ASPECTOS COMPUTACIONAIS DA INVERSÃO NUMÉRICA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE APLICADA A UM PROBLEMA DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Murilo da Cunha Paz[1], Renan de Almeida Schmidt[2], Elisandra Konflanz Freitas[3], Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez[4], João Francisco Prolo Filho[5]

[1]*Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional – FURG, murilodacunhapaz@gmail.com;*
[2]*Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional – FURG, renan.schmidt@outlook.com;*
[3]*Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional – FURG, elisandrakonflanz@gmail.com;*
[4]*Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional – FURG, barbararodriguez@furg.br,*
[5]*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica – FURG, joaoprolo@furg.br.*

RESUMO: Neste artigo apresenta-se a solução de um problema envolvendo circuitos elétricos considerando-se quatro tensões elétricas distintas. Para atingir este objetivo, o método Talbot-Fixo é usado como alternativa numérica para a inversão da transformada de Laplace. No processo, testes foram realizados e os resultados comparados com a solução analítica e apresentados na forma de gráficos e tabelas. Com base nos dados obtidos, foi possível fazer uma análise da eficiência desse algoritmo, de onde concluiu-se que o método Talbot-Fixo forneceu excelentes resultados no tratamento de circuitos elétricos apresentando um erro absoluto médio da ordem de 10^{-15}.

Palavras-chave: Talbot-Fixo; Transformada de Laplace; Transformada Inversa; Métodos Numéricos; Circuitos Elétricos.

1. INTRODUÇÃO

Entre os problemas mais comuns encontrados na engenharia, estão os de circuitos elétricos. Na sua grande maioria, são modelados por Equações Diferencias Ordinárias (EDO), e a grande dificuldade encontrada normalmente é a obtenção de soluções de caráter analítico.

Uma das ferramentas matemáticas amplamente utilizada para a resolução de problemas envolvendo circuitos elétricos é a Transformada de Laplace, pois transforma um conjunto de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes em um conjunto de equações algébricas lineares, incorporando os valores iniciais automaticamente nas equações algébricas (GOIS, 2018). No entanto, ela também apresenta algumas limitações como, por exemplo, a dificuldade em obter as transformadas inversas analíticas (PILATTI; RODRIGUEZ; PROLO FILHO, 2019). Nestes casos, o uso de abordagens numéricas torna-se uma alternativa bastante oportuna.

Neste contexto busca-se aqui resolver por transformada de Laplace o problema de circuitos elétricos proposto por Brančík (2011) onde, em comparação à solução analítica, avalia-se a eficiência do método Talbot-Fixo (ABATE; VALKÓ, 2004) no

cálculo da transformada inversa. Para a análise dos resultados, fez-se simulações para quatro tensões elétricas distintas.

Entre as justificativas desse trabalho está a investigação do desempenho numérico de técnicas baseadas na deformação do contorno de Bromwich e a escolha do algoritmo Talbot-Fixo se deu por conta da facilidade de implementação e por apresentar um baixo custo computacional (FERREIRA *et. al*, 2020).

2. MÉTODO TALBOT-FIXO

Talbot (1979) foi o pioneiro na abordagem da inversão numérica da transformada de Laplace utilizando a integral complexa de inversão e uma deformação do contorno de Bromwich (FERREIRA *et. al*, 2020; ABATE; VALKÓ, 2004). Baseados na técnica de inversão da transformada de Laplace proposta por Talbot (TALBOT, 1979), Abate e Valkó (2004) apresentaram uma nova, utilizando uma modificação particular do contorno de Bromwich, e chamaram de Talbot-Fixo. Este método tem mostrado estabilidade numérica na resolução de problemas de dispersão de poluentes (FERREIRA *et. al*, 2020) e sistemas que envolvem a condução de calor (COSTA, 2018). Nele é proposto que

$$s(\theta) = r\theta(\cot\theta + i), -\pi < \theta < +\pi. \tag{1}$$

Após diferenciar Eq.(1), obtém-se

$$s'(\theta) = ir(1 + i\sigma(\theta)), \tag{2}$$

onde

$$\sigma(\theta) = \theta + (\theta\cot(\theta) - 1)\cot(\theta). \tag{3}$$

Manipulando-se algebricamente e realizando a adequação dos limites de integração, chega-se a

