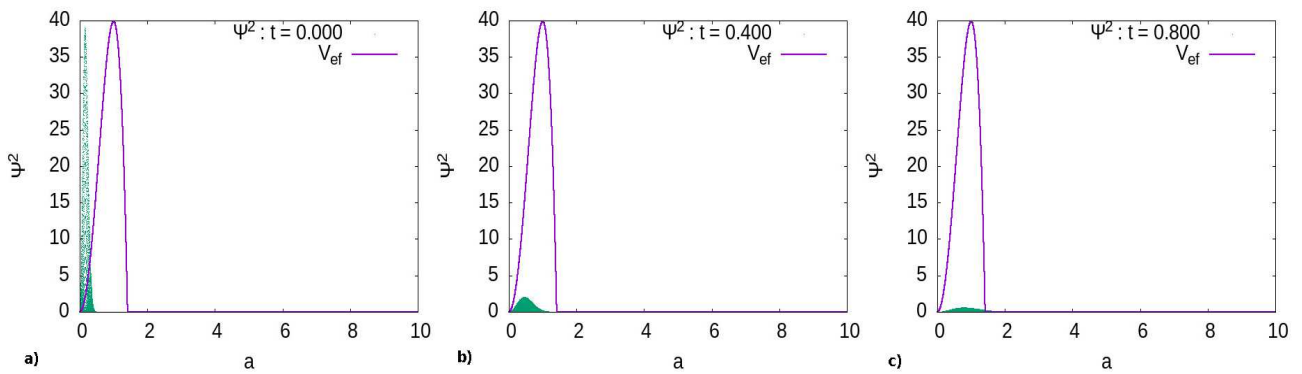


Figura 3: Evolução da distribuição de probabilidade $|\Psi|^2$ como função de a , com $\varphi = 0$, para diferentes valores de τ : a) $\tau = 0$; b) $\tau = 0.4$; c) $\tau = 0.8$. O potencial efetivo aparece em magenta e a função de onda em verde.

parte da função de onda do universo consegue atravessar o potencial e propagar-se à direita da barreira, indicando a possibilidade do Universo surgir classicamente.

Este modelo pode ser aprofundado estendendo-se o valor final de τ e mesmo simulando novos valores para m , Λ e para as energias E_a e E_φ . Um possível trabalho futuro é a verificação se os resultados obtidos confirmariam o comportamento esperado após a Era de Planck.

Agradecimentos

H. J. Brumatto agradece à Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC/BA) pelo apoio financeiro. G. A. Monerat agradece à FAPERJ pelo apoio financeiro parcial. G. A. Monerat e E. V. Corrêa Silva agradecem à Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ/RJ) pela bolsa do Prociência.

REFERENCES

[Alvarenga e Fabris, 1995] Alvarenga, F. G.; Fabris, J. C. (1995). Primordial Cosmology with a Contraction Phase. Classical and Quantum Gravity, v. 12, p. L69-L74.

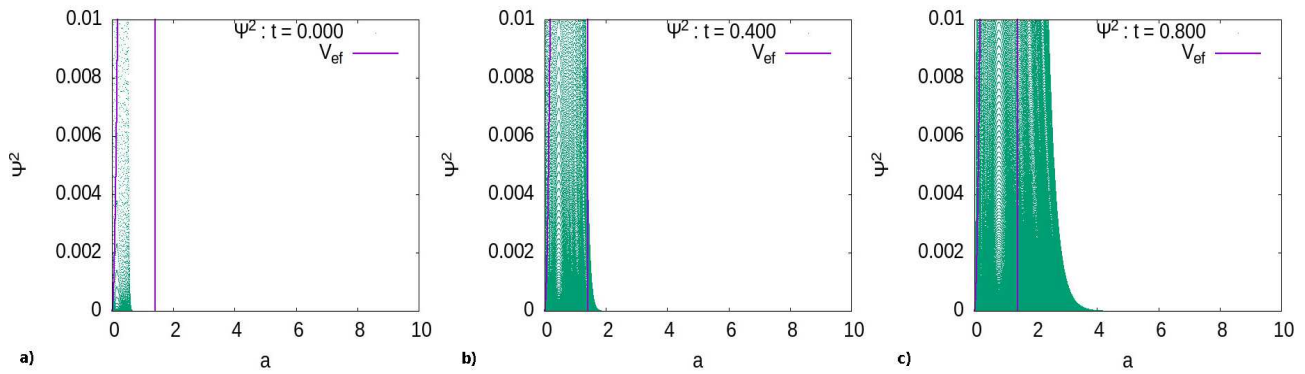


Figura 4: Detalhe da Fig. 3, mostrando a evolução de $|\Psi|^2$ em função de a e τ , para $\varphi = 0$: a) $\tau = 0$; b) $\tau = 0.4$; c) $\tau = 0.8$. O potencial efetivo aparece em magenta e a função de onda em verde.

