

A INJETIVIDADE DA APLICAÇÃO DE GALOIS

Juliana Pedrotti¹, Thaísa Tamusiunas²

¹Universidade Federal do Rio Grande do Sul, julianabpedrotti@gmail.com;

²Universidade Federal do Rio Grande do Sul, thaisa.tamusiunas@gmail.com.

Dado um grupoide finito $\mathcal{G}$ e um anel unitário R , qualquer ação de $\mathcal{G}$ em R define uma aplicação do conjunto dos subgrupos $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ no conjunto dos subanéis de R , mais especificamente, cada subgrupoide $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ é associado ao subanel $R^{\beta_{\mathcal{H}}}$ de todos os elementos $r \in R$ que satisfazem $\beta_h(r1_{h^{-1}}) = x1_h$, para todo $h \in \mathcal{H}$, ao qual chamaremos de anel dos invariantes de R pela ação $\beta_{\mathcal{H}}$ de $\mathcal{H}$. No caso em que R é uma extensão β -Galois de R^{β} esta aplicação é chamada de aplicação de Galois. Denotaremos a aplicação de Galois por $\theta : \mathcal{H} \mapsto R^{\beta_{\mathcal{H}}}$.

No contexto de anéis comutativos, em (PAQUES; TAMUSIUNAS, 2018) os autores mostraram que existe uma correspondência bijetiva entre os subgrupos amplos de $\mathcal{G}$ e as R^{β} -subálgebras de R que são separáveis e β -forte.

Para ações de grupos e no contexto de anéis não comutativos, em (SZETO; XUE, 2012) os autores deram algumas condições para que a aplicação de Galois seja injetiva. Os autores também definiram duas aplicações induzidas por θ e estudaram as relações entre estas.

Neste trabalho estendemos os resultados de (SZETO; XUE, 2012) para o contexto de grupoides. Introduziremos duas aplicações induzidas pela aplicação de Galois, $\sigma : \mathcal{H} \mapsto \theta(\mathcal{H})C(R)$ e $\gamma : \mathcal{H} \mapsto V_R(\theta(\mathcal{H}))$, onde $C(R)$ é o centro de R . Além disso, definiremos $\bar{\sigma} : \bar{\mathcal{H}} \mapsto \theta(\mathcal{H})C(R)$ e $\bar{\gamma} : \bar{\mathcal{H}} \mapsto V_R(\theta(\mathcal{H}))$ que são aplicações induzidas por σ e γ . Se R é uma extensão β -Galois de R^{β} tal que R^{β} é uma $C(R)^{\beta}$ -álgebra separável, temos que $\bar{\sigma}$ e $\bar{\gamma}$ são aplicações injetivas do conjunto $\{\bar{\mathcal{H}} \mid \mathcal{H} \text{ é subgrupoide de } \mathcal{G}\}$ no conjunto $\{T \mid T \text{ é } C(R)\text{-subálgebra separável de } R\}$. Por fim, provaremos que existe uma relação entre σ, γ e θ , e daremos condições para que θ seja injetiva.

REFERÊNCIAS

- Bagio, D., Paques, A., “Partial groupoid actions: globalization, Morita theory and Galois theory,”. Em: **Communications in Algebra** 40 (2012), pp. 3658-3678. DOI: 10.1080/00927872.2011.592889.
- Bagio, D., Sant’ana, A., Tamusiunas, T., “Galois correspondence for group-type partial actions of groupoids,”. Em: **Bulletin Belgian Mathematical Society** 5 (2022), pp. 745-767. DOI: 10.36045/j.bbms.210807.
- Chase, S. U., Harrison, D. K, Rosenberg, A., “Galois theory and cohomology of commutative rings,”. Em: **American Mathematical Society** 52 (1965).
- Cortes, W., Tamusiunas, T., “A characterisation for groupoid Galois extension using partial isomorphisms,”. Em: **Bulletin of the Australian Mathematical Society** 96 (1) (2017), pp. 59-68 DOI: 10.1017/S0004972717000077.
- Demeyer, F., Ingraham, E., **Separable Algebras over Commutative Rings**, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, LNM vol 181 (1971) ISBN: 978-3540053712.
- Hirata, K., Sugano, K., “On semisimple extensions and separable extensions over non-commutative rings,”. Em: **Journal of the Mathematical Society of Japan** 18 (1966), pp. 360-373.
- Pedrotti, J.; Tamusiunas T., “Injectivity of the Galois Map,”. Em: **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series** 54 (11) (2023), DOI: 10.1007/s00574-022-00327-3
- Hirata, Kazanki, T., “On commutator rings and Galois theory of separable algebras,”. Em: **Osaka Journal of Mathematics** 1 (1) (1964), pp. 103-115.
- Paques A.; Tamusiunas T., “A Galois-Grothendieck-type correspondence,”. Em: **Algebra and Discrete Mathematics** 17 (1) (2014), pp. 89-97.
- Paques, A., Tamusiunas, T., “The Galois Correspondence Theorem for Groupoid Actions,”. Em: **Journal of Algebra** 519 (2018), pp. 105-123. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2018.04.034.
- Paques, A., Tamusiunas, T., “On the Galois Map for Groupoid Actions,”. Em: **Communications in Algebra** 49 (3) (2021), pp.1137-1047. DOI: 10.1080/00927872.2020.1826044.
- Szeto G.; Xue, L., “The structure of Galois Algebras,”. Em: **Journal of Algebra** 237 (1) (2001), pp.238-246. DOI: 10.1006/jabr.2000.8568.
- Szeto G.; Xue, L., “On Galois Algebras Satisfying the Fundamental Theorem,”. Em: **Communications in Algebra** 35 (12) (2007), pp.3979-3985. DOI: 10.1080/00927870701509529.
- Szeto G.; Xue, L., “On Galois Extensions with a One-to-One Galois Map,”. Em: **International Journal of Algebra** 5 (17) (2011), pp.801-807.
- Szeto G.; Xue, L., “The Galois map and its induced maps,”. Em: **Contemporary Ring Theory 2011 - Proceedings of the Sixth China-Japan-Korea International Conference on Ring Theory** (2012), pp. 260.