$$f(t) = \frac{r}{\pi}\int_0^{\pi} \Re[e^{ts(\theta)}F(s(\theta))(1 + i\sigma(\theta))]\, d\theta, \tag{4}$$

onde s é o parâmetro da transformada de Laplace dado pela Eq.(1), $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$, $\Re$ indica que se está tomando apenas a parte real do integrando e t é uma variável dimensional. Aplicando a Regra Trapezoidal [1], para M pontos igualmente distribuídos a uma distância de π/M, sendo $M \in \mathbb{N}$ e $\theta_k = k\pi/M$ para $k = 1,2,3,\ldots,M-1$, a aproximação da transformada inversa de Laplace pelo método Talbot-Fixo é então dada por

$$f_{TF}(t,M) \approx \frac{r}{M}\left(\frac{1}{2}F(r)e^{rt} + \sum_{k=1}^{M-1} \Re[e^{ts(\theta_k)}F(s(\theta_k))(1 + i(\sigma(\theta_k))]\right). \tag{5}$$

[1] A Regra Trapezoidal é um método de integração numérica onde o intervalo é dividido em M subintervalos (partição) e, em cada um deles, o integrando é aproximado por uma função linear usando polinômios de Lagrange (CALIXTO *et al.*, 2022).

Como Abate e Valkó (2004) sugerem que $r = 2M/5t$, e o parâmetro M representa o número de termos do somatório da Eq.(5), acaba que a aproximação de $f(t)$ torna-se dependente de apenas um parâmetro.

3. PROBLEMA PROPOSTO

Para a realização dos testes propostos aqui, escolheu-se um dos problemas descritos no trabalho de Brančík (2011), no qual a EDO

$$C\frac{dv(t)}{dt} + Gv(t) = i(t), \tag{6}$$

representa a relação entre a tensão $v(t)$ e a corrente $i(t)$ em um circuito elétrico como descrito na Figura 1.

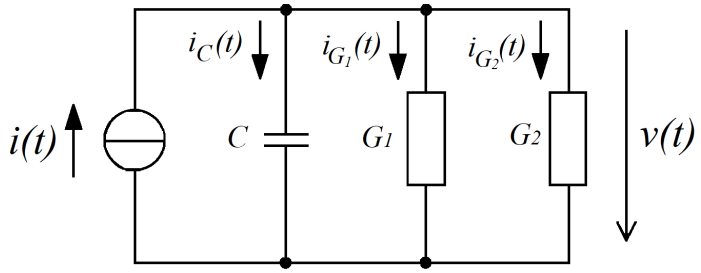


Figura 1. Circuito Elétrico.
Fonte: (BRANčIK, 2011).

Nesse diagrama, G_1, G_2 representam a condutância (inverso da resistência) em cada uma das malhas do circuito, $G = G_1 + G_2$ indica a condutância equivalente, C é a capacitância.

Aplicando a transformada de Laplace em Eq.(6) chega-se a

$$V(s) = \frac{I(s) + Cv(0)}{G + sC}, \tag{7}$$

onde $V(s)$ e $I(s)$ são as versões de $v(t)$ e $i(t)$ no espaço de Laplace, s é o parâmetro da transformada e $v(0)$ é a condição inicial para a tensão.

Nas simulações, para a obtenção dos resultados numéricos, a literatura (BRANčIK, 2011) propôs quatro casos de simulação,

Caso I:

$$\begin{gathered} i_1(t) = I_0 \quad I_1(s) = \frac{I_0}{s}; \\ v_1(t) = \frac{1 - e^{-20t}}{20} \; ; \; V_1(s) = \frac{1}{s(s+20)}. \end{gathered} \tag{8}$$

Caso II:

$$\begin{gathered} i_2(t) = I_0 e^{-5t} \; ; \; I_2(s) = \frac{I_0}{s+5}; \\ v_2(t) = \frac{e^{-5t} - e^{-20t}}{15} \; ; \; V_2(s) = \frac{1}{(s+5)(s+20)}. \end{gathered} \tag{9}$$