- [Alvarenga e Fabris, 1996] Alvarenga, F. G.; Fabris, J. C. 1996. A Primordial Cosmological Scenario and Horizon Problem. *General Relativity and Gravitation*, v. 28, p. 645-662.
- [Crank e Nicolson, 1947] Crank, J. e Nicolson, P. (1947) A Practical Method for Numerical Evaluation of Solutions of Partial Differential Equations of the Heat-Conduction Type. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43, 50-67.
- [DeWitt, 1967] DeWitt, B. S. (1967). Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory. *Physics Review* 160, 1113.
- [Dodelson e Schmidt, 2020] Dodelson, S.; Schmidt, F. (2020). *Modern Cosmology*. London: Academic Press, 2ed.
- [Guth, 1981] Guth, A. H. (1981). The Inflationary Universe: A Possible Solution To The Horizon And Flatness Problems. *Phys. Rev. D* 23, 347.
- [Halliwell, 1991] Halliwell, J. J. (1991). Introductory Lectures on Quantum Cosmology. in *Quantum Cosmology and Baby Universes*. Singapura: World Scientific pp 159-243.
- [Hestenes e Stiefel, 1952] Hestenes, M. R., e Stiefel, E. (1952). Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. *Journal of Research of The National Bureau of Standards* (49), 2379
- [Lemos e Alvarenga, 1999] Lemos, N. A.; Alvarenga, F. G. (1999). Wormholes, Classical Limit and Dynamical Vacuum in Quantum Cosmology. *General Relativity and Gravitation*, (31) 1743.
- [Lemos e Monerat, 2003] Lemos, N. A.; Monerat, G. A. (2003). A Quantum cosmological model with static and dynamic wormholes. *General Relativity and Gravitation* (35) 423.
- [Lemos et al, 2003] Lemos, N. A.; Monerat, G. A.; Oliveira, H. P. de; Soares, I. D.; Tonini, E. V. (2003). Role of quantum cosmology in the chaotic dynamics of inflation. *Phys. Rev. D* 68, 083516.
- [Linde, 1982] Linde, A. D. (1992). A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems. *Phys. Lett. B* 108, 389.
- [Monerat et al, 1998] Monerat, G. A.; Oliveira, H. P.; Soares, I. D. (1998). Chaos in preinflationary Friedmann-Robertson-Walker universes. *Phys. Rev. D* 58, 063504.
- [Monerat et al, 2019] G. A. Monerat, C. G. M. Santos, F. G. Alvarenga, S. V. B. Gonçalves, R. Fracalossi, E. V. Corrêa Silva, G. Oliveira-Neto, Quantum Cosmology with Many Fluids and the Choice of Cosmological Time, *Braz. J. of Physics*, p. 89-104, (2019).
- [Monerat et al, 2021a] G. A. Monerat, C. G. M. Santos, G. Oliveira-Neto, E. V. Corrêa Silva, L. G. Ferreira Filho, The dynamics of the early universe in a model with radiation and a generalized Chaplygin gas - Early universe with radiation and a generalized Chaplygin gas, *Eur. Phys. J. Plus* (2021) 136:34.
- [Monerat et al, 2021b] G. A. Monerat, F. G. Alvarenga, S. V. B. Gonçalves, G. Oliveira-Neto, C. G. M. Santos, E. V. Corrêa Silva, The effects of dark energy on the early Universe with radiation and an ad hoc potential, *Eur. Phys. J. Plus* (2022) 137:117
- [Rocha et al, 2022] N. M. N. da Rocha, G. A. Monerat, F. G. Alvarenga, S. V. B. Gonçalves, G. Oliveira-Neto, E. V. Corrêa Silva, C. G. M. Santos, Early universe with dust and Chaplygin gas, *Eur. Phys. J. Plus* (2022) 137:1103.
- [Schutz, 1970] Schutz, B. F. (1970) Perfect Fluids in General Relativity: Velocity Potentials and a Variational Principle. *Phys. Rev. D* (2) 2762.
- [Schutz, 1971] Schutz, B. F. (1971) Hamiltonian Theory of a Relativistic Perfect Fluid. *Phys. Rev. D* (4) 3559.
- [Van Dijk et al, 2017] Van Dijk, W.; Vanderwoerd, T.; Prins, S-J. (2017) Numerical solutions of the time-dependent Schrödinger equation em two dimensions. *Phys. Rev. E*, 95 n. 2.

ALGORITHM BASED ON CRANK-NICOLSON $(2 + 1)$ METHOD TO FIND SOLUTIONS TO THE WHEELER-DEWITT EQUATION

Abstract. *In this work, we study the Wheeler-DeWitt equation (WDW), which is important for the investigation of quantum effects in the primordial Universe, for the Friedmann-Robertson-Walker (FRW) cosmological model with positive curvature, a scalar field conformally coupled to gravity, and a radiation fluid. We aim to numerically determine the solution, in a case study, of the WDW equation (the wave function of the Universe) by applying the Crank-Nicolson method in $D=(2+1)$ dimensions. From the solution, we calculate the expected value of the scale factor. This enables us to obtain well-defined wave packet solutions, even at $a = 0$, which implies the elimination of the singularity in the classical model.*

Keywords: Quantum Cosmology, The Crank-Nicolson $(2+1)$ method, scalar fields , Wheeler-DeWitt equation