Caso III:

$$i_3(t) = I_0 \operatorname{sen}(2\pi t) \; ; \; I_3(s) = \frac{2\pi I_0}{s^2 + 4\pi^2};$$
$$v_3(t) = \frac{-\pi\cos(2\pi t) + 10\sin(2\pi t) + \pi e^{-20t}}{2\pi^2 + 200} \; ; \; V_3(s) = \frac{2\pi}{(s^2 + 4\pi^2)(s + 20)}. \quad (10)$$

Caso IV:

$$i_4(t) = I_0 \cos(2\pi t) \; ; \; I_4(s) = \frac{sI_0}{s^2 + 4\pi^2};$$
$$v_4(t) = \frac{5(\cos(2\pi t) - e^{-20t})}{\pi^2 + 100} + \frac{\pi\sin(2\pi t)}{2(\pi^2 + 100)} \; ; \; V_4(s) = \frac{s}{(s^2 + 4\pi^2)(s + 20)}. \quad (11)$$

Ainda, foram considerados $C = 1$ mF, $G_1 = G_2 = 10$ mS e $I_0 = 1$ mA e $v(0) = 0$ V.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nessa seção, os resultados obtidos para $v(t)$ pela inversão da transformada de Laplace segundo o método Talbot-Fixo serão apresentados e comparados com os determinados via inversão analítica. O código computacional foi implementado no software de código aberto Octave, versão 7.3.0, em um notebook Intel(R) Core(TM) I5-11ª geração, com 256GB de disco rígido (SSD) e 8GB de memória RAM. A análise da eficiência do método numérico foi feita através do erro absoluto calculado ponto a ponto (Tabelas 1-4), através da visualização gráfica (Figura 2) e pelo Erro Absoluto Médio (Figura 3).

Em especial, o Erro Absoluto Médio ($\overline{E}_{abs}$) foi utilizado pela primeira vez por Calixto et al. (2022) e é definido pela fórmula

$$\overline{E}_{abs} = \frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t} |\, f_a(t_i) - f_{TF}(t_i), \,|\, , \text{onde } t_i \in \mathbb{R}^+, \quad (12)$$

$f_a(t_i)$ e $f_{TF}(t_i)$ são, respectivamente as funções cujas transformadas inversas foram obtidas de forma analítica e pelo método Talbot-Fixo, t_i são os pontos discretos onde as funções são avaliadas e N_t corresponde a quantidade de pontos t_i avaliados.

4.1. Simulações das Tensões $V(s)$

Nas Tabelas 1-4 são apresentados os resultados para a transformada inversa analítica ($v_a(t)$), transformada inversa numérica ($v_{FT}(t)$) e o erro absoluto obtido para cada ponto t_i, calculado segundo a fórmula $|v_a(t_i) - v_{FT}(t_i)|$.

Em todas as simulações, levou-se em conta as tensões $v(t)$ e $V(s)$ indicadas nos Casos I-IV da seção 3.

Tabela 1. Simulação para $V_1(s)$, com $M_o = 19$.

t	$v_a(t)$	$v_{FT}(t) - M = 19$	$\lvert v_a(t) - v_{FT}(t)\rvert$
10^{-4}	$9{,}99000666333 \times 10^{-15}$	$9{,}99000666333 \times 10^{-15}$	$4{,}22838847269 \times 10^{-18}$
0,1	$4{,}32332358381 \times 10^{-2}$	$4{,}32332358381 \times 10^{-2}$	$4{,}78783679369 \times 10^{-16}$
0,2	$4{,}90842180555 \times 10^{-2}$	$4{,}90842180555 \times 10^{-2}$	$7{,}70217223333 \times 10^{-16}$
0,3	$4{,}98760623911 \times 10^{-2}$	$4{,}98760623911 \times 10^{-2}$	$6{,}03683769639 \times 10^{-16}$
0,4	$4{,}99832268686 \times 10^{-2}$	$4{,}99832268686 \times 10^{-2}$	$1{,}13797860024 \times 10^{-15}$
0,5	$4{,}99977300035 \times 10^{-2}$	$4{,}99977300035 \times 10^{-2}$	$1{,}51961776495 \times 10^{-15}$
0,6	$4{,}99996927893 \times 10^{-2}$	$4{,}99996927893 \times 10^{-2}$	$4{,}38538094726 \times 10^{-15}$
0,7	$4{,}99999584235 \times 10^{-2}$	$4{,}99999584235 \times 10^{-2}$	$3{,}96210841913 \times 10^{-15}$
0,8	$4{,}99999943732 \times 10^{-2}$	$4{,}99999943732 \times 10^{-2}$	$2{,}38004060904 \times 10^{-15}$
0,9	$4{,}99999992385 \times 10^{-2}$	$4{,}99999992385 \times 10^{-2}$	$1{,}97064586870 \times 10^{-15}$
1	$4{,}99999998969 \times 10^{-2}$	$4{,}99999998969 \times 10^{-2}$	$9{,}08995101411 \times 10^{-16}$

Fonte: do autor.

Tabela 2. Simulação para $V_2(s)$, com $M_o = 19$.

t	$v_a(t)$	$v_{FT}(t) - M = 19$	$\lvert v_a(t) - v_{FT}(t)\rvert$
10^{-4}	$9{,}98750874557 \times 10^{-5}$	$9{,}98750874557 \times 10^{-5}$	$1{,}16551733542 \times 10^{-18}$
0,1	$3{,}14130250984 \times 10^{-2}$	$3{,}14130250984 \times 10^{-2}$	$3{,}88578058618 \times 10^{-16}$
0,2	$2{,}33042534855 \times 10^{-2}$	$2{,}33042534855 \times 10^{-2}$	$8{,}01442245901 \times 10^{-16}$
0,3	$1{,}47100938647 \times 10^{-2}$	$1{,}47100938647 \times 10^{-2}$	$7{,}49400541621 \times 10^{-16}$
0,4	$8{,}99998804058 \times 10^{-3}$	$8{,}99998804058 \times 10^{-3}$	$1{,}98278893304 \times 10^{-15}$
0,5	$5{,}46930657960 \times 10^{-3}$	$5{,}46930657961 \times 10^{-3}$	$1{,}40078920685 \times 10^{-15}$
0,6	$3{,}31872827703 \times 10^{-3}$	$3{,}31872827703 \times 10^{-3}$	$3{,}15979881149 \times 10^{-15}$
0,7	$2{,}01310345957 \times 10^{-3}$	$2{,}01310345957 \times 10^{-3}$	$3{,}68715474818 \times 10^{-15}$
0,8	$1{,}22103509023 \times 10^{-3}$	$1{,}22103509023 \times 10^{-3}$	$1{,}55626379838 \times 10^{-15}$
0,9	$7{,}40598753884 \times 10^{-4}$	$7{,}40598753885 \times 10^{-4}$	$1{,}62229171069 \times 10^{-15}$
1	$4{,}49196329195 \times 10^{-4}$	$4{,}49196329197 \times 10^{-4}$	$1{,}58721777041 \times 10^{-15}$

Fonte: do autor.

A partir da análise dos dados, verificou-se que os resultados obtidos utilizando o método numérico ($v_{FT}(t)$) concordaram com os calculados analiticamente ($v_a(t)$) em todos os dígitos apresentados para a maioria dos valores de t e em todos os quatro casos estudados. Apesar de terem sido fornecidos aqui apenas onze dígitos decimais, o erro absoluto calculado ponto a ponto ficou entre as ordens 10^{-14} e 10^{-18}, mesmo nos casos III e IV, onde há uma instabilidade maior e acredita-se ser por conta das combinações entre as funções senos, cossenos e exponenciais.

Já a Figura 2, construída a partir das já referidas tabelas, mostra o comportamento da função $v(t)$ para os quatro casos aqui apresentados, ressaltando a concordância entre soluções obtidas de forma analítica (linhas sólidas) e através do algoritmo numérico (círculos). Nela, também fica evidente o perfil exponencial e/ou oscilatório das funções trabalhadas.

Vale lembrar que nas simulações realizadas neste trabalho, que resultaram nas Tabelas 1-4, utilizou-se o critério do Erro Absoluto Médio para a escolha do M que melhor ajustaria $v_{FT}(t)$ à $v_a(t)$ (que será chamado de M_o ou M otimizado).

Tabela 3. Simulação para $V_3(s)$, com $M_o = 25$.

t	$v_a(t)$	$v_{FT}(t) - M = 25$	$\lvert v_a(t) - v_{FT}(t)\rvert$
10^{-4}	$3{,}13949920210 \times 10^{-8}$	$3{,}13949920195 \times 10^{-8}$	$1{,}49143973165 \times 10^{-18}$
0,1	$1{,}71176506407 \times 10^{-2}$	$1{,}71176506407 \times 10^{-2}$	$3{,}12250225675 \times 10^{-17}$
0,2	$3{,}91250153626 \times 10^{-2}$	$3{,}91250153626 \times 10^{-2}$	$1{,}87350135405 \times 10^{-16}$
0,3	$4{,}77345757687 \times 10^{-2}$	$4{,}77345757687 \times 10^{-2}$	$1{,}09634523681 \times 10^{-15}$
0,4	$3{,}83204631613 \times 10^{-2}$	$3{,}83204631613 \times 10^{-2}$	$1{,}04083408558 \times 10^{-16}$
0,5	$1{,}42975634562 \times 10^{-2}$	$1{,}42975634562 \times 10^{-2}$	$4{,}73579508941 \times 10^{-15}$
0,6	$-1{,}51826858408 \times 10^{-2}$	$-1{,}51826858408 \times 10^{-2}$	$2{,}28636554133 \times 10^{-15}$
0,7	$-3{,}88631463534 \times 10^{-2}$	$-3{,}88631463534 \times 10^{-2}$	$5{,}29437604868 \times 10^{-15}$
0,8	$-4{,}76991356522 \times 10^{-2}$	$-4{,}76991356522 \times 10^{-2}$	$2{,}77555756156 \times 10^{-17}$
0,9	$-3{,}83156668631 \times 10^{-2}$	$-3{,}83156668631 \times 10^{-2}$	$3{,}24740234702 \times 10^{-15}$
1	$-1{,}42969143478 \times 10^{-2}$	$-1.42969143478 \times 10^{-2}$	$1{,}22835769333 \times 10^{-14}$

Fonte: do autor.

Tabela 4. Simulação para $V_4(s)$, com $M_o = 25$.

t	$v_a(t)$	$v_{FT}(t) - M = 25$	$\lvert v_a(t) - v_{FT}(t)\rvert$
10^{-4}	$9{,}99000600569 \times 10^{-5}$	$9{,}99000600569 \times 10^{-5}$	$2{,}43945488809 \times 10^{-18}$
0,1	$3{,}90617541068 \times 10^{-2}$	$3{,}90617541068 \times 10^{-2}$	$5{,}96050986345 \times 10^{-15}$
0,2	$2{,}68265538578 \times 10^{-2}$	$2{,}68265538578 \times 10^{-2}$	$2{,}35922392732 \times 10^{-16}$
0,3	$-5{,}78528071833 \times 10^{-4}$	$-5{,}78528071822 \times 10^{-4}$	$1{,}12969529564 \times 10^{-14}$
0,4	$-2{,}84288942951 \times 10^{-2}$	$-2{,}84288942951 \times 10^{-2}$	$2{,}97678548477 \times 10^{-15}$
0,5	$-4{,}55105579646 \times 10^{-2}$	$-4{,}55105579646 \times 10^{-2}$	$4{,}56579218877 \times 10^{-15}$
0,6	$-4{,}52209383592 \times 10^{-2}$	$-4{,}52209383592 \times 10^{-2}$	$6{,}26582119522 \times 10^{-15}$
0,7	$-2{,}76601088031 \times 10^{-2}$	$-2{,}76601088030 \times 10^{-2}$	$1{,}47382106518 \times 10^{-14}$
0,8	$4{,}65718677217 \times 10^{-4}$	$4{,}65718677215 \times 10^{-4}$	$1{,}81511706706 \times 10^{-15}$
0,9	$2{,}84136272037 \times 10^{-2}$	$2{,}84136272037 \times 10^{-2}$	$6{,}84868828315 \times 10^{-15}$
1	$4{,}55084917885 \times 10^{-2}$	$4{,}55084917885 \times 10^{-2}$	$1{,}06858966120 \times 10^{-14}$

Fonte: do autor.

Nesse sentido, como pode ser visto na Figura 3, tem-se que: i) nos casos I e II, $M_o = 19$, enquanto que nos casos III e IV, $M_o = 25$; ii) o menor Erro Absoluto Médio ($\overline{E}_{abs}$) atingido foi da ordem de 10^{-15}, independente do caso estudado; iii) os melhores valores de M encontrados não são necessariamente os maiores e, muito pelo contrário, o gráfico sugere que não devem ser muito grandes, ficando na faixa de valores entre 19 e 25; iv) os casos III e IV, apresentaram uma significativa instabilidade quando testados para valores de M pequenos e pares, sugerindo que o método pode apresentar problemas numéricos quando a função a ser invertida for uma combinação de senos, cossenos e exponenciais.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho, um problema de engenharia elétrica foi utilizado para avaliar o desempenho do método Talbot-Fixo para inversão numérica da Transformada de Laplace. No processo, os resultados obtidos para quatro casos teste foram comparados àqueles gerados a partir da transformada inversa de Laplace calculada analitica-

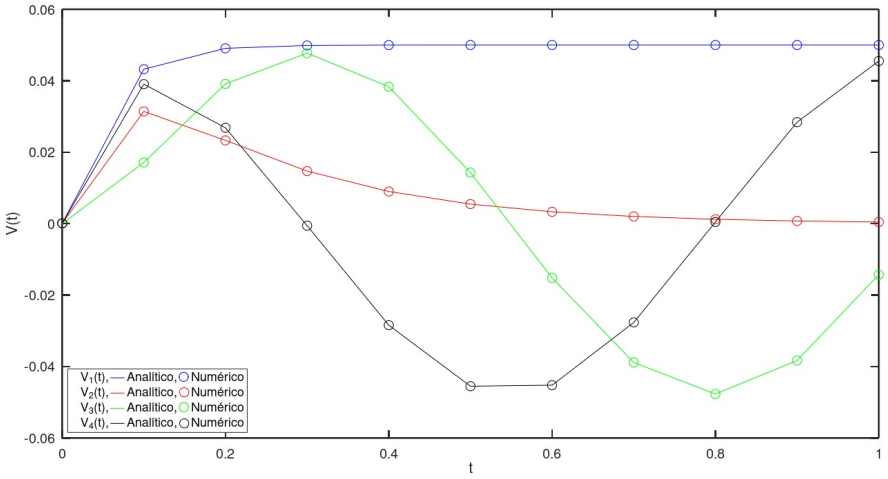


Figura 2. Gráficos das tensões $v(t)$ para os quatro casos estudados.
Fonte: do autor.

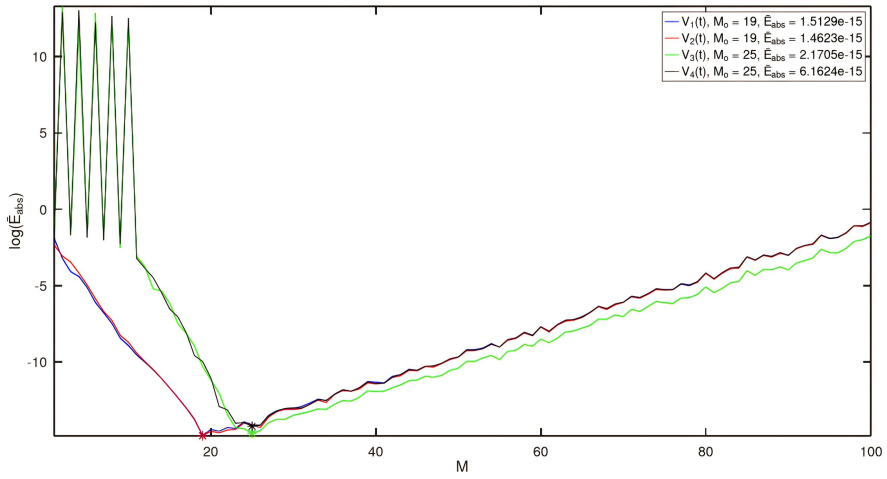


Figura 3. Gráficos do $\overline{E}_{abs}$ para os quatro casos estudados.
Fonte: do autor.

mente.

Durante as análises de desempenho do método numérico no cálculo da transformada inversa, as observações feitas permitiram fazer algumas recomendações: i) o algoritmo Talbot-Fixo é de fácil implementação e rápida execução, especialmente por não depender de esquemas iterativos; ii) foi assertivo usar o Erro Absoluto Médio como estratégia para estimar a melhor escolha do parâmetro M (M_o), pois permitiu a obtenção de perfis de tensão comparáveis com a literatura, com erros absolutos (ponto a ponto) de ordens entre 10^{-14} e 10^{-18} independente do caso estudado; iii) o parâmetro M, único parâmetro intrínseco ao método, que levou a uma melhor aproximação da transformada inversa numérica em relação a transformada inversa analítica, não deve ser muito grande e seus valores ficaram aqui entre 19 (casos I e II) e 25 (casos III e IV); iv) os resultados permitiram presumir que a escolha de valores de M maiores que M_o acarretam em perda de precisão; v) funções compostas

por combinações de senos, cossenos e exponenciais (casos III e IV) exigiram mais termos na série para que se atingisse o nível de precisão desejado.

Para trabalhos futuros, sugere-se a aplicação da técnica aqui apresentada em outros prolemas envolvendo circuitos elétricos, bem como a investigação da aplicabilidade/desempenho de outros métodos baseados na deformação do contorno de Bromwich para a resolução do problema aqui estudado.

AGRADECIMENTOS

À CAPES pelo apoio financeiro na realização deste estudo.

REFERÊNCIAS

Abate, J., Valkó, P. P. "Multi-precision Laplace Transform Inversion". Em: **International Journal for Numerical Methods in Engineering** 60 (2004), pp. 979–993. DOI: 10.1002/nme.995.

Brančík, L. **MATLAB for Engineers-Applications in Control, Electrical Engineering, IT and Robotics**, ed. Karel Perutka. Croatia: InTech, 2011. ISBN: 978-953-307-914-1.

Calixto, G. R. L., Freitas, K. E., Ferreira, J. A., Rodriguez B. D. A., Prolo Filho, J. F. "Parameter N Influence on Fixed-Talbot Algorithm for Laplace Transform Numerical Inversion". Em: **Vetor (FURG)** 32 (2022), pp. 42–51. DOI: 10.14295/vetor.v32i1.13754.

Costa, C. P., da, Pérez-Fernández, L.D., Rui, K., Bravo-Castillero, J. " Combinação do ADMM com Homogenização Matemática na Modelagem da Dispersão de poluentes na Atmosfera". Em: **Revista Brasileira de Meteorologia**, 33(2) (2018), pp.329–335. DPI:https://doi.org/10.1590/0102-7786332014.

Gois, I. C. P. de "Aplicações das transformadas de Laplace em circuitos elétricos". Trabalho de conclusão de curso. Centro de Ciências Exatas e Naturais. Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2018.

Ferreira, J. A., Calixto, G. R. L., Konflaz, E. F., Rodriguez, B. D. A., Prolo Filho, J. F. "Aspectos computacionais da inversão numérica da Transformada de Laplace aplicada a um problema de transporte". Em: **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia**, 6(2) (2020), pp. 139–152. ISSN: 2447-6102.

Pilatti, C., Rodriguez, B. D. A., Prolo Filho, J. F. "Performance Analysis of Stehfest and Power Series Expansion Methods for Solution to Diffusive and Advective Transport Problems". Em: **Defect and Diffusion Forum**, 396 (2019), pp. 99–108. DOI: 10.4028/www.scientific.net/DDF.396.99.

Talbot, A. "The accurate numerical inversion of Laplace Transforms". Em: **IMA Journal of Applied Mathematics** 23 (1970), pp. 97–120. DOI: 10.1093/imamat/23.1.